第四章　数值积分与数值微分

现代数值数学和计算课程

数值积分与数值微分: 引言

Newton-Leibniz公式:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

数值积分与数值微分: 引言

Newton-Leibniz公式:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

数值(近似)积分的必要性

数值积分与数值微分: 引言

Newton-Leibniz公式:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

数值(近似)积分的必要性

- 无初等原函数的被积函数: $\frac{\sin x}{x}$, e^{-x^2}, 等等

数值积分与数值微分: 引言

Newton-Leibniz公式:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

数值(近似)积分的必要性

- 无初等原函数的被积函数: $\frac{\sin x}{x}$, e^{-x^2}, 等等
- 利用数据表给出的函数, 高维积分等

数值积分与数值微分: 引言

Newton-Leibniz公式:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

数值(近似)积分的必要性

- 无初等原函数的被积函数: $\frac{\sin x}{x}$, e^{-x^2}, 等等
- 利用数据表给出的函数, 高维积分等
- 计算机程序提供的函数, 等其它情况

数值积分与数值微分: 引言

Newton-Leibniz公式:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

数值(近似)积分的必要性

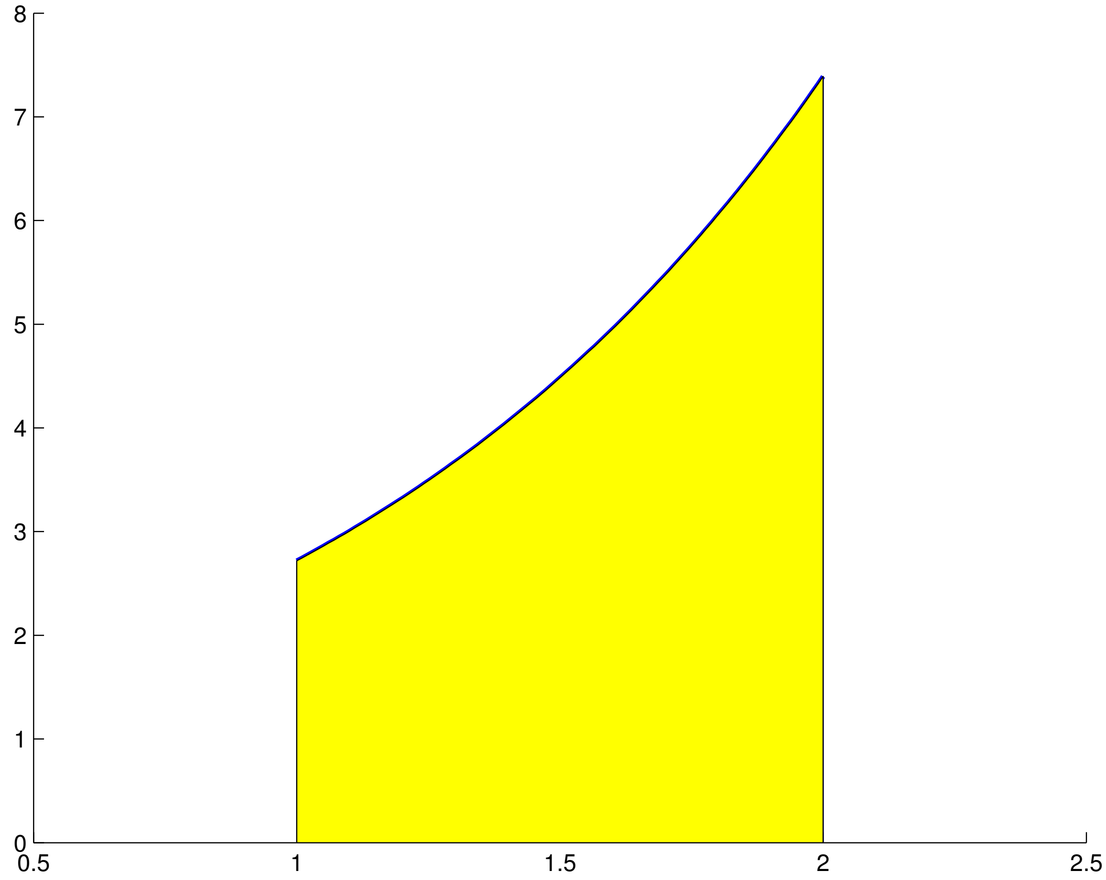
- 无初等原函数的被积函数: $\frac{\sin x}{x}$, e^{-x^2}, 等等
- 利用数据表给出的函数, 高维积分等
- 计算机程序提供的函数, 等其它情况
- 被积函数太复杂

数值积分与数值微分: 引言

Run nademo6

数值积分与数值微分：引言

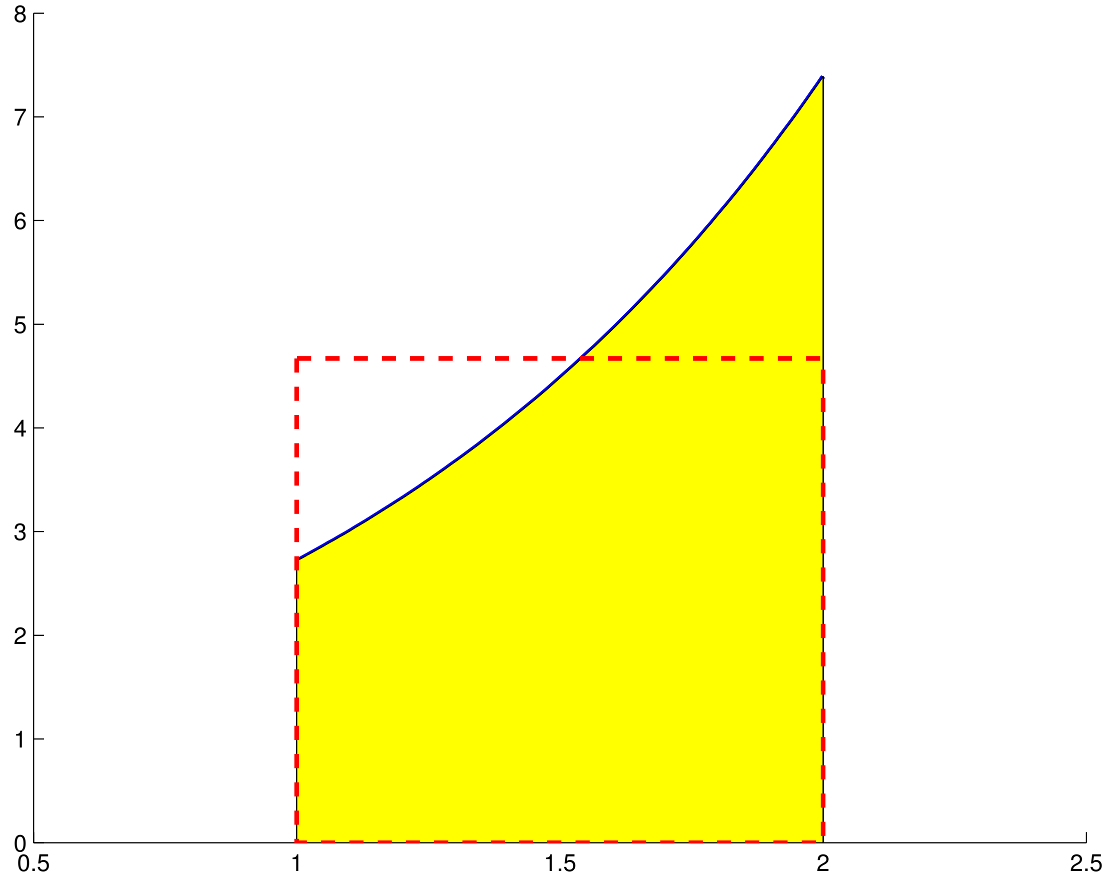
Run nademo6



$$\int_1^2 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$

数值积分与数值微分: 引言

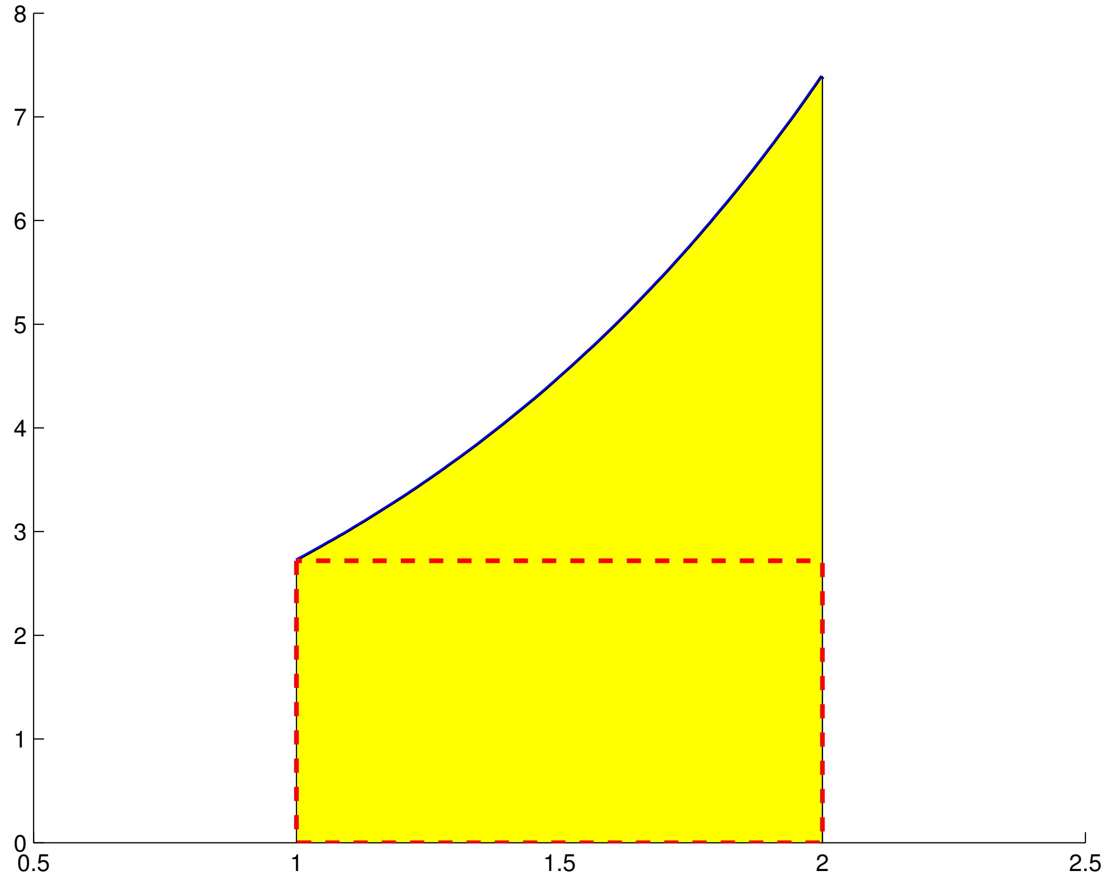
Run nademo6



$$\int_1^2 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^\xi \times (2-1), \quad \xi \in [1,2]$$

数值积分与数值微分: 引言

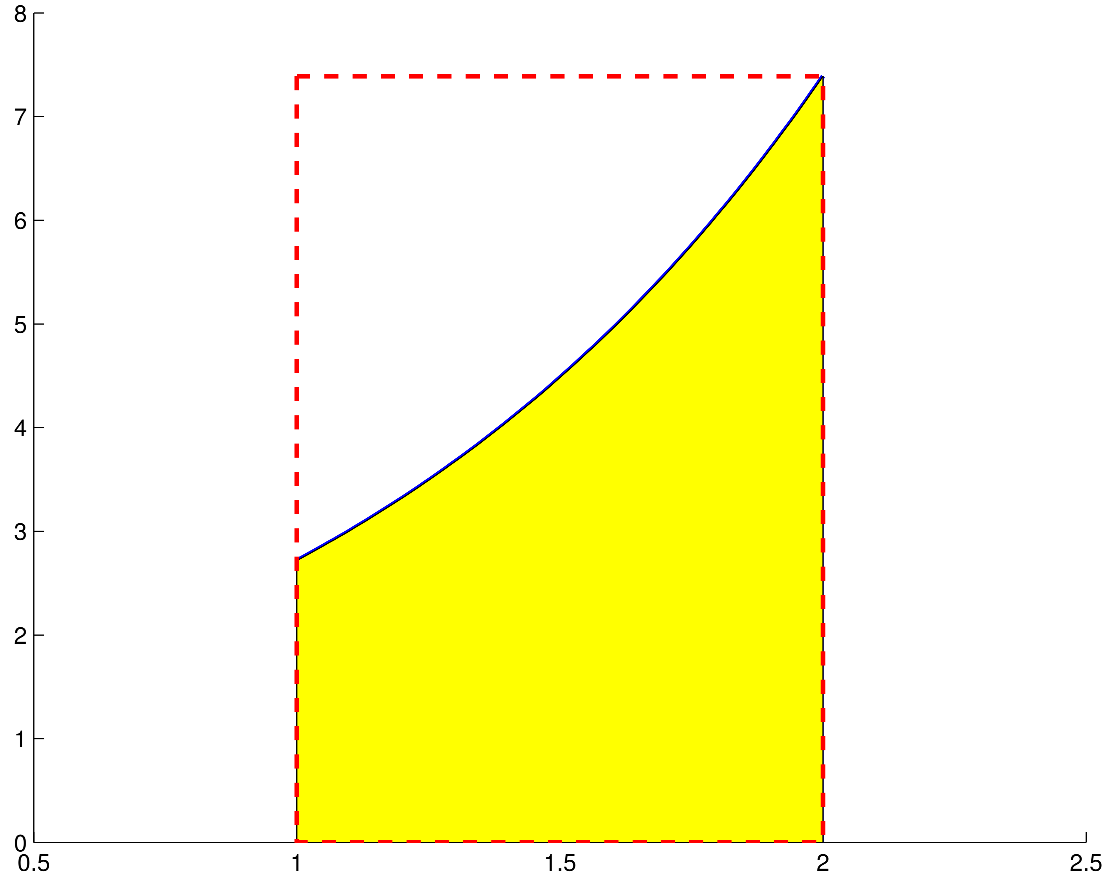
Run nademo6



$$\int_1^2 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^1 \times (2-1)$$

数值积分与数值微分: 引言

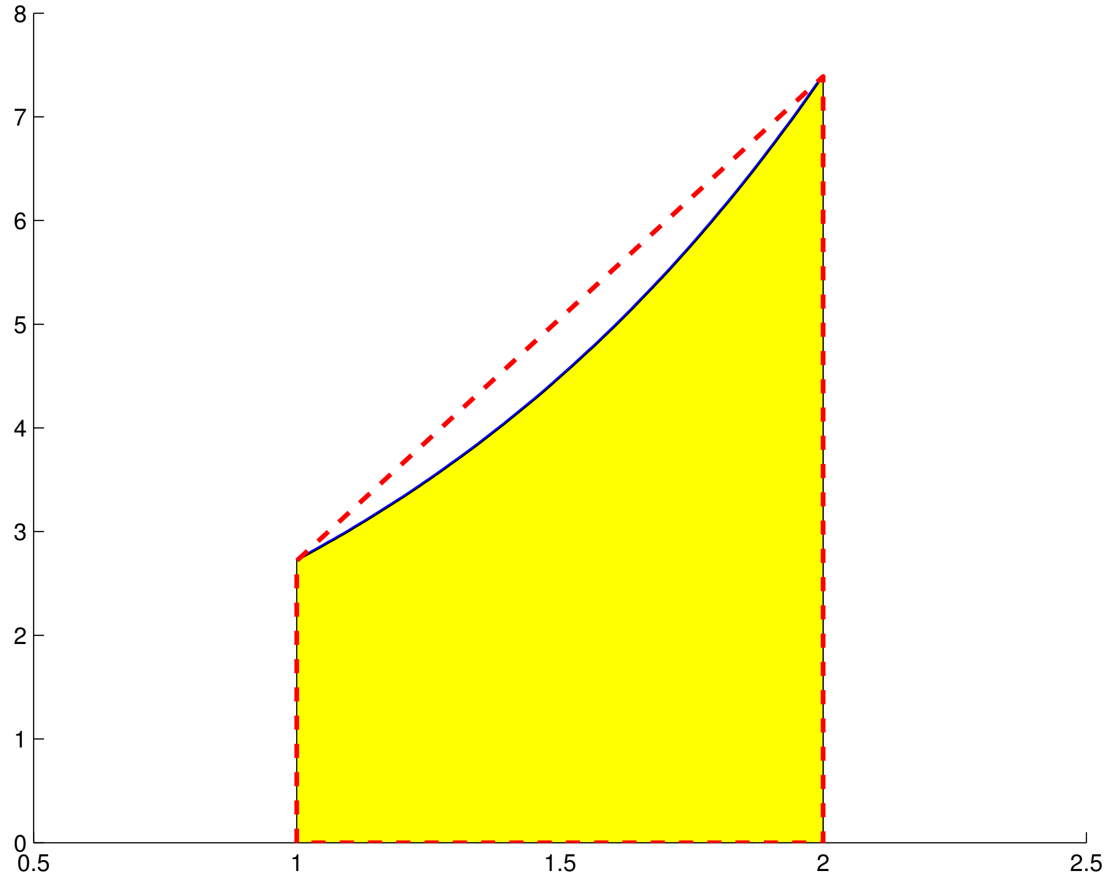
Run nademo6



$$\int_1^2 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x \;=\; \mathrm{e}^2 \times (2-1)$$

数值积分与数值微分: 引言

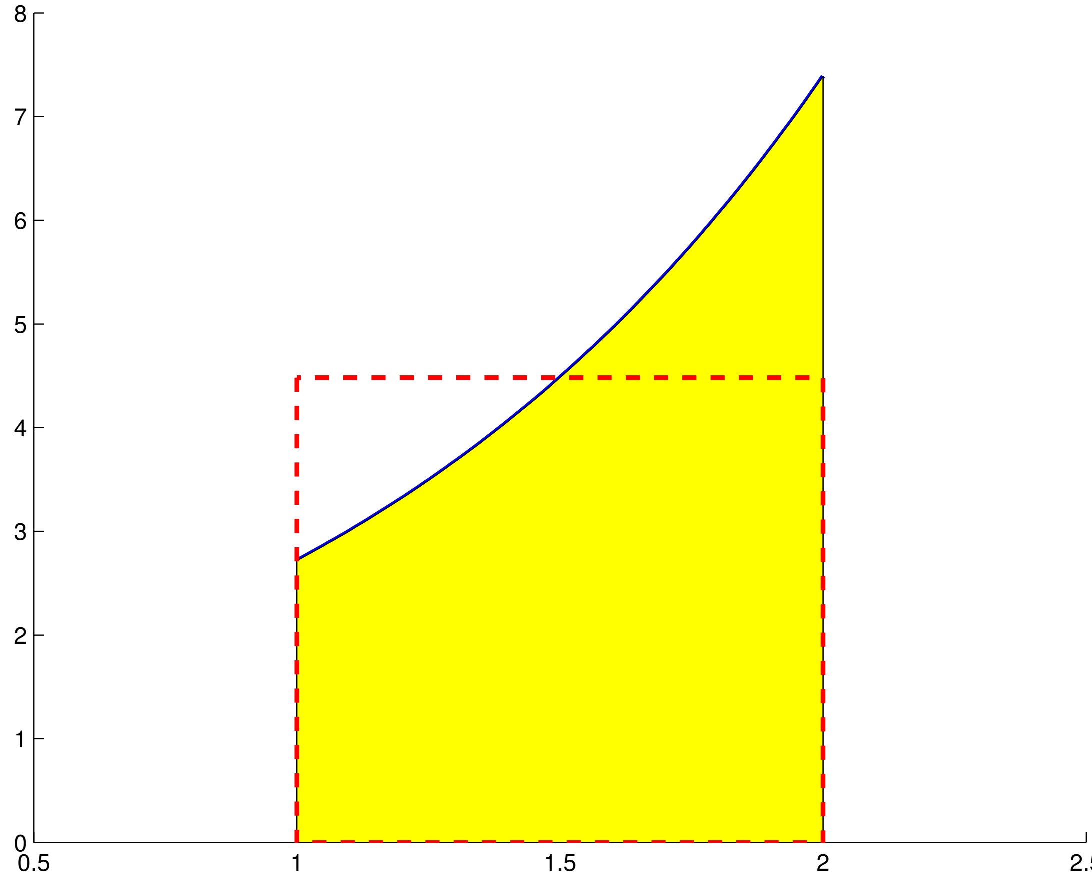
Run nademo6



$$\int_1^2 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{2}(\mathrm{e}^1 + \mathrm{e}^2) \times (2-1)$$

数值积分与数值微分: 引言

Run nademo6



$$\int_1^2 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x \;=\; \mathrm{e}^{\frac{1+2}{2}} \times (2-1)$$

数值积分与数值微分: 引言

$$I[f] = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i) = Q[f]$$

数值积分与数值微分: 引言

$$I[f] = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i) = Q[f]$$

$$R[f] = I(f) - Q[f]$$

数值积分与数值微分: 引言

$$I[f]=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n}\omega_i f(x_i)=Q[f]$$

$$R[f]=I(f)-Q[f]$$

求积公式$I[f]=Q[f]$、余项$R[f]$、节点x_i、系数ω_i

数值积分与数值微分: 引言

$$I[f] = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i) = Q[f]$$

$$R[f] = I(f) - Q[f]$$

求积公式$I[f] = Q[f]$、余项$R[f]$、节点x_i、系数ω_i

定义4.1 如果对于所有次数$\leq m$的多项式f, 等式 $I[f] = Q[f]$精确成立, 但对于某一次数为$m+1$的多项式**不精确成立**, 则称此求积公式的代数精度为m次。

数值积分与数值微分: 引言

例4.1 试确定系数ω_i, $(i = 0, 1, 2)$, 使得求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \omega_0 f(-1) + \omega_1 f(0) + \omega_2 f(1)$$

有尽可能高的代数精度，并求出此求积公式的代数精度。

数值积分与数值微分: 引言

例4.1 试确定系数$\omega_i, (i = 0, 1, 2)$, 使得求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \omega_0 f(-1) + \omega_1 f(0) + \omega_2 f(1)$$

有尽可能高的代数精度，并求出此求积公式的代数精度。

解:

数值积分与数值微分: 引言

例4.1 试确定系数ω_i, $(i=0,1,2)$, 使得求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \omega_0 f(-1) + \omega_1 f(0) + \omega_2 f(1)$$

有尽可能高的代数精度，并求出此求积公式的代数精度。

解: 分别令$f(x)=1, x, x^2$, 代入使积分公式精确成立, 得到线性方程组

数值积分与数值微分：引言

例4.1 试确定系数ω_i, $(i=0,1,2)$, 使得求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \omega_0 f(-1) + \omega_1 f(0) + \omega_2 f(1)$$

有尽可能高的代数精度，并求出此求积公式的代数精度。

解: 分别令$f(x)=1, x, x^2$, 代入使积分公式精确成立, 得到线性方程组

$$\begin{cases} \omega_0+\omega_1+\omega_2 = \int_{-1}^{1} 1\mathrm{d}x = 2, \\ -\omega_0+0+\omega_2 = \int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x = 0, \\ \omega_0+0+\omega_2 = \int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

数值积分与数值微分: 引言

例4.1 试确定系数ω_i, $(i=0,1,2)$, 使得求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \omega_0 f(-1) + \omega_1 f(0) + \omega_2 f(1)$$

有尽可能高的代数精度，并求出此求积公式的代数精度。

解: 解得$\omega_0 = \omega_2 = \frac{1}{3}, \omega_1 = \frac{4}{3}$. 这样求积公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1)$$

数值积分与数值微分: 引言

例4.1 试确定系数ω_i, $(i=0,1,2)$, 使得求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \omega_0 f(-1) + \omega_1 f(0) + \omega_2 f(1)$$

有尽可能高的代数精度，并求出此求积公式的代数精度。

解: 解得$\omega_0=\omega_2=\frac{1}{3}, \omega_1=\frac{4}{3}$. 这样求积公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1)$$

该公式对$f(x)=x^3$精确成立, 但$f(x)=x^4$时不精确成立。因此具有三次代数精度。

插值型求积公式

设$f(x)$在节点$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$上的函数值为$f_i$,

插值型求积公式

设$f(x)$在节点$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$上的函数值为$f_i$，作$n$次Lagrange插值多项式, 有

插值型求积公式

设$f(x)$在节点$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$上的函数值为$f_i$，作$n$次Lagrange插值多项式, 有

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x)$$

插值型求积公式

设$f(x)$在节点$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$上的函数值为$f_i$，作$n$次Lagrange插值多项式, 有

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x)$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \int_a^b L_n(x)\mathrm{d}x$$

插值型求积公式

设$f(x)$在节点$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$上的函数值为$f_i$，作$n$次Lagrange插值多项式, 有

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x)$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \;\approx \int_a^b L_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x)\mathrm{d}x$$

插值型求积公式

设$f(x)$在节点$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$上的函数值为$f_i$，作$n$次Lagrange插值多项式, 有

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x)$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \int_a^b L_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x)\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left[\int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x \right] f_i$$

插值型求积公式

设$f(x)$在节点$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$上的函数值为$f_i$，作$n$次Lagrange插值多项式, 有

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x)$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad &\approx \int_a^b L_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=0}^{n} \left[\int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x\right] f_i = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f_i\end{aligned}$$

插值型求积公式

设$f(x)$在节点$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$上的函数值为$f_i$，作$n$次**Lagrange**插值多项式, 有

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x)$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \int_a^b L_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x)\mathrm{d}x$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \left[\int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x \right] f_i = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f_i$$

插值型求积公式

插值型求积公式

设$f(x)$在节点$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$上的函数值为$f_i$，作$n$次Lagrange插值多项式, 有

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x)$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ &\approx \int_a^b L_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=0}^{n} \left[\int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x \right] f_i = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f_i \end{aligned}$$

插值型求积公式 代数精度有几次?

插值型求积公式

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1!)} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

插值型求积公式

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1!)} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

$$R[f] = \int_a^b R_n(x) \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1!)} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \mathrm{d}x$$

插值型求积公式

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1!)}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

$$R[f] = \int_a^b R_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1!)}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\mathrm{d}x$$

f次数$\leq n$时, $R[f]=0$, 代数精度至少n次。

插值型求积公式

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1!)} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

$$R[f] = \int_a^b R_n(x) \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1!)} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \mathrm{d}x$$

f次数$\leq n$时, $R[f] = 0$, 代数精度至少n次。反之, 若代数精度至少n次, 则必定是插值型的:

插值型求积公式

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1!)} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

$$R[f] = \int_a^b R_n(x) \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1!)} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \mathrm{d}x$$

f次数$\leq n$时, $R[f] = 0$, 代数精度至少n次。反之, 若代数精度至少n次, 则必定是插值型的: 用$l_k(x)$代入,

$$\int_a^b l_k(x) \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i l_k(x_i) = \omega_k.$$

插值型求积公式

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1!)} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

$$R[f] = \int_a^b R_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1!)} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)\mathrm{d}x$$

f次数$\leq n$时, $R[f] = 0$, 代数精度至少n次。反之, 若代数精度至少n次, 则必定是插值型的: 用$l_k(x)$代入,

$$\int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i l_k(x_i) = \omega_k.$$

定理4.1 求积公式$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$至少具有$n$次代数精度的充分必要条件是它是插值型的。

Newton-Cotes求积公式及其复合

Newton-Cotes公式即是等距节点的插值型求积公式。

Newton-Cotes求积公式及其复合

Newton-Cotes公式即是等距节点的插值型求积公式。

将区间$[a,b]$作n等分, 步长$h=\frac{b-a}{n}$, 等距节点$x_i=a+ih$, $i=0,\cdots,n$.

Newton-Cotes求积公式及其复合

Newton-Cotes公式即是等距节点的插值型求积公式。

将区间$[a,b]$作n等分, 步长$h=\frac{b-a}{n}$, 等距节点$x_i=a+ih$, $i=0,\cdots,n$. 作变量代换$x=a+th$, 代入ω_i中, 有

Newton-Cotes求积公式及其复合

Newton-Cotes公式即是等距节点的插值型求积公式。
将区间$[a,b]$作n等分, 步长$h=\frac{b-a}{n}$, 等距节点$x_i=a+ih$, $i=0,\cdots,n$. 作变量代换$x=a+th$, 代入ω_i中, 有

$$\omega_i = \int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x$$

Newton-Cotes求积公式及其复合

Newton-Cotes公式即是等距节点的插值型求积公式。
将区间$[a,b]$作n等分, 步长$h=\frac{b-a}{n}$, 等距节点$x_i=a+ih$, $i=0,\cdots,n$. 作变量代换$x=a+th$, 代入ω_i中, 有

$$\omega_i = \int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \prod_{k=0,\ k\neq i}^{n} \frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}\mathrm{d}x$$

Newton-Cotes求积公式及其复合

Newton-Cotes公式即是等距节点的插值型求积公式。
将区间$[a,b]$作n等分，步长$h=\frac{b-a}{n}$，等距节点$x_i=a+ih$，$i=0,\cdots,n$. 作变量代换$x=a+th$，代入ω_i中，有

$$\begin{aligned}\omega_i = & \int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \prod_{k=0,\ k\neq i}^{n} \frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}\mathrm{d}x \\ = & h\int_0^n \prod_{k=0,\ k\neq i}^{n} \frac{(t-k)}{(i-k)}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Newton-Cotes求积公式及其复合

Newton-Cotes公式即是等距节点的插值型求积公式。
将区间$[a,b]$作n等分, 步长$h=\frac{b-a}{n}$, 等距节点$x_i=a+ih$, $i=0,\cdots,n$. 作变量代换$x=a+th$, 代入ω_i中, 有

$$\begin{aligned}
\omega_i = & \int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \prod_{k=0,\,k\neq i}^{n} \frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}\mathrm{d}x \\
= & h\int_0^n \prod_{k=0,\,k\neq i}^{n} \frac{(t-k)}{(i-k)}\mathrm{d}t \\
= & \frac{(-1)^{n-i}}{n\cdot i!(n-i)!}\int_0^n \prod_{k=0,\,k\neq i}^{n}(t-k)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Newton-Cotes求积公式及其复合

Newton-Cotes公式即是等距节点的插值型求积公式。
将区间$[a,b]$作n等分, 步长$h=\frac{b-a}{n}$, 等距节点$x_i=a+ih$, $i=0,\cdots,n$. 作变量代换$x=a+th$, 代入ω_i中, 有

$$\begin{aligned}\omega_i &= \int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \prod_{k=0,\ k\neq i}^{n}\frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}\mathrm{d}x\\ &= h\int_0^n \prod_{k=0,\ k\neq i}^{n}\frac{(t-k)}{(i-k)}\mathrm{d}t\\ &= \frac{(-1)^{n-i}}{n\cdot i!(n-i)!}\int_0^n \prod_{k=0,\ k\neq i}^{n}(t-k)\mathrm{d}t\\ &= (b-a)C_i^{(n)} \qquad \text{(NC系数)}\end{aligned}$$

Newton-Cotes求积公式及其复合

常见的Newton-Cotes公式

Newton-Cotes求积公式及其复合

常见的Newton-Cotes公式

梯形公式(一次)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

Newton-Cotes求积公式及其复合

常见的Newton-Cotes公式

梯形公式(一次)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

抛物线(Simpson)公式(三次)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right]$$

Newton-Cotes求积公式及其复合

常见的Newton-Cotes公式

梯形公式(一次)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

抛物线(Simpson)公式(三次)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right]$$

Cotes公式(五次)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{90}\left[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)\right]$$

Newton-Cotes求积公式及其复合

n	柯特斯系数$C_i^{(n)}$

Newton-Cotes求积公式及其复合

n	柯特斯系数$C_i^{(n)}$
1	$\frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{1}{2}$

Newton-Cotes求积公式及其复合

n	柯特斯系数$C_i^{(n)}$		
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

Newton-Cotes求积公式及其复合

n	柯特斯系数$C_i^{(n)}$			
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Newton-Cotes求积公式及其复合

n	柯特斯系数$C_i^{(n)}$				
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$		
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$

Newton-Cotes求积公式及其复合

n	柯特斯系数$C_i^{(n)}$					
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$			
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$		
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$	
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$

Newton-Cotes求积公式及其复合

n	柯特斯系数$C_i^{(n)}$						
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$				
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$			
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$		
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$	
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$

Newton-Cotes求积公式及其复合

n	柯特斯系数$C_i^{(n)}$							
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$						
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$					
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$				
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$			
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$		
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$	
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$

Newton-Cotes求积公式及其复合

n	柯特斯系数$C_i^{(n)}$								
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$						
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$					
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$				
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$			
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$		
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$	
8	$\frac{989}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-4540}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{588}{28350}$	$\frac{989}{28350}$

Newton-Cotes求积公式及其复合

n	柯特斯系数$C_i^{(n)}$								
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$						
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$					
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$				
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$			
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$		
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$	
8	$\frac{989}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-4540}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{588}{28350}$	$\frac{989}{28350}$

$$\sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} = 1$$

Newton-Cotes求积公式及其复合

n	柯特斯系数$C_i^{(n)}$								
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$						
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$					
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$				
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$			
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$		
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$	
8	$\frac{989}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-4540}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{588}{28350}$	$\frac{989}{28350}$

$$\sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} = 1 \qquad C_i^{(n)} = C_{n-i}^{(n)}$$

Newton-Cotes求积公式及其复合

n	柯特斯系数$C_i^{(n)}$								
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$						
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$					
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$				
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$			
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$		
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$	
8	$\frac{989}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-4540}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{588}{28350}$	$\frac{989}{28350}$

$$\sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} = 1 \qquad C_i^{(n)} = C_{n-i}^{(n)} \qquad n \geq 8\text{有负系数}$$

Newton-Cotes求积公式及其复合

定理4.2 当n为偶数时, 牛顿-柯特斯公式的代数精度至少为$n+1$.

Newton-Cotes求积公式及其复合

定理4.2 当n为偶数时, 牛顿-柯特斯公式的代数精度至少为$n+1$.

证明:

Newton-Cotes求积公式及其复合

定理4.2 当n为偶数时, 牛顿-柯特斯公式的代数精度至少为$n+1$.

证明: 只需要证明$f(x)=x^{n+1}$时, 积分余项为0.

Newton-Cotes求积公式及其复合

定理4.2 当n为偶数时, 牛顿-柯特斯公式的代数精度至少为$n+1$.

证明: 只需要证明$f(x)=x^{n+1}$时, 积分余项为0. 余项为

$$R[f]=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\mathrm{d}x=\int_a^b \prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\mathrm{d}x$$

Newton-Cotes求积公式及其复合

定理4.2 当n为偶数时，牛顿-柯特斯公式的代数精度至少为$n+1$.

证明：只需要证明$f(x)=x^{n+1}$时，积分余项为0. 余项为

$$R[f]=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\mathrm{d}x=\int_a^b\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\mathrm{d}x$$

作变换$x=x_{\frac{n}{2}}+th$，得

$$R[f]=h^{n+2}\int_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}\prod_{k=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}(t-k)\mathrm{d}t$$

Newton-Cotes求积公式及其复合

定理4.2 当n为偶数时，牛顿-柯特斯公式的代数精度至少为$n+1$.

证明：只需要证明$f(x)=x^{n+1}$时，积分余项为0. 余项为

$$R[f]=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\mathrm{d}x=\int_a^b \prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\mathrm{d}x$$

作变换$x=x_{\frac{n}{2}}+th$，得

$$R[f]=h^{n+2}\int_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}\prod_{k=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}(t-k)\mathrm{d}t=h^{n+2}\int_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} t\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}}(t^2-k^2)\mathrm{d}t$$

Newton-Cotes求积公式及其复合

定理4.2 当n为偶数时, 牛顿-柯特斯公式的代数精度至少为$n+1$.

证明: 只需要证明$f(x)=x^{n+1}$时, 积分余项为0. 余项为

$$R[f]=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\mathrm{d}x=\int_a^b \prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\mathrm{d}x$$

作变换$x=x_{\frac{n}{2}}+th$, 得

$$R[f]=h^{n+2}\int_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}\prod_{k=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}(t-k)\mathrm{d}t=h^{n+2}\int_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}t\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}}(t^2-k^2)\mathrm{d}t=0$$

Newton-Cotes公式的稳定性

稳定性即数据$f_i = f(x_i)$有误差, 只能有近似值$\bar{f}_i$. 是否有

$$|Q[\bar{f}] - Q[f]| \le M \max_i |f_i - \bar{f}_i|?$$

Newton-Cotes公式的稳定性

稳定性即数据$f_i = f(x_i)$有误差, 只能有近似值$\bar{f}_i$. 是否有

$$|Q[\bar{f}] - Q[f]| \le M \max_i |f_i - \bar{f}_i|?$$

若$Q[f] = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$,

Newton-Cotes公式的稳定性

稳定性即数据$f_i = f(x_i)$有误差, 只能有近似值$\bar{f}_i$. 是否有

$$|Q[\bar{f}] - Q[f]| \le M \max_i |f_i - \bar{f}_i|?$$

若$Q[f] = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$, 则

$$|Q[f] - Q[\bar{f}]| = \left| \sum_{i=0}^{n} \omega_i \big(f_i - \bar{f}_i\big) \right|$$

Newton-Cotes公式的稳定性

稳定性即数据$f_i = f(x_i)$有误差, 只能有近似值$\bar{f}_i$. 是否有

$$|Q[\bar{f}] - Q[f]| \leq M \max_i |f_i - \bar{f}_i|?$$

若$Q[f] = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$, 则

$$|Q[f] - Q[\bar{f}]| = \left| \sum_{i=0}^{n} \omega_i \left(f_i - \bar{f}_i \right) \right| \leq \sum_{i=0}^{n} |\omega_i| \max_i |f_i - \bar{f}_i|$$

Newton-Cotes公式的稳定性

稳定性即数据$f_i = f(x_i)$有误差, 只能有近似值$\bar{f}_i$. 是否有

$$|Q[\bar{f}] - Q[f]| \le M \max_i |f_i - \bar{f}_i|?$$

若$Q[f] = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$, 则

$$|Q[f] - Q[\bar{f}]| = \left| \sum_{i=0}^{n} \omega_i \left(f_i - \bar{f}_i\right) \right| \le \sum_{i=0}^{n} |\omega_i| \max_i |f_i - \bar{f}_i|$$

考虑Newton-Cotes公式, 若$n \le 7$, $\omega_i = (b-a)C_i^{(n)} > 0$,

Newton-Cotes公式的稳定性

稳定性即数据$f_i = f(x_i)$有误差, 只能有近似值$\bar{f}_i$. 是否有

$$|Q[\bar{f}] - Q[f]| \leq M \max_i |f_i - \bar{f}_i|?$$

若$Q[f] = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$, 则

$$|Q[f] - Q[\bar{f}]| = \left| \sum_{i=0}^{n} \omega_i \left(f_i - \bar{f}_i \right) \right| \leq \sum_{i=0}^{n} |\omega_i| \max_i |f_i - \bar{f}_i|$$

考虑Newton-Cotes公式, 若$n \leq 7$, $\omega_i = (b-a)C_i^{(n)} > 0$,

$$|Q[f] - Q[\bar{f}]| \leq (b-a) \max_i |f_i - \bar{f}_i|.$$

Newton-Cotes公式的余项

梯形公式:

Newton-Cotes公式的余项

梯形公式:

$$R_T = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b L_1(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)\mathrm{d}x$$

Newton-Cotes公式的余项

梯形公式:

$$R_T = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b L_1(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)\mathrm{d}x$$

因为$(x-a)(x-b)$在区间内定号, 中值定理

Newton-Cotes公式的余项

梯形公式:

$$R_T = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b L_1(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)\mathrm{d}x$$

因为$(x-a)(x-b)$在区间内定号, 中值定理

$$R_T = \frac{1}{2}f''(\eta)\int_a^b (x-a)(x-b)\mathrm{d}x$$

Newton-Cotes公式的余项

梯形公式:

$$R_T = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b L_1(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)\mathrm{d}x$$

因为$(x-a)(x-b)$在区间内定号, 中值定理

$$R_T = \frac{1}{2}f''(\eta)\int_a^b (x-a)(x-b)\mathrm{d}x = -\frac{1}{12}f''(\eta)(b-a)^3$$

Newton-Cotes公式的余项

Simpson公式:

Newton-Cotes公式的余项

Simpson公式:

$$R_S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b L_2(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)\mathrm{d}x$$

Newton-Cotes公式的余项

Simpson公式:

$$R_S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b L_2(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)\mathrm{d}x$$

不定号, 不可用中值定理

Newton-Cotes公式的余项

Simpson公式:

设$f \in C^4$, 构造f的三次Hermite插值多项式$H(x)$, 使其满足

$$H(a) = f(a), \qquad H(b) = f(b),$$

$$H(\tfrac{a+b}{2}) = f(\tfrac{a+b}{2}), \quad H'(\tfrac{a+b}{2}) = f'(\tfrac{a+b}{2}).$$

Newton-Cotes公式的余项

Simpson公式:

设$f \in C^4$, 构造f的三次Hermite插值多项式$H(x)$, 使其满足

$$H(a) = f(a), \qquad H(b) = f(b),$$
$$H(\tfrac{a+b}{2}) = f(\tfrac{a+b}{2}), \quad H'(\tfrac{a+b}{2}) = f'(\tfrac{a+b}{2}).$$

则插值余项为

$$f(x) - H(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b), \quad \xi \in (a,b)$$

Newton-Cotes公式的余项

Simpson公式:　则插值余项为

$$f(x)-H(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b),\quad \xi\in(a,b)$$

$$R_S=\ \int_a^b f(x)-\sum_{i=0}^{2}(b-a)C_i^{(2)}f(x_i)$$

Newton-Cotes公式的余项

Simpson公式:　则插值余项为

$$f(x) - H(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b), \quad \xi \in (a,b)$$

$$\begin{aligned} R_S = & \int_a^b f(x) - \sum_{i=0}^{2} (b-a) C_i^{(2)} f(x_i) \\ = & \int_a^b f(x) - \sum_{i=0}^{2} (b-a) C_i^{(2)} H(x_i) \end{aligned}$$

Newton-Cotes公式的余项

Simpson公式:　则插值余项为

$$f(x) - H(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b), \quad \xi \in (a,b)$$

$$\begin{aligned} R_S = & \int_a^b f(x) - \sum_{i=0}^{2}(b-a)C_i^{(2)} f(x_i) \\ = & \int_a^b f(x) - \sum_{i=0}^{2}(b-a)C_i^{(2)} H(x_i) \\ = & \int_a^b f(x) - \int_a^b H(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Newton-Cotes公式的余项

Simpson公式:　则插值余项为

$$f(x) - H(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b), \quad \xi \in (a,b)$$

$$\begin{aligned}
R_S = & \int_a^b f(x) - \sum_{i=0}^{2}(b-a)C_i^{(2)} f(x_i) \\
= & \int_a^b f(x) - \sum_{i=0}^{2}(b-a)C_i^{(2)} H(x_i) \\
= & \int_a^b f(x) - \int_a^b H(x)\mathrm{d}x \\
= & \int_a^b \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Newton-Cotes公式的余项

Simpson公式：　则插值余项为

$$f(x)-H(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b),\quad \xi\in(a,b)$$

$$\begin{aligned}
R_S &= \int_a^b f(x)-\sum_{i=0}^{2}(b-a)C_i^{(2)}f(x_i)\\
&= \int_a^b f(x)-\sum_{i=0}^{2}(b-a)C_i^{(2)}H(x_i)\\
&= \int_a^b f(x)-\int_a^b H(x)\mathrm{d}x\\
&= \int_a^b \tfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)\left(x-\tfrac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\mathrm{d}x\\
&= -\tfrac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\eta),\quad \eta\in(a,b)
\end{aligned}$$

Newton-Cotes公式的余项

定理4.3 设Newton-Cotes公式为

$$Q[f] = (b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} f(x_i)$$

Newton-Cotes公式的余项

定理4.3 设Newton-Cotes公式为

$$Q[f] = (b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} f(x_i)$$

1. 若n为偶数, $f(x) \in C^{n+2}[a,b]$, 则存在$\eta \in (a,b)$, 使得

$$R[f] = I[f] - Q[f] = \frac{(b-a)^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{n^{n+3}(n+2)!}\int_0^n t^2(t-1)\cdots(t-n)\mathrm{d}t;$$

Newton-Cotes公式的余项

定理4.3 设Newton-Cotes公式为

$$Q[f] = (b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} f(x_i)$$

1. 若n为偶数, $f(x) \in C^{n+2}[a,b]$, 则存在$\eta \in (a,b)$, 使得

$$R[f] = I[f]-Q[f] = \frac{(b-a)^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{n^{n+3}(n+2)!}\int_0^n t^2(t-1)\cdots(t-n)\mathrm{d}t;$$

2. 若n为奇数， $f(x) \in C^{n+1}[a,b]$, 则存在$\eta \in (a,b)$, 使得

$$R[f] = I[f]-Q[f] = \frac{(b-a)^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{n^{n+2}(n+1)!}\int_0^n t^2(t-1)\cdots(t-n)\mathrm{d}t.$$

Newton-Cotes公式: 例

例4.2 分别用梯形公式和Simpson公式计算积分 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$, 并估计误差。

Newton-Cotes公式: 例

例4.2 分别用梯形公式和Simpson公式计算积分 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$, 并估计误差。

解:

Newton-Cotes公式: 例

例4.2 分别用梯形公式和Simpson公式计算积分 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$, 并估计误差。

解: 记$a = 0,\ b = 1,\ f(x) = \mathrm{e}^{-x}$, 则利用梯形公式得

$$T = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] = \frac{1}{2}[\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^{-1}] = 0.6839.$$

Newton-Cotes公式: 例

例4.2 分别用梯形公式和Simpson公式计算积分 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$, 并估计误差。

解: 记$a = 0$, $b = 1$, $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$, 则利用梯形公式得

$$T = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] = \frac{1}{2}[\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^{-1}] = 0.6839.$$

利用Simpson公式得,

$$S = \frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)] = \frac{1}{2}[\mathrm{e}^0+4\mathrm{e}^{-0.5}+\mathrm{e}^{-1}] = 0.6323.$$

Newton-Cotes公式: 例

例4.2 分别用梯形公式和Simpson公式计算积分 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$, 并估计误差。

解: 记$a=0$, $b=1$, $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$, 则利用梯形公式得

$$T=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]=\frac{1}{2}[\mathrm{e}^0+\mathrm{e}^{-1}]=0.6839.$$

利用Simpson公式得,

$$S=\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]=\frac{1}{2}[\mathrm{e}^0+4\mathrm{e}^{-0.5}+\mathrm{e}^{-1}]=0.6323.$$

与积分的精确值0.6321相比较, 实际误差分别为0.0518及0.0002.

复合求积公式

复合梯形公式

复合求积公式

复合梯形公式

等分求积区间, 每个小区间$[x_i, x_{i+1}]$上运用求积公式, 再把每个小区间上的积分值相加

复合求积公式

复合梯形公式

等分求积区间, 每个小区间$[x_i, x_{i+1}]$上运用求积公式, 再把每个小区间上的积分值相加

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x$$

复合求积公式

复合梯形公式

等分求积区间, 每个小区间$[x_i, x_{i+1}]$上运用求积公式, 再把每个小区间上的积分值相加

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})]$$

复合求积公式

复合梯形公式

等分求积区间, 每个小区间$[x_i, x_{i+1}]$上运用求积公式, 再把每个小区间上的积分值相加

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = &\ \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})] \\ = &\ \frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)] = T_n\end{aligned}$$

复合求积公式

复合梯形公式

等分求积区间, 每个小区间$[x_i, x_{i+1}]$上运用求积公式, 再把每个小区间上的积分值相加

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})]$$

$$= \frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)] = T_n$$

设$f(x)\in C^2[a,b]$, 则

$$I[f]-T_n = \sum_{i=0}^{n-1}[-\frac{h^3}{12}f''(\eta_i)]$$

复合求积公式

复合梯形公式

等分求积区间, 每个小区间$[x_i, x_{i+1}]$上运用求积公式, 再把每个小区间上的积分值相加

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})]$$

$$= \frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)] = T_n$$

设$f(x) \in C^2[a,b]$, 则

$$I[f]-T_n = \sum_{i=0}^{n-1}[-\frac{h^3}{12}f''(\eta_i)] = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta)$$

复合求积公式

复合梯形公式

等分求积区间，每个小区间$[x_i, x_{i+1}]$上运用求积公式，再把每个小区间上的积分值相加

```
function I=ftrapz(fh, a, b, n)
  h    = (b-a)/n;
  np1 = n + 1;
  x    = a:h:b;
  c    = ones(np1,1);
  c(1,  1) = 0.5;
  c(np1,1) = 0.5;
  fx = feval(fh,x);
  I  = h * fx * c;
```

复合求积公式

复合Simpson公式

复合求积公式

复合Simpson公式

等分求积区间, 记小区间$[x_i, x_{i+1}]$中点为$x_{i+\frac{1}{2}}$, 在每个小区间$[x_i, x_{i+1}]$上Simpson求积公式, 再把每个小区间上的积分值相加

复合求积公式

复合Simpson公式

等分求积区间，记小区间$[x_i, x_{i+1}]$中点为$x_{i+\frac{1}{2}}$，在每个小区间$[x_i, x_{i+1}]$上Simpson求积公式，再把每个小区间上的积分值相加

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x$$

复合求积公式

复合Simpson公式

等分求积区间, 记小区间$[x_i, x_{i+1}]$中点为$x_{i+\frac{1}{2}}$, 在每个小区间$[x_i, x_{i+1}]$上Simpson求积公式, 再把每个小区间上的积分值相加

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{6}[f(x_i) + 4f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})]$$

复合求积公式

复合Simpson公式

等分求积区间, 记小区间$[x_i, x_{i+1}]$中点为$x_{i+\frac{1}{2}}$, 在每个小区间$[x_i, x_{i+1}]$上Simpson求积公式, 再把每个小区间上的积分值相加

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{6}[f(x_i) + 4f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})]$$

$$= \frac{h}{6}[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(b)] = S_n$$

复合求积公式

复合Simpson公式

等分求积区间，记小区间$[x_i, x_{i+1}]$中点为$x_{i+\frac{1}{2}}$，在每个小区间$[x_i, x_{i+1}]$上Simpson求积公式，再把每个小区间上的积分值相加

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{6}[f(x_i) + 4f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})] \\
= \frac{h}{6}[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(b)] = S_n
\end{aligned}
$$

设$f(x) \in C^4[a, b]$，则

$$
I[f] - S_n = -\frac{b-a}{2880} h^4 f^{(4)}(\eta)
$$

复合求积公式

复合Simpson公式

等分求积区间, 记小区间$[x_i, x_{i+1}]$中点为$x_{i+\frac{1}{2}}$, 在每个小区间$[x_i, x_{i+1}]$上Simpson求积公式, 再把每个小区间上的积分值相加

```
function I=fsimpson(fh, a, b, n)

    h  = (b-a)/n;

    I1 = ftrapz(fh,a,b,n);

    a1 = a + h * 0.5;

    b1 = b - h * 0.5;

    x  = a1:h:b1;

    c  = ones(n,1);

    fx = feval(fh, x);

    I2 = 2 * h * fx * c;

    I  = (I1 + I2)/3;
```

复合求积公式: 例

例4.3 利用下表分别用复合梯形公式和复合Simpson公式计算积分$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$.

复合求积公式：例

例4.3 利用下表分别用复合梯形公式和复合Simpson公式计算积分$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$.

x $f(x)$	0 1	$1/8$ 0.9973978	$1/4$ 0.9896158	$3/8$ 0.9767267	$1/2$ 0.9538510
x $f(x)$		$5/8$ 0.9361556	$3/4$ 0.9088516	$7/8$ 0.8771925	1 0.8414709

复合求积公式: 例

例4.3 利用下表分别用复合梯形公式和复合Simpson公式计算积分$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

x	0	$1/8$	$1/4$	$3/8$	$1/2$
$f(x)$	1	0.9973978	0.9896158	0.9767267	0.9538510
x		$5/8$	$3/4$	$7/8$	1
$f(x)$		0.9361556	0.9088516	0.8771925	0.8414709

解:

复合求积公式: 例

例4.3 利用下表分别用复合梯形公式和复合Simpson公式计算积分$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$.

x $f(x)$	0 1	1/8 0.9973978	1/4 0.9896158	3/8 0.9767267	1/2 0.9538510
x $f(x)$		5/8 0.9361556	3/4 0.9088516	7/8 0.8771925	1 0.8414709

解:

$$T_8 = \frac{1}{16}\{f(0) + 2\sum_{k=1}^{7} f(\frac{k}{8}) + f(1)\}$$

复合求积公式: 例

例4.3 利用下表分别用复合梯形公式和复合Simpson公式计算积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

x	0	1/8	1/4	3/8	1/2
$f(x)$	1	0.9973978	0.9896158	0.9767267	0.9538510
x		5/8	3/4	7/8	1
$f(x)$		0.9361556	0.9088516	0.8771925	0.8414709

解:

$$T_8=\frac{1}{16}\{f(0)+2\sum_{k=1}^{7} f(\frac{k}{8})+f(1)\}=0.9456909$$

复合求积公式: 例

例4.3 利用下表分别用复合梯形公式和复合Simpson公式计算积分$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$.

x $f(x)$	0 1	$1/8$ 0.9973978	$1/4$ 0.9896158	$3/8$ 0.9767267	$1/2$ 0.9538510
x $f(x)$		$5/8$ 0.9361556	$3/4$ 0.9088516	$7/8$ 0.8771925	1 0.8414709

解:

$$T_8 = \frac{1}{16}\{f(0) + 2\sum_{k=1}^{7} f(\frac{k}{8}) + f(1)\} = 0.9456909$$

$$S_4 = \frac{1}{24}\{f(0) + 4\sum_{k=1}^{4} f(\frac{2k-1}{8}) + 2\sum_{k=1}^{3} f(\frac{k}{4}) + f(1)\}$$

复合求积公式: 例

例4.3 利用下表分别用复合梯形公式和复合Simpson公式计算积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

x	0	1/8	1/4	3/8	1/2
$f(x)$	1	0.9973978	0.9896158	0.9767267	0.9538510
x		5/8	3/4	7/8	1
$f(x)$		0.9361556	0.9088516	0.8771925	0.8414709

解:

$$T_8=\frac{1}{16}\{f(0)+2\sum_{k=1}^{7}f(\frac{k}{8})+f(1)\}=0.9456909$$

$$S_4=\frac{1}{24}\{f(0)+4\sum_{k=1}^{4}f(\frac{2k-1}{8})+2\sum_{k=1}^{3}f(\frac{k}{4})+f(1)\}=0.9460832$$

复合求积公式: 例

例4.3 利用下表分别用复合梯形公式和复合Simpson公式计算积分$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$. (真值0.9460831)

x	0	1/8	1/4	3/8	1/2
$f(x)$	1	0.9973978	0.9896158	0.9767267	0.9538510
x		5/8	3/4	7/8	1
$f(x)$		0.9361556	0.9088516	0.8771925	0.8414709

解:

$$T_8 = \frac{1}{16}\{f(0) + 2\sum_{k=1}^{7} f(\frac{k}{8}) + f(1)\} = 0.9456909$$

$$S_4 = \frac{1}{24}\{f(0) + 4\sum_{k=1}^{4} f(\frac{2k-1}{8}) + 2\sum_{k=1}^{3} f(\frac{k}{4}) + f(1)\} = 0.9460832$$

复合求积公式: 例

例4.3 利用下表分别用复合梯形公式和复合Simpson公式计算积分$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$. (真值0.9460831)

```
function y = f(x)
  x = x + (x==0)*eps;
  y = sin(x) ./ x ;
```

复合求积公式: 例

例4.3 利用下表分别用复合梯形公式和复合Simpson公式计算积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$. (真值0.9460831)

```
function y = f(x)
  x = x + (x==0)*eps;
  y = sin(x) ./ x ;
```

调用: ftrapz(@f,0,1,8) 或 fsimpson(@f,0,1,4)

复合求积公式: 例

例4.3 利用下表分别用复合梯形公式和复合Simpson公式计算积分$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$. (真值0.9460831)

```
function y = f(x)
  x = x + (x==0)*eps;
  y = sin(x) ./ x ;
```

调用: ftrapz(@f,0,1,8) 或 fsimpson(@f,0,1,4)

误差

$$\frac{I - T_n}{h^2} = -\frac{1}{12} \sum_{i=0}^{n-1} h f''(\eta_i)$$

复合求积公式: 例

例4.3 利用下表分别用复合梯形公式和复合Simpson公式计算积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$. (真值0.9460831)

```
function y = f(x)
  x = x + (x==0)*eps;
  y = sin(x) ./ x ;
```

调用: ftrapz(@f,0,1,8) 或 fsimpson(@f,0,1,4)

误差

$$\frac{I-T_n}{h^2} = -\frac{1}{12}\sum_{i=0}^{n-1} hf''(\eta_i) \to -\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)\mathrm{d}x$$

复合求积公式: 例

例4.3 利用下表分别用复合梯形公式和复合Simpson公式计算积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$. (真值0.9460831)

```
function y = f(x)
  x = x + (x==0)*eps;
  y = sin(x) ./ x ;
```

调用: ftrapz(@f,0,1,8) 或 fsimpson(@f,0,1,4)

误差

$$\frac{I-T_n}{h^2} = -\frac{1}{12}\sum_{i=0}^{n-1} hf''(\eta_i) \to -\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)\mathrm{d}x$$

$$I-T_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b)-f'(a)].$$

样条插值积分

用三次样条插值函数代替被积函数, 从而得到样条插值积分公式。

样条插值积分

用三次样条插值函数代替被积函数, 从而得到样条插值积分公式。

将区间$[a,b]$作n等分, 步长$h=\frac{b-a}{n}$, 节点$x_i=a+ih$上的函数值为$f(x_i)=f_i,\ (i=0,1,\cdots,n)$. 设在$x_i$处三次样条插值函数$S(x)$的一阶导数为$S'(x_i)=m_i$, 则$S(x)$在每个子区间$[x_i,x_{i+1}]$上为满足以下条件的三次Hermite插值多项式:

$$
\begin{aligned}
S(x_i) &= f(x_i), & S'(x_i) &= m_i,\\
S(x_{i+1}) &= f(x_{i+1}), & S'(x_{i+1}) &= m_{i+1},
\end{aligned}
$$

样条插值积分

用三次样条插值函数代替被积函数, 从而得到样条插值积分公式。

将区间$[a,b]$作n等分, 步长$h=\frac{b-a}{n}$, 节点$x_i=a+ih$上的函数值为$f(x_i)=f_i$, $(i=0,1,\cdots,n)$. 设在x_i处三次样条插值函数$S(x)$的一阶导数为$S'(x_i)=m_i$, 则$S(x)$在每个子区间$[x_i,x_{i+1}]$上为满足以下条件的三次Hermite插值多项式:

$$
\begin{aligned}
S(x_i) &= f(x_i), & S'(x_i) &= m_i, \\
S(x_{i+1}) &= f(x_{i+1}), & S'(x_{i+1}) &= m_{i+1},
\end{aligned}
$$

因此,

$$
\begin{aligned}
S(x) = {} & \frac{1}{h^2}(x-x_i)(x-x_{i+1})^2 m_i + \frac{1}{h^2}(x-x_i)^2(x-x_{i+1}) m_{i+1} \\
& + \frac{1}{h^3}(x-x_{i+1})^2[h+2(x-x_i)]f_i + \frac{1}{h^3}(x-x_i)^2[h+2(x_{i+1}-x)]f_{i+1}
\end{aligned}
$$

样条插值积分

因此,

$$
\begin{aligned}
S(x) &= \tfrac{1}{h^2}(x-x_i)(x-x_{i+1})^2 m_i + \tfrac{1}{h^2}(x-x_i)^2(x-x_{i+1})m_{i+1} \\
&+ \tfrac{1}{h^3}(x-x_{i+1})^2[h+2(x-x_i)]f_i + \tfrac{1}{h^3}(x-x_i)^2[h+2(x_{i+1}-x)]f_{i+1}
\end{aligned}
$$

则

$$
S(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})] + \frac{h}{8}(m_i - m_{i+1}).
$$

样条插值积分

因此，

$$S(x) = \tfrac{1}{h^2}(x-x_i)(x-x_{i+1})^2 m_i + \tfrac{1}{h^2}(x-x_i)^2(x-x_{i+1})m_{i+1}$$
$$+ \tfrac{1}{h^3}(x-x_{i+1})^2[h+2(x-x_i)]f_i + \tfrac{1}{h^3}(x-x_i)^2[h+2(x_{i+1}-x)]f_{i+1}$$

则

$$S(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})] + \frac{h}{8}(m_i - m_{i+1}).$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} S(x)\mathrm{d}x = \frac{h}{6}[S(x_i) + 4S(x_{i+\frac{1}{2}}) + S(x_{i+1})]$$

样条插值积分

因此,

$$S(x) = \frac{1}{h^2}(x-x_i)(x-x_{i+1})^2 m_i + \frac{1}{h^2}(x-x_i)^2(x-x_{i+1})m_{i+1}$$
$$+ \frac{1}{h^3}(x-x_{i+1})^2[h+2(x-x_i)]f_i + \frac{1}{h^3}(x-x_i)^2[h+2(x_{i+1}-x)]f_{i+1}$$

则

$$S(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})] + \frac{h}{8}(m_i - m_{i+1}).$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} S(x)\mathrm{d}x = \frac{h}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})] + \frac{h^2}{12}(m_i - m_{i+1})$$

样条插值积分

因此,

$$S(x) = \tfrac{1}{h^2}(x-x_i)(x-x_{i+1})^2 m_i + \tfrac{1}{h^2}(x-x_i)^2(x-x_{i+1})m_{i+1}$$
$$+ \tfrac{1}{h^3}(x-x_{i+1})^2[h+2(x-x_i)]f_i + \tfrac{1}{h^3}(x-x_i)^2[h+2(x_{i+1}-x)]f_{i+1}$$

则

$$S(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}[f(x_i) + f(x_{i+1})] + \frac{h}{8}(m_i - m_{i+1}).$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} S(x)\mathrm{d}x = \frac{h}{2}[f(x_i) + f(x_{i+1})] + \frac{h^2}{12}(m_i - m_{i+1})$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

样条插值积分

因此,

$$S(x)=\tfrac{1}{h^2}(x-x_i)(x-x_{i+1})^2m_i+\tfrac{1}{h^2}(x-x_i)^2(x-x_{i+1})m_{i+1}$$
$$+\tfrac{1}{h^3}(x-x_{i+1})^2[h+2(x-x_i)]f_i+\tfrac{1}{h^3}(x-x_i)^2[h+2(x_{i+1}-x)]f_{i+1}$$

则

$$S(x_{i+\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})]+\frac{h}{8}(m_i-m_{i+1}).$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}S(x)\mathrm{d}x=\frac{h}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})]+\frac{h^2}{12}(m_i-m_{i+1})$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)\mathrm{d}x$$

样条插值积分

因此,

$$S(x) = \frac{1}{h^2}(x-x_i)(x-x_{i+1})^2 m_i + \frac{1}{h^2}(x-x_i)^2(x-x_{i+1})m_{i+1}$$
$$+\frac{1}{h^3}(x-x_{i+1})^2[h+2(x-x_i)]f_i + \frac{1}{h^3}(x-x_i)^2[h+2(x_{i+1}-x)]f_{i+1}$$

则

$$S(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})] + \frac{h}{8}(m_i - m_{i+1}).$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} S(x)\mathrm{d}x = \frac{h}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})] + \frac{h^2}{12}(m_i - m_{i+1})$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} S(x)\mathrm{d}x$$

样条插值积分

因此,

$$S(x) = \tfrac{1}{h^2}(x-x_i)(x-x_{i+1})^2 m_i + \tfrac{1}{h^2}(x-x_i)^2(x-x_{i+1})m_{i+1}$$
$$+ \tfrac{1}{h^3}(x-x_{i+1})^2[h+2(x-x_i)]f_i + \tfrac{1}{h^3}(x-x_i)^2[h+2(x_{i+1}-x)]f_{i+1}$$

则

$$S(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})] + \frac{h}{8}(m_i - m_{i+1}).$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} S(x)\mathrm{d}x = \frac{h}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})] + \frac{h^2}{12}(m_i - m_{i+1})$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} S(x)\mathrm{d}x = T_n - \frac{h^2}{12}[f'(b)-f'(a)] = U_n$$

变步长算法

变步长梯形积分

变步长算法

变步长梯形积分

$$T_n = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

变步长算法

变步长梯形积分

$$T_n = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

区间折半, 新增区间$[x_i, x_{i+1}]$中点$x_{i+\frac{1}{2}}$,

变步长算法

变步长梯形积分

$$T_n = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

区间折半, 新增区间$[x_i, x_{i+1}]$中点$x_{i+\frac{1}{2}}$,

$$T_{2n} = \frac{h}{4}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) + 2f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})]$$

变步长算法

变步长梯形积分

$$T_n = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

区间折半, 新增区间$[x_i, x_{i+1}]$中点$x_{i+\frac{1}{2}}$,

$$\begin{aligned} T_{2n} = & \ \frac{h}{4}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) + 2f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})] \\ = & \ \frac{h}{4}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) + f(x_{i+1})] + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

变步长算法

变步长梯形积分

$$T_n = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

区间折半, 新增区间$[x_i, x_{i+1}]$中点$x_{i+\frac{1}{2}}$,

$$\begin{aligned} T_{2n} = & \ \tfrac{h}{4}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) + 2f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})] \\ = & \ \tfrac{h}{4}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) + f(x_{i+1})] + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) \\ = & \ \tfrac{1}{2}T_n + \tfrac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

变步长算法

变步长梯形积分

```
function t2=ctrapz(fh,a,b,ep)
  h  = b-a;
  t1 = 0.5*(b-a)*(feval(fh,a) + feval(fh,b));
  t2 = 0.5*t1 + 0.5*h*feval(fh,(a+b)/2);
  while abs(t2-t1)>ep
    t1 = t2;
    h  = h / 2;
    t2 = 0.5 *( t2 + ...
         2*h*sum(feval(fh, a+h:2*h:b-h)) );
  end
```

变步长算法

变步长梯形积分

例4.4 用变步长梯形公式计算积分$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$的近似值，要求计算精度$|T_{2n}-T_n| \leq 10^{-7}$.

变步长算法

变步长梯形积分

例4.4 用变步长梯形公式计算积分$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$的近似值，要求计算精度$|T_{2n} - T_n| \leq 10^{-7}$.

k	T_n	k	T_n
0	0.9207355	6	0.9460769
1	0.9397933	7	0.9460815
2	0.9445135	8	0.9460827
3	0.9456909	9	0.9460830
4	0.9459850	10	0.9460831
5	0.9460596		

Romberg算法

$$I - T_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)]$$

Romberg算法

$$I - T_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] \Rightarrow \frac{I - T_{2n}}{I - T_n} \approx \frac{1}{4}$$

Romberg算法

$$I - T_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] \Rightarrow \frac{I - T_{2n}}{I - T_n} \approx \frac{1}{4}$$

$$I \approx T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$$

Romberg算法

$$I - T_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] \Rightarrow \frac{I - T_{2n}}{I - T_n} \approx \frac{1}{4}$$

$$I \approx T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$$

例如上例中, $T_4 = 0.9445135$, $T_8 = 0.9456909$, (各具有2,3个有效数字,) 新的近似值

Romberg算法

$$I - T_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] \Rightarrow \frac{I - T_{2n}}{I - T_n} \approx \frac{1}{4}$$

$$I \approx T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$$

例如上例中, $T_4 = 0.9445135$, $T_8 = 0.9456909$, (各具有2,3个有效数字,) 新的近似值

$$I \approx T_8 + \frac{1}{3}(T_8 - T_4) = 0.9460833$$

具有6位有效数字。

Romberg算法

$$I - T_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] \Rightarrow \frac{I - T_{2n}}{I - T_n} \approx \frac{1}{4}$$

$$I \approx T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$$

例如上例中, $T_4 = 0.9445135$, $T_8 = 0.9456909$, (各具有2,3个有效数字,) 新的近似值

$$I \approx T_8 + \frac{1}{3}(T_8 - T_4) = 0.9460833$$

具有6位有效数字。实际上,

$$S_n = T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$$

Romberg算法

$$I - T_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] \Rightarrow \frac{I - T_{2n}}{I - T_n} \approx \frac{1}{4}$$

实际上,

$$S_n = T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$$

例如,

$$T_2 + \tfrac{1}{3}(T_2 - T_1) = \tfrac{4}{3}T_2 - \tfrac{1}{3}T_1$$

Romberg算法

$$I - T_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] \Rightarrow \frac{I - T_{2n}}{I - T_n} \approx \frac{1}{4}$$

实际上,

$$S_n = T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$$

例如,

$$\begin{aligned} & T_2 + \tfrac{1}{3}(T_2 - T_1) = \tfrac{4}{3}T_2 - \tfrac{1}{3}T_1 \\ = \quad & \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{b-a}{4}[f(a) + 2f(\tfrac{a+b}{2}) + f(b)] - \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] \end{aligned}$$

Romberg算法

$$I - T_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] \Rightarrow \frac{I - T_{2n}}{I - T_n} \approx \frac{1}{4}$$

实际上,

$$S_n = T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$$

例如,

$$\begin{aligned}
& T_2 + \tfrac{1}{3}(T_2 - T_1) = \tfrac{4}{3}T_2 - \tfrac{1}{3}T_1 \\
= \quad & \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{b-a}{4}[f(a) + 2f(\tfrac{a+b}{2}) + f(b)] - \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] \\
= \quad & \tfrac{b-a}{6}[f(a) + 4f(\tfrac{a+b}{2}) + f(b)] \\
= \quad & S_1
\end{aligned}$$

Romberg算法

$$I - T_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] \Rightarrow \frac{I - T_{2n}}{I - T_n} \approx \frac{1}{4}$$

实际上,

$$S_n = T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$$

例如,

$$\begin{aligned}
& T_2 + \tfrac{1}{3}(T_2 - T_1) = \tfrac{4}{3}T_2 - \tfrac{1}{3}T_1 \\
= \; & \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{b-a}{4}[f(a) + 2f(\tfrac{a+b}{2}) + f(b)] - \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] \\
= \; & \tfrac{b-a}{6}[f(a) + 4f(\tfrac{a+b}{2}) + f(b)] \\
= \; & S_1
\end{aligned}$$

加上修正部分使精度从梯形的$O(h^2)$提高到了抛物形的$O(h^4)$.

Romberg算法

$$I - T_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] \Rightarrow \frac{I - T_{2n}}{I - T_n} \approx \frac{1}{4}$$

实际上,

$$S_n = T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$$

从抛物形积分组合得到Cotes积分:

$$C_n = S_{2n} + \frac{1}{15}(S_{2n} - S_n)$$

Romberg算法

$$I - T_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] \Rightarrow \frac{I - T_{2n}}{I - T_n} \approx \frac{1}{4}$$

实际上,

$$S_n = T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$$

从抛物形积分组合得到Cotes积分:

$$C_n = S_{2n} + \frac{1}{15}(S_{2n} - S_n)$$

从Cotes积分组合得到Romberg积分:

$$R_n = C_{2n} + \frac{1}{63}(C_{2n} - C_n)$$

Romberg算法

$$I - T_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] \Rightarrow \frac{I - T_{2n}}{I - T_n} \approx \frac{1}{4}$$

实际上,

$$S_n = T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n) = \frac{4T_{2n} - T_n}{3}$$

从抛物形积分组合得到Cotes积分:

$$C_n = S_{2n} + \frac{1}{15}(S_{2n} - S_n) = \frac{16S_{2n} - S_n}{15}$$

从Cotes积分组合得到Romberg积分:

$$R_n = C_{2n} + \frac{1}{63}(C_{2n} - C_n) = \frac{64C_{2n} - C_n}{63}$$

Romberg算法: 例

例4.5 用Romberg算法求积分$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 要求精度$\varepsilon = 10^{-10}$.

Romberg算法: 例

例4.5 用Romberg算法求积分$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 要求精度$\varepsilon = 10^{-10}$.

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$

Romberg算法: 例

例4.5 用Romberg算法求积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 要求精度$\varepsilon=10^{-10}$.

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0				

Romberg算法: 例

例4.5 用Romberg算法求积分$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 要求精度$\varepsilon = 10^{-10}$.

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.9207355			

Romberg算法: 例

例4.5 用Romberg算法求积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 要求精度$\varepsilon=10^{-10}$.

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.9207355			
1				

Romberg算法: 例

例4.5 用Romberg算法求积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 要求精度$\varepsilon=10^{-10}$.

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.9207355			
1	0.9397933			

Romberg算法: 例

例4.5 用Romberg算法求积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 要求精度$\varepsilon=10^{-10}$.

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.9207355			
1	0.9397933	0.9461459		

Romberg算法: 例

例4.5 用Romberg算法求积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 要求精度$\varepsilon=10^{-10}$.

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.9207355			
1	0.9397933	0.9461459		
2				

Romberg算法: 例

例4.5 用Romberg算法求积分$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$, 要求精度$\varepsilon = 10^{-10}$.

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.9207355			
1	0.9397933	0.9461459		
2	0.9445135			

Romberg算法: 例

例4.5 用Romberg算法求积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 要求精度$\varepsilon=10^{-10}$.

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.9207355			
1	0.9397933	0.9461459		
2	0.9445135	0.9460869		

Romberg算法: 例

例4.5 用Romberg算法求积分$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$, 要求精度$\varepsilon = 10^{-10}$.

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.9207355			
1	0.9397933	0.9461459		
2	0.9445135	0.9460869	0.9460830	

Romberg算法: 例

例4.5 用Romberg算法求积分$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 要求精度$\varepsilon = 10^{-10}$.

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.9207355			
1	0.9397933	0.9461459		
2	0.9445135	0.9460869	0.9460830	
3				

Romberg算法: 例

例4.5 用Romberg算法求积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 要求精度$\varepsilon=10^{-10}$.

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.9207355			
1	0.9397933	0.9461459		
2	0.9445135	0.9460869	0.9460830	
3	0.9456909			

Romberg算法: 例

例4.5 用Romberg算法求积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 要求精度$\varepsilon=10^{-10}$.

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.9207355			
1	0.9397933	0.9461459		
2	0.9445135	0.9460869	0.9460830	
3	0.9456909	0.9460834		

Romberg算法: 例

例4.5 用Romberg算法求积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 要求精度$\varepsilon=10^{-10}$.

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.9207355			
1	0.9397933	0.9461459		
2	0.9445135	0.9460869	0.9460830	
3	0.9456909	0.9460834	0.9460831	

Romberg算法: 例

例4.5 用Romberg算法求积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 要求精度$\varepsilon=10^{-10}$.

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.9207355			
1	0.9397933	0.9461459		
2	0.9445135	0.9460869	0.9460830	
3	0.9456909	0.9460834	0.9460831	0.9460831

Gauss型求积公式

$$I = \int_a^b \rho(x) f(x) \mathrm{d}x$$

Gauss型求积公式

$$I=\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n}\omega_i f(x_i)$$

Gauss型求积公式

$$I = \int_a^b \rho(x) f(x) \mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$$

如何选择ω_i和x_i使代数精度达到最高?

Gauss型求积公式

例4.6 试确定ω_i和x_i使下面的求积公式有尽量高的代数精度:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$$

Gauss型求积公式

例4.6 试确定ω_i和x_i使下面的求积公式有尽量高的代数精度:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$$

假设$\omega_0, \omega_1 \neq 0, x_0 \neq x_1$.

Gauss型求积公式

例4.6 试确定ω_i和x_i使下面的求积公式有尽量高的代数精度:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$$

假设$\omega_0, \omega_1 \neq 0, x_0 \neq x_1$. 令$f(x) = 1, x, x^2, x^3$, 代入

Gauss型求积公式

例4.6 试确定ω_i和x_i使下面的求积公式有尽量高的代数精度:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$$

假设$\omega_0, \omega_1 \neq 0, x_0 \neq x_1$. 令$f(x) = 1, x, x^2, x^3$, 代入

$$\begin{cases} \omega_0 \quad + \omega_1 \quad = 2 \\ \omega_0 x_0 + \omega_1 x_1 = 0 \\ \omega_0 x_0^2 + \omega_1 x_1^2 = \frac{2}{3} \\ \omega_0 x_0^3 + \omega_1 x_1^3 = 0 \end{cases}$$

Gauss型求积公式

例4.6 试确定ω_i和x_i使下面的求积公式有尽量高的代数精度:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$$

假设$\omega_0, \omega_1 \neq 0, x_0 \neq x_1$. 令$f(x) = 1, x, x^2, x^3$, 代入

$$\left\{\begin{array}{l} \omega_0 \quad +\omega_1 \quad =2 \\ \omega_0 x_0 + \omega_1 x_1 = 0 \\ \omega_0 x_0^2 + \omega_1 x_1^2 = \frac{2}{3} \\ \omega_0 x_0^3 + \omega_1 x_1^3 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \omega_0 = \frac{2x_1}{x_1 - x_0} \\ \omega_1 = \frac{-2x_0}{x_1 - x_0} \end{array}\right.$$

Gauss型求积公式

例4.6 试确定ω_i和x_i使下面的求积公式有尽量高的代数精度:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$$

假设$\omega_0, \omega_1 \neq 0, x_0 \neq x_1$. 令$f(x) = 1, x, x^2, x^3$, 代入

$$\left\{\begin{array}{llll} \omega_0 & +\omega_1 & =2 \\ \omega_0 x_0 & +\omega_1 x_1 & =0 \\ \omega_0 x_0^2 & +\omega_1 x_1^2 & =\frac{2}{3} \\ \omega_0 x_0^3 & +\omega_1 x_1^3 & =0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \omega_0 = \frac{2x_1}{x_1-x_0} \\ \omega_1 = \frac{-2x_0}{x_1-x_0} \end{array}\right. \\ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \omega_0 x_0^2 = \frac{2/3x_1}{x_1-x_0} \\ \omega_1 x_1^2 = \frac{-2/3x_0}{x_1-x_0} \end{array}\right. \end{array}$$

Gauss型求积公式

例4.6 试确定ω_i和x_i使下面的求积公式有尽量高的代数精度:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$$

假设$\omega_0, \omega_1 \neq 0, x_0 \neq x_1$. 令$f(x) = 1, x, x^2, x^3$, 代入

$$\left\{\begin{array}{l} \omega_0 \quad + \omega_1 \quad = 2 \\ \omega_0 x_0 + \omega_1 x_1 = 0 \\ \omega_0 x_0^2 + \omega_1 x_1^2 = \frac{2}{3} \\ \omega_0 x_0^3 + \omega_1 x_1^3 = 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \omega_0 = \frac{2x_1}{x_1 - x_0} \\ \omega_1 = \frac{-2x_0}{x_1 - x_0} \end{array}\right. \\ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \omega_0 x_0^2 = \frac{2/3 x_1}{x_1 - x_0} \\ \omega_1 x_1^2 = \frac{-2/3 x_0}{x_1 - x_0} \end{array}\right. \end{array} \Rightarrow x_0^2 = x_1^2 = \frac{1}{3}$$

Gauss型求积公式

例4.6 试确定ω_i和x_i使下面的求积公式有尽量高的代数精度:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$$

假设$\omega_0, \omega_1 \neq 0, x_0 \neq x_1$. 令$f(x) = 1, x, x^2, x^3$, 代入

$$\left\{\begin{array}{l} \omega_0 \quad +\omega_1 \quad =2 \\ \omega_0 x_0 + \omega_1 x_1 = 0 \\ \omega_0 x_0^2 + \omega_1 x_1^2 = \frac{2}{3} \\ \omega_0 x_0^3 + \omega_1 x_1^3 = 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \omega_0 = \frac{2x_1}{x_1 - x_0} \\ \omega_1 = \frac{-2x_0}{x_1 - x_0} \end{array}\right. \\ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \omega_0 x_0^2 = \frac{2/3x_1}{x_1 - x_0} \\ \omega_1 x_1^2 = \frac{-2/3x_0}{x_1 - x_0} \end{array}\right. \end{array} \Rightarrow x_0^2 = x_1^2 = \frac{1}{3}$$

因此,

$$x_0 = -x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \omega_0 = \omega_1 = 1.$$

Gauss型求积公式

定理4.5 $n+1$个节点的插值型求积公式

$$\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$$

的代数精度不超过$2n+1$.

Gauss型求积公式

定理4.5 $n+1$个节点的插值型求积公式

$$\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$$

的代数精度不超过$2n+1$.

证明:

Gauss型求积公式

定理4.5 $n+1$个节点的插值型求积公式

$$\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$$

的代数精度不超过$2n+1$.

证明: 令$f(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2$, 则$f(x)$是$2n+2$次的多项式。

$$\sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i) = 0 \quad \int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \rho(x)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2\mathrm{d}x > 0,$$

Gauss型求积公式

定理4.5 $n+1$个节点的插值型求积公式

$$\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$$

的代数精度不超过$2n+1$.

证明: 令$f(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2$, 则$f(x)$是$2n+2$次的多项式。

$$\sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i) = 0 \neq \int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \rho(x)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2\mathrm{d}x > 0,$$

Gauss型求积公式

定理4.5 $n+1$个节点的插值型求积公式

$$\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$$

的代数精度不超过$2n+1$.

证明: 令$f(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2$, 则$f(x)$是$2n+2$次的多项式。

$$\sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i) = 0 \neq \int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \rho(x)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2\mathrm{d}x > 0,$$

该积分公式的代数精度不可能达到$2n+2$.

Gauss型求积公式

定义4.3 若节点$x_i \in [a,b]$及求积系数ω_i, 使求积公式

$$\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$$

的代数精度为$2n+1$, 则称节点x_i为高斯点, ω_i为高斯系数, 并称求积公式为高斯求积公式。

Gauss型求积公式

定义4.3 若节点$x_i \in [a,b]$及求积系数ω_i, 使求积公式

$$\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$$

的代数精度为$2n+1$, 则称节点x_i为高斯点, ω_i为高斯系数, 并称求积公式为高斯求积公式。

定理4.4 x_i是高斯点的充要条件是$\Pi(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$与任意次数不超过$n$的多项式$p(x)$关于权$\rho(x)$正交,

$$\int_a^b \rho(x)\Pi(x)p(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Gauss型求积公式

必要性:

Gauss型求积公式

必要性：因为$\Pi(x)p(x)$次数不超过$2n+1$,

Gauss型求积公式

必要性：因为$\Pi(x)p(x)$次数不超过$2n+1$,

$$\int_a^b \rho(x)\Pi(x)p(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i \Pi(x_i)p(x_i) = 0.$$

Gauss型求积公式

必要性：因为$\Pi(x)p(x)$次数不超过$2n+1$,

$$\int_a^b \rho(x)\Pi(x)p(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i \Pi(x_i)p(x_i) = 0.$$

充分性:

Gauss型求积公式

必要性：因为$\Pi(x)p(x)$次数不超过$2n+1$，

$$\int_a^b \rho(x)\Pi(x)p(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i \Pi(x_i)p(x_i) = 0.$$

充分性：对于任意给定的次数不超过$2n+1$次的多项式$f(x)$，

$$f(x) = q(x)\Pi(x) + r(x),$$

其中$q(x), r(x)$次数不超过n.

Gauss型求积公式

必要性：因为$\Pi(x)p(x)$次数不超过$2n+1$,

$$\int_a^b \rho(x)\Pi(x)p(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i \Pi(x_i)p(x_i) = 0.$$

充分性：对于任意给定的次数不超过$2n+1$次的多项式$f(x)$,

$$f(x) = q(x)\Pi(x) + r(x),$$

其中$q(x), r(x)$次数不超过n. 令$\omega_i = \int_a^b \rho(x) l_i(x)\mathrm{d}x$.

Gauss型求积公式

必要性：因为$\Pi(x)p(x)$次数不超过$2n+1$，

$$\int_a^b \rho(x)\Pi(x)p(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i \Pi(x_i)p(x_i) = 0.$$

充分性：对于任意给定的次数不超过$2n+1$次的多项式$f(x)$，

$$f(x) = q(x)\Pi(x) + r(x),$$

其中$q(x), r(x)$次数不超过n. 令$\omega_i = \int_a^b \rho(x)l_i(x)\mathrm{d}x$.

$$\int_a^b \rho(x)r(x)\mathrm{d}x$$

Gauss型求积公式

必要性：因为$\Pi(x)p(x)$次数不超过$2n+1$,

$$\int_a^b \rho(x)\Pi(x)p(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i \Pi(x_i)p(x_i) = 0.$$

充分性：对于任意给定的次数不超过$2n+1$次的多项式$f(x)$,

$$f(x) = q(x)\Pi(x) + r(x),$$

其中$q(x), r(x)$次数不超过n. 令$\omega_i = \int_a^b \rho(x) l_i(x)\mathrm{d}x$.

$$\int_a^b \rho(x)r(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \rho(x)\sum_{i=0}^{n} r(x_i)l_i(x)\mathrm{d}x$$

Gauss型求积公式

必要性：因为$\Pi(x)p(x)$次数不超过$2n+1$,

$$\int_a^b \rho(x)\Pi(x)p(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i \Pi(x_i)p(x_i) = 0.$$

充分性：对于任意给定的次数不超过$2n+1$次的多项式$f(x)$,

$$f(x) = q(x)\Pi(x) + r(x),$$

其中$q(x), r(x)$次数不超过n. 令$\omega_i = \int_a^b \rho(x)l_i(x)\mathrm{d}x$.

$$\int_a^b \rho(x)r(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} r(x_i)\int_a^b \rho(x)l_i(x)\mathrm{d}x$$

Gauss型求积公式

必要性：因为$\Pi(x)p(x)$次数不超过$2n+1$，

$$\int_a^b \rho(x)\Pi(x)p(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i \Pi(x_i)p(x_i) = 0.$$

充分性：对于任意给定的次数不超过$2n+1$次的多项式$f(x)$，

$$f(x) = q(x)\Pi(x) + r(x),$$

其中$q(x), r(x)$次数不超过n. 令$\omega_i = \int_a^b \rho(x)l_i(x)\mathrm{d}x$.

$$\int_a^b \rho(x)r(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} r(x_i)\int_a^b \rho(x)l_i(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i r(x_i)$$

Gauss型求积公式

必要性：因为$\Pi(x)p(x)$次数不超过$2n+1$,

$$\int_a^b \rho(x)\Pi(x)p(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i \Pi(x_i)p(x_i) = 0.$$

充分性：对于任意给定的次数不超过$2n+1$次的多项式$f(x)$,

$$f(x) = q(x)\Pi(x) + r(x),$$

其中$q(x), r(x)$次数不超过n. 令$\omega_i = \int_a^b \rho(x)l_i(x)\mathrm{d}x$.

$$\int_a^b \rho(x)r(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} r(x_i)\int_a^b \rho(x)l_i(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i r(x_i)$$

$$\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x$$

Gauss型求积公式

必要性：因为$\Pi(x)p(x)$次数不超过$2n+1$,

$$\int_a^b \rho(x)\Pi(x)p(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i \Pi(x_i)p(x_i) = 0.$$

充分性：对于任意给定的次数不超过$2n+1$次的多项式$f(x)$,

$$f(x) = q(x)\Pi(x) + r(x),$$

其中$q(x)$, $r(x)$次数不超过n. 令$\omega_i = \int_a^b \rho(x) l_i(x)\mathrm{d}x$.

$$\int_a^b \rho(x)r(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} r(x_i)\int_a^b \rho(x)l_i(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i r(x_i)$$

$$\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \rho(x)\Pi(x)p(x)\mathrm{d}x + \int_a^b \rho(x)r(x)\mathrm{d}x$$

Gauss型求积公式

必要性：因为$\Pi(x)p(x)$次数不超过$2n+1$,

$$\int_a^b \rho(x)\Pi(x)p(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i \Pi(x_i)p(x_i) = 0.$$

充分性：对于任意给定的次数不超过$2n+1$次的多项式$f(x)$,

$$f(x) = q(x)\Pi(x) + r(x),$$

其中$q(x), r(x)$次数不超过n. 令$\omega_i = \int_a^b \rho(x)l_i(x)\mathrm{d}x$.

$$\int_a^b \rho(x)r(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} r(x_i)\int_a^b \rho(x)l_i(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i r(x_i)$$

$$\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \rho(x)r(x)\mathrm{d}x$$

Gauss型求积公式

必要性：因为$\Pi(x)p(x)$次数不超过$2n+1$,

$$\int_a^b \rho(x)\Pi(x)p(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i \Pi(x_i)p(x_i) = 0.$$

充分性：对于任意给定的次数不超过$2n+1$次的多项式$f(x)$,

$$f(x) = q(x)\Pi(x) + r(x),$$

其中$q(x), r(x)$次数不超过n. 令$\omega_i = \int_a^b \rho(x)l_i(x)\mathrm{d}x$.

$$\int_a^b \rho(x)r(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} r(x_i)\int_a^b \rho(x)l_i(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i r(x_i)$$

$$\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \rho(x)r(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i r(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$$

Gauss型求积公式

令$f(x) = l_j^2(x)$为$2n$次多项式, 因此Gauss积分精确成立。

Gauss型求积公式

令$f(x)=l_j^2(x)$为$2n$次多项式, 因此Gauss积分精确成立。

$$\int_a^b \rho(x) l_j^2(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^n \omega_i l_j^2(x_i)=\omega_j>0.$$

Gauss型求积公式

令$f(x) = l_j^2(x)$为$2n$次多项式, 因此Gauss积分精确成立。

$$\int_a^b \rho(x) l_j(x) \mathrm{d}x = \int_a^b \rho(x) l_j^2(x) \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i l_j^2(x_i) = \omega_j > 0.$$

Gauss型求积公式

令$f(x) = l_j^2(x)$为$2n$次多项式, 因此Gauss积分精确成立。

$$\int_a^b \rho(x) l_j(x) \mathrm{d}x = \int_a^b \rho(x) l_j^2(x) \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i l_j^2(x_i) = \omega_j > 0.$$

定理4.6 设a, b为有限数, 则对任意的函数$f(x) \in C[a, b]$, 高斯求积公式均收敛, 即

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i) = \int_a^b \rho(x) f(x) \mathrm{d}x.$$

Gauss-Legendre公式

定理4.7 若$f(x) \in C^{2n+2}$, 则高斯-勒让德公式的余项为

$$R[f] = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \int_a^b \Pi^2(x)\mathrm{d}x,$$

$\eta \in (a, b)$.

Gauss-Legendre公式

定理4.7 若 $f(x) \in C^{2n+2}$, 则高斯-勒让德公式的余项为

$$R[f] = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \int_a^b \Pi^2(x)\mathrm{d}x,$$

$\eta \in (a, b)$.

几个常见的Gauss-Legendre公式

Gauss-Legendre公式

定理4.7 若$f(x) \in C^{2n+2}$, 则高斯-勒让德公式的余项为

$$R[f] = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \int_a^b \Pi^2(x)\mathrm{d}x,$$

$\eta \in (a, b)$.

几个常见的Gauss-Legendre公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 2f(0)$$

Gauss-Legendre公式

定理4.7 若$f(x) \in C^{2n+2}$, 则高斯-勒让德公式的余项为

$$R[f] = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \int_a^b \Pi^2(x)\mathrm{d}x,$$

$\eta \in (a, b)$.

几个常见的Gauss-Legendre公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 2f(0)$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3})$$

Gauss-Legendre公式

定理4.7 若$f(x) \in C^{2n+2}$, 则高斯-勒让德公式的余项为

$$R[f] = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \int_a^b \Pi^2(x)\mathrm{d}x,$$

$\eta \in (a, b)$.

几个常见的Gauss-Legendre公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 2f(0)$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3})$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{5}{9}f(-\frac{\sqrt{15}}{5}) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f(\frac{\sqrt{15}}{5})$$

Gauss-Legendre公式

例4.7 用高斯-勒让德公式计算积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

Gauss-Legendre公式

例4.7 用高斯-勒让德公式计算积分$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x.$

解:

Gauss-Legendre公式

例4.7 用高斯-勒让德公式计算积分$I=\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$

解: 先作变换$x=\frac{1}{2}(t+1)$, 则积分区间$[0,1]$化为$[-1,1]$, 且

Gauss-Legendre公式

例4.7 用高斯-勒让德公式计算积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

解: 先作变换$x=\frac{1}{2}(t+1)$, 则积分区间$[0,1]$化为$[-1,1]$, 且

$$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 \frac{\sin\frac{1}{2}(t+1)}{t+1}\mathrm{d}t.$$

Gauss-Legendre公式

例4.7 用高斯-勒让德公式计算积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

解: 先作变换$x=\frac{1}{2}(t+1)$, 则积分区间$[0,1]$化为$[-1,1]$, 且

$$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 \frac{\sin\frac{1}{2}(t+1)}{t+1}\mathrm{d}t.$$

用两点高斯-勒让德公式, 得

$$I\approx \frac{\sin\frac{1}{2}(-0.5773503+1)}{-0.5773503+1}+\frac{\sin\frac{1}{2}(0.5773503+1)}{0.5773503+1}$$

Gauss-Legendre公式

例4.7 用高斯-勒让德公式计算积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

解: 先作变换$x=\frac{1}{2}(t+1)$, 则积分区间$[0,1]$化为$[-1,1]$, 且

$$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 \frac{\sin\frac{1}{2}(t+1)}{t+1}\mathrm{d}t.$$

用两点高斯-勒让德公式, 得

$$I\approx\frac{\sin\frac{1}{2}(-0.5773503+1)}{-0.5773503+1}+\frac{\sin\frac{1}{2}(0.5773503+1)}{0.5773503+1}=0.9460411.$$

Gauss-Legendre公式

例4.7 用高斯-勒让德公式计算积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$

解: 先作变换$x=\frac{1}{2}(t+1)$, 则积分区间$[0,1]$化为$[-1,1]$, 且

$$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 \frac{\sin\frac{1}{2}(t+1)}{t+1}\mathrm{d}t.$$

用两点高斯-勒让德公式, 得

$$I\approx \frac{\sin\frac{1}{2}(-0.5773503+1)}{-0.5773503+1}+\frac{\sin\frac{1}{2}(0.5773503+1)}{0.5773503+1}=0.9460411.$$

用三点高斯-勒让德公式, 得

$$I\approx \frac{5}{9}\frac{\sin\frac{1}{2}(-0.7745967+1)}{-0.7745967+1}+\frac{8}{9}\frac{\sin\frac{1}{2}}{0+1}+\frac{5}{9}\frac{\sin\frac{1}{2}(0.7745967+1)}{0.7745967+1}$$

Gauss-Legendre公式

例4.7 用高斯-勒让德公式计算积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$

解: 先作变换$x=\frac{1}{2}(t+1)$, 则积分区间$[0,1]$化为$[-1,1]$, 且

$$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 \frac{\sin\frac{1}{2}(t+1)}{t+1}\mathrm{d}t.$$

用两点高斯-勒让德公式, 得

$$I\approx \frac{\sin\frac{1}{2}(-0.5773503+1)}{-0.5773503+1}+\frac{\sin\frac{1}{2}(0.5773503+1)}{0.5773503+1}=0.9460411.$$

用三点高斯-勒让德公式, 得

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{5}{9}\frac{\sin\frac{1}{2}(-0.7745967+1)}{-0.7745967+1}+\frac{8}{9}\frac{\sin\frac{1}{2}}{0+1}+\frac{5}{9}\frac{\sin\frac{1}{2}(0.7745967+1)}{0.7745967+1} \\ &= 0.9460831. \end{aligned}$$

Gauss-Legendre公式

定理4.8 (1)(Gauss-Radau-Legendre积分公式)设$f(x)$ $\in C^{2n+1}[-1,1]$, 则存在高斯点x_i和高斯系数ω_i, 使得

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \omega_0 f(-1) + \sum_{i=1}^{n} \omega_i f(x_i) + \frac{2^{2n+1}(n+1)!(n!)^4}{[(2n+1)!]^3} f^{(2n+1)}(\xi);$$

(2)(Gauss-Lobatto-Legendre积分公式)
设$f(x) \in C^{2n}[-1,1]$, 则存在高斯点x_i和高斯系数ω_i, 使得

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \; & \omega_0 f(-1) + \omega_n f(1) + \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i f(x_i) \\ - \; & \frac{n^3(n+1)2^{2n+1}[(n-1)!]^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi). \end{aligned}$$

Gauss-Legendre公式

定理4.9 (1)Gauss-Legendre公式的节点x_i是$n+1$次Legendre多项式$P_{n+1}(x)$的零点, 系数ω_i为

$$\omega_i = \frac{2}{(1-x_i)^2[P'_{n+1}(x_i)]^2}, \quad (i=1,\cdots,n).$$

(2)Gauss-Radau-Legendre公式的节点x_i为: $x_0=-1$, $x_i(i=1,\cdots,n)$为$P_n(x)+P_{n+1}(x)$的零点, 系数ω_i为:

$$\omega_0 = \frac{1}{(n+1)^2}, \quad \omega_i = \frac{1}{(n+1)^2}\frac{1-x_i}{[P_n(x_i)]^2}, \quad (i=1,\cdots,n).$$

(3)Gauss-Lobatto-Legendre公式的节点x_i为: $x_0=-1$, $x_n=1$, $x_i(i=1,\cdots,n-1)$为$P'_n(x)$的零点, 系数ω_i为

$$\omega_0=\omega_n=\frac{2}{n(n+1)}, \quad \omega_i = \frac{2}{n(n+1)}\frac{1}{[P_n(x_i)]^2}, \quad (i=1,\cdots,n-1).$$

Gauss-Chebyshev求积公式

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/2}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n}\omega_i f(x_i)$$

Gauss-Chebyshev求积公式

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/2}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n}\omega_i f(x_i)$$

x_i是$T_{n+1}(x)$的根,

Gauss-Chebyshev求积公式

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/2}f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n}\omega_i f(x_i)$$

x_i是$T_{n+1}(x)$的根，$x_i = \cos\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}$，

Gauss-Chebyshev求积公式

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/2}f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n}\omega_i f(x_i)$$

x_i是$T_{n+1}(x)$的根，$x_i = \cos\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}$，$\omega_i = \frac{\pi}{n+1}$.

Gauss-Chebyshev求积公式

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/2}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n}\omega_i f(x_i)$$

x_i是$T_{n+1}(x)$的根，$x_i=\cos\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}$，$\omega_i=\frac{\pi}{n+1}$. 余项

$$\begin{aligned}R[f]= &\ \textstyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/2}f(x)\mathrm{d}x-\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\omega_i f(x_i)\\ = &\ \frac{2\pi}{2^{2n+2}(2n+2)!}f^{(2n)}(\eta),\quad \eta\in(-1,1).\end{aligned}$$

Gauss-Chebyshev求积公式

例4.8 用Gauss-Chebyshev求积公式计算积分

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x,$$

要求误差不超过10^{-6}.

Gauss-Chebyshev求积公式

例4.8 用Gauss-Chebyshev求积公式计算积分

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x,$$

要求误差不超过10^{-6}.

解:

Gauss-Chebyshev求积公式

例4.8 用Gauss-Chebyshev求积公式计算积分

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x,$$

要求误差不超过10^{-6}.

解: 由误差公式

$$|R[f]|=\frac{2\pi}{2^{2n+2}(2n+2)!}\mathrm{e}^{\eta}\leq\frac{2\mathrm{e}\pi}{2^{2n+2}(2n+2)!}.$$

Gauss-Chebyshev求积公式

例4.8 用Gauss-Chebyshev求积公式计算积分

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x,$$

要求误差不超过10^{-6}.

解: 由误差公式

$$|R[f]|=\frac{2\pi}{2^{2n+2}(2n+2)!}\mathrm{e}^{\eta}\le\frac{2\mathrm{e}\pi}{2^{2n+2}(2n+2)!}.$$

$n=3$时, $|R[f]|\le 1.66\times 10^{-6}$;

Gauss-Chebyshev求积公式

例4.8 用Gauss-Chebyshev求积公式计算积分

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x,$$

要求误差不超过10^{-6}.

解: 由误差公式

$$|R[f]| = \frac{2\pi}{2^{2n+2}(2n+2)!} \mathrm{e}^{\eta} \leq \frac{2\mathrm{e}\pi}{2^{2n+2}(2n+2)!}.$$

$n = 3$时, $|R[f]| \leq 1.66 \times 10^{-6}$; $n = 4$时, $|R[f]| \leq 4.6 \times 10^{-9}$.

Gauss-Chebyshev求积公式

例4.8 用Gauss-Chebyshev求积公式计算积分

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x,$$

要求误差不超过10^{-6}.

解: 由误差公式

$$|R[f]| = \frac{2\pi}{2^{2n+2}(2n+2)!}\mathrm{e}^{\eta} \le \frac{2\mathrm{e}\pi}{2^{2n+2}(2n+2)!}.$$

$n=3$时, $|R[f]| \le 1.66\times 10^{-6}$; $n=4$时, $|R[f]| \le 4.6\times 10^{-9}$.
令$n=4$, 求得

$$I \approx \frac{\pi}{5}\sum_{i=0}^{4} \exp[\cos\frac{2i+1}{10}\pi] = 3.977463.$$

Gauss-Chebyshev求积公式

定理4.10 (1)Gauss-Chebyshev公式中

$$x_i = \cos\frac{2i+1}{2n+2}\pi, \quad \omega_i = \frac{\pi}{n+1}, \quad (i = 0, 1, \cdots, n).$$

Gauss-Chebyshev求积公式

定理4.10 (1)Gauss-Chebyshev公式中

$$x_i = \cos\frac{2i+1}{2n+2}\pi, \quad \omega_i = \frac{\pi}{n+1}, \quad (i = 0, 1, \cdots, n).$$

(2)Gauss-Radau-Chebyshev公式

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/2}f(x)\mathrm{d}x = \omega_0 f(x_0) + \sum_{i=1}^{n}\omega_i f(x_i),$$

$$x_0 = 1, \qquad x_i = \cos\tfrac{2i\pi}{2n+1}, \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\omega_0 = \tfrac{\pi}{2n+1}, \quad \omega_i = \tfrac{2\pi}{2n+1}, \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Gauss-Chebyshev求积公式

定理4.10 (1)Gauss-Chebyshev公式中

$$x_i = \cos\frac{2i+1}{2n+2}\pi, \quad \omega_i = \frac{\pi}{n+1}, \quad (i = 0, 1, \cdots, n).$$

(2)Gauss-Radau-Chebyshev公式

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/2}f(x)\mathrm{d}x = \omega_0 f(x_0) + \sum_{i=1}^{n}\omega_i f(x_i),$$

$$x_0 = 1, \qquad x_i = \cos\tfrac{2i\pi}{2n+1}, \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\omega_0 = \tfrac{\pi}{2n+1}, \quad \omega_i = \tfrac{2\pi}{2n+1}, \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

(3)Gauss-Lobatto-Chebyshev公式

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/2}f(x)\mathrm{d}x = \omega_0 f(x_0) + \omega_n f(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1}\omega_i f(x_i),$$

$$x_0 = -x_n = 1, \quad x_i = \cos\tfrac{i\pi}{n}, \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

$$\omega_0 = \omega_n = \tfrac{\pi}{2n}, \quad \omega_i = \tfrac{\pi}{n}, \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1).$$

Gauss-Chebyshev求积公式

例4.9 试分别用Gauss-Chebyshev公式和Gauss-Lobatto-Chebyshev公式计算积分

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{(1+x)^{3/2}}{(1-x^2)^{1/2}} \mathrm{d}x.$$

Gauss-Chebyshev求积公式

例4.9 试分别用Gauss-Chebyshev公式和Gauss-Lobatto -Chebyshev公式计算积分

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{(1+x)^{3/2}}{(1-x^2)^{1/2}}\mathrm{d}x.$$

n	2	4	10	16
GC误差	1.9×10^{-2}	1.0×10^{-3}	2.5×10^{-5}	3.8×10^{-6}
GLC误差	-2.1×10^{-2}	-1.2×10^{-3}	-2.9×10^{-5}	-4.4×10^{-6}

Gauss-Chebyshev求积公式

例4.9 试分别用Gauss-Chebyshev公式和Gauss-Lobatto-Chebyshev公式计算积分

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{(1+x)^{3/2}}{(1-x^2)^{1/2}}\mathrm{d}x.$$

n	2	4	10	16
GC误差	1.9×10^{-2}	1.0×10^{-3}	2.5×10^{-5}	3.8×10^{-6}
GLC误差	-2.1×10^{-2}	-1.2×10^{-3}	-2.9×10^{-5}	-4.4×10^{-6}

真值$I=\frac{8}{3}\sqrt{2}$.

无穷区间上的求积公式

定理4.11 (1)Gauss-Laguerre公式: 设x_i为$n+1$次Laguerre多项式$L_{n+1}(x)$的零点, $\omega_i = \frac{x_i}{(n+2)^2 L_{n+2}^2(x_i)}$, $(i = 0, 1, \cdots, n)$, 存在$\eta \in (0, \infty)$,

$$R[f] = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} f(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i) = \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\eta).$$

无穷区间上的求积公式

定理4.11 (1)Gauss-Laguerre公式: 设x_i为$n+1$次Laguerre多项式$L_{n+1}(x)$的零点, $\omega_i = \frac{x_i}{(n+2)^2 L_{n+2}^2(x_i)}$, $(i=0,1,\cdots,n)$, 存在$\eta \in (0,\infty)$,

$$R[f] = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x} f(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i) = \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\eta).$$

(2)Gauss-Radau-Laguerre公式: 设$x_0 = 0$, $x_i(i=1,2,\cdots,n)$为$L'_{n+1}(x)$的n个零点, $\omega_0 = \frac{2}{n+1}$, $\omega_i = \frac{1}{nL_n^2(x_i)}$, $(i=1,2,\cdots,n)$, 存在$\eta \in (0,\infty)$,

$$R[f] = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x} f(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i) = \frac{n!(n+1)!}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(\eta).$$

无穷区间上的求积公式

例4.10 用Gauss-Laguerre求积公式计算积分

$$I = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x} \sin x \mathrm{d}x.$$

无穷区间上的求积公式

例4.10 用Gauss-Laguerre求积公式计算积分

$$I = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x} \sin x \mathrm{d}x.$$

Gauss点数	4	8	16
计算值	0.502275	0.500314	0.500000

无穷区间上的求积公式

Gauss-Hermite求积公式

无穷区间上的求积公式

Gauss-Hermite求积公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$$

无穷区间上的求积公式

Gauss-Hermite求积公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$$

其中$x_i(i = 0, 1, \cdots, n)$为$n + 1$次Hermite多项式$H_{n+1}(x)$的零点,

$$\omega_i = \frac{2^n (n+1)!\sqrt{\pi}}{n^2[H_n(x_i)]^2}, \quad (i = 0, 1, \cdots, n),$$

余项为

$$R[f] = \frac{(n+1)!\sqrt{\pi}}{2^{n+1}(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\eta), \quad \eta \in (-\infty, +\infty).$$

无穷区间上的求积公式

例4.11 用五点Gauss-Hermite公式计算下面的积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \cos x \, \mathrm{d}x.$$

无穷区间上的求积公式

例4.11 用五点Gauss-Hermite公式计算下面的积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \cos x \mathrm{d}x.$$

解:

无穷区间上的求积公式

例4.11 用五点Gauss-Hermite公式计算下面的积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos x \, dx.$$

解: 利用公式及表4-9, 我们有

$$\begin{aligned} I &\approx \omega_2 \cos x_2 + 2(\omega_3 \cos x_3 + \omega_4 \cos x_4) \\ &= 0.945309 + 2 \times (0.393619 \times 0.574689 \\ &\qquad -0.019953 \times 0.434413) \\ &= 1.380390. \end{aligned}$$

无穷区间上的求积公式

定理4.12 设$f(x) \in C[0, \infty)$, 若存在$\varepsilon > 0$, 使得

$$|f(x)| \le c\frac{\mathrm{e}^x}{x^{1+\varepsilon}},$$

对充分大的x成立, 则对于Gauss-Laguerre公式, 有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\omega_i f(x_i) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} f(x)\mathrm{d}x.$$

无穷区间上的求积公式

定理4.12 设$f(x) \in C[0,\infty)$, 若存在$\varepsilon > 0$, 使得

$$|f(x)| \le c\frac{\mathrm{e}^{x}}{x^{1+\varepsilon}},$$

对充分大的x成立, 则对于Gauss-Laguerre公式, 有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\omega_i f(x_i) = \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}f(x)\mathrm{d}x.$$

定理4.13 设$f(x) \in C(-\infty,\infty)$, 若存在$\varepsilon > 0$, 使得

$$|f(x)| \le c\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^{1+\varepsilon}},$$

对充分大的$|x|$成立, 则对于Gauss-Hermite公式, 有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\omega_i f(x_i) = \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}f(x)\mathrm{d}x.$$

无穷区间上的求积公式

例4.12 构造形如

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) \mathrm{d}x = \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$$

的高斯公式。

无穷区间上的求积公式

例4.12 构造形如

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) \mathrm{d}x = \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$$

的高斯公式。

解:

无穷区间上的求积公式

例4.12 构造形如

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) \mathrm{d}x = \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$$

的高斯公式。

解: 分别取$f(x) = 1, x, x^2, x^3$使积分公式精确成立,得

无穷区间上的求积公式

例4.12 构造形如

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\mathrm{d}x = \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$$

的高斯公式。

解: 分别取$f(x) = 1, x, x^2, x^3$使积分公式精确成立,得

$$\begin{cases} \omega_0 + \quad \omega_1 = \frac{2}{3} \\ x_0\omega_0 + x_1\omega_1 = \frac{2}{5} \\ x_0^2\omega_0 + x_1^2\omega_1 = \frac{2}{7} \\ x_0^3\omega_0 + x_1^3\omega_1 = \frac{2}{9} \end{cases}$$

无穷区间上的求积公式

例4.12 构造形如

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) \mathrm{d}x = \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$$

的高斯公式。

解: 分别取$f(x) = 1, x, x^2, x^3$使积分公式精确成立,得

$$\begin{cases} \omega_0 + \quad \omega_1 = \frac{2}{3} \\ x_0\omega_0 + x_1\omega_1 = \frac{2}{5} \\ x_0^2\omega_0 + x_1^2\omega_1 = \frac{2}{7} \\ x_0^3\omega_0 + x_1^3\omega_1 = \frac{2}{9} \end{cases}$$

每一式减去前一式乘x_0,

无穷区间上的求积公式

例4.12 构造形如

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) \mathrm{d}x = \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$$

的高斯公式。

解：分别取 $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ 使积分公式精确成立,得

$$\begin{cases} \omega_0 + \quad \omega_1 = \frac{2}{3} \\ x_0\omega_0 + x_1\omega_1 = \frac{2}{5} \\ x_0^2\omega_0 + x_1^2\omega_1 = \frac{2}{7} \\ x_0^3\omega_0 + x_1^3\omega_1 = \frac{2}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x_0 + (x_1 - x_0)\omega_1 = \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5}x_0 + (x_1 - x_0)x_1\omega_1 = \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7}x_0 + (x_1 - x_0)x_1^2\omega_1 = \frac{2}{9} \end{cases}$$

每一式减去前一式乘 x_0,

无穷区间上的求积公式

例4.12 构造形如

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\mathrm{d}x = \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$$

的高斯公式。

解: 分别取$f(x) = 1, x, x^2, x^3$使积分公式精确成立,得

$$\begin{cases} \omega_0 + \omega_1 = \frac{2}{3} \\ x_0\omega_0 + x_1\omega_1 = \frac{2}{5} \\ x_0^2\omega_0 + x_1^2\omega_1 = \frac{2}{7} \\ x_0^3\omega_0 + x_1^3\omega_1 = \frac{2}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x_0 + (x_1 - x_0)\omega_1 = \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5}x_0 + (x_1 - x_0)x_1\omega_1 = \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7}x_0 + (x_1 - x_0)x_1^2\omega_1 = \frac{2}{9} \end{cases}$$

每一式减去前一式乘x_0, 每一式减去前一式乘x_1,

无穷区间上的求积公式

例4.12 构造形如

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\mathrm{d}x = \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$$

的高斯公式。

解: 分别取$f(x) = 1, x, x^2, x^3$使积分公式精确成立,得

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x_0 + (x_1 - x_0)\omega_1 = \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5}x_0 + (x_1 - x_0)x_1\omega_1 = \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7}x_0 + (x_1 - x_0)x_1^2\omega_1 = \frac{2}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{5}x_0 + (\frac{2}{5} - \frac{2}{3}x_0)x_1 = \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7}x_0 + (\frac{2}{7} - \frac{2}{5}x_0)x_1 = \frac{2}{9} \end{cases}$$

每一式减去前一式乘x_0, 每一式减去前一式乘x_1,

无穷区间上的求积公式

例4.12 构造形如

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\mathrm{d}x = \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$$

的高斯公式。

解: 分别取$f(x) = 1, x, x^2, x^3$使积分公式精确成立,得

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x_0 + (x_1 - x_0)\omega_1 = \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5}x_0 + (x_1 - x_0)x_1\omega_1 = \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7}x_0 + (x_1 - x_0)x_1^2\omega_1 = \frac{2}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{5}x_0 + (\frac{2}{5} - \frac{2}{3}x_0)x_1 = \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7}x_0 + (\frac{2}{7} - \frac{2}{5}x_0)x_1 = \frac{2}{9} \end{cases}$$

每一式减去前一式乘x_0，每一式减去前一式乘x_1，整理,

无穷区间上的求积公式

例4.12 构造形如

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) \mathrm{d}x = \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$$

的高斯公式。

解: 分别取$f(x) = 1, x, x^2, x^3$使积分公式精确成立,得

$$\begin{cases} \frac{2}{5}x_0 + (\frac{2}{5} - \frac{2}{3}x_0)x_1 = \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7}x_0 + (\frac{2}{7} - \frac{2}{5}x_0)x_1 = \frac{2}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{5}(x_0 + x_1) - \frac{2}{3}x_0x_1 = \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7}(x_0 + x_1) - \frac{2}{5}x_0x_1 = \frac{2}{9} \end{cases}$$

每一式减去前一式乘x_0, 每一式减去前一式乘x_1, 整理,

无穷区间上的求积公式

例4.12 构造形如

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\mathrm{d}x = \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$$

的高斯公式。

解: 分别取$f(x) = 1, x, x^2, x^3$使积分公式精确成立,得

$$\begin{cases} \frac{2}{5}(x_0 + x_1) - \frac{2}{3}x_0x_1 = \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7}(x_0 + x_1) - \frac{2}{5}x_0x_1 = \frac{2}{9} \end{cases} \Rightarrow x_0x_1 = \frac{5}{21}, x_0 + x_1 = \frac{10}{9}.$$

每一式减去前一式乘x_0, 每一式减去前一式乘x_1, 整理,

无穷区间上的求积公式

例4.12 构造形如

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) \mathrm{d}x = \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$$

的高斯公式。

解: 分别取$f(x) = 1, x, x^2, x^3$使积分公式精确成立,得

$$\begin{cases} \frac{2}{5}(x_0 + x_1) - \frac{2}{3}x_0x_1 = \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7}(x_0 + x_1) - \frac{2}{5}x_0x_1 = \frac{2}{9} \end{cases} \Rightarrow x_0x_1 = \frac{5}{21}, x_0 + x_1 = \frac{10}{9}.$$

每一式减去前一式乘x_0, 每一式减去前一式乘x_1, 整理,
$x_0 = 0.289949, x_1 = 0.821162,$

无穷区间上的求积公式

例4.12 构造形如

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) \mathrm{d}x = \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$$

的高斯公式。

解: 分别取$f(x) = 1, x, x^2, x^3$使积分公式精确成立,得

$$\begin{cases} \frac{2}{5}(x_0 + x_1) - \frac{2}{3}x_0x_1 = \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7}(x_0 + x_1) - \frac{2}{5}x_0x_1 = \frac{2}{9} \end{cases} \Rightarrow x_0x_1 = \frac{5}{21}, x_0 + x_1 = \frac{10}{9}.$$

每一式减去前一式乘x_0, 每一式减去前一式乘x_1, 整理,

$x_0 = 0.289949, x_1 = 0.821162,\ \omega_0 = 0.277556, \omega_1 = 0.389111.$

无穷区间上的求积公式

例4.12 构造形如

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\mathrm{d}x = \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$$

的高斯公式。

解: 分别取$f(x) = 1, x, x^2, x^3$使积分公式精确成立,得

$$\begin{cases} \frac{2}{5}(x_0 + x_1) - \frac{2}{3}x_0 x_1 = \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7}(x_0 + x_1) - \frac{2}{5}x_0 x_1 = \frac{2}{9} \end{cases} \Rightarrow x_0 x_1 = \frac{5}{21}, x_0 + x_1 = \frac{10}{9}.$$

每一式减去前一式乘x_0, 每一式减去前一式乘x_1, 整理,

$x_0 = 0.289949$, $x_1 = 0.821162$, $\omega_0 = 0.277556$, $\omega_1 = 0.389111$.

也可以用Schmidt正交化方法求得正交多项式, 再求其零点

奇异积分的计算

分割奇异点方法

奇异积分的计算

分割奇异点方法

设$f(x)$在$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = b$的子区间$(a_i, a_{i+1})$上可导，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x$$

奇异积分的计算

分割奇异点方法

设$f(x)$在$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = b$的子区间$(a_i, a_{i+1})$上可导，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x$$

例

$$\int_{-1}^1 \frac{|\mathrm{e}^x - 1|}{1 + x^2}\mathrm{d}x$$

奇异积分的计算

分割奇异点方法

设$f(x)$在$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = b$的子区间$(a_i, a_{i+1})$上可导，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x$$

例

$$\int_{-1}^{1} \frac{|\mathrm{e}^x - 1|}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{1-\mathrm{e}^x}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

奇异积分的计算

分割奇异点方法

例4.13 计算积分$I=\int_{0.3}^{2}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}\mathrm{d}x$, 精确到0.05.

奇异积分的计算

分割奇异点方法

例4.13 计算积分$I=\int_{0.3}^{2}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}\mathrm{d}x$, 精确到0.05.

解:

奇异积分的计算

分割奇异点方法

例4.13 计算积分$I=\int_{0.3}^{2}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}\mathrm{d}x$, 精确到0.05.

解: 被积函数在$x=2$处不连续,

奇异积分的计算

分割奇异点方法

例4.13 计算积分$I=\int_{0.3}^{2}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}\mathrm{d}x$, 精确到0.05.

解: 被积函数在$x=2$处不连续,

$$I=\int_{0.3}^{2}\frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}=\left(\int_{0.3}^{2-\delta}+\int_{2-\delta}^{2}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}=I_1+I_2$$

奇异积分的计算

分割奇异点方法

例4.13 计算积分$I=\int_{0.3}^{2}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}\mathrm{d}x$, 精确到0.05.

解: 被积函数在$x=2$处不连续,

$$I=\int_{0.3}^{2}\frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}=\left(\int_{0.3}^{2-\delta}+\int_{2-\delta}^{2}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}=I_1+I_2$$

当$0<\delta\leq 0.1$时,

$$0<I_2<\frac{\mathrm{e}^{-1.9}}{\sqrt[4]{2.9}}\int_{2-\delta}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{2-x}}=0.153\delta^{3/4}<0.028.$$

奇异积分的计算

分割奇异点方法

例4.13 计算积分$I=\int_{0.3}^{2}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}\mathrm{d}x$, 精确到0.05.

解: 被积函数在$x=2$处不连续,

$$I=\int_{0.3}^{2}\frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}=\left(\int_{0.3}^{2-\delta}+\int_{2-\delta}^{2}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}=I_1+I_2$$

当$0<\delta\le 0.1$时,

$$0<I_2<\frac{\mathrm{e}^{-1.9}}{\sqrt[4]{2.9}}\int_{2-\delta}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{2-x}}=0.153\delta^{3/4}<0.028.$$

用变步长的Simpson公式求I_1: $h=0.8$时, $I_1\approx 0.519$; $h=0.4$时, $I_1\approx 0.513$.

奇异积分的计算

分割奇异点方法

例4.13 计算积分$I=\int_{0.3}^{2}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}\mathrm{d}x$, 精确到0.05.

解: 被积函数在$x=2$处不连续,

$$I=\int_{0.3}^{2}\frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}=\left(\int_{0.3}^{2-\delta}+\int_{2-\delta}^{2}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}=I_1+I_2$$

当$0<\delta\le 0.1$时,

$$0<I_2<\frac{\mathrm{e}^{-1.9}}{\sqrt[4]{2.9}}\int_{2-\delta}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{2-x}}=0.153\delta^{3/4}<0.028.$$

用变步长的Simpson公式求I_1: $h=0.8$时, $I_1\approx 0.519$; $h=0.4$时, $I_1\approx 0.513$. 利用Romberg公式, $I_1=\frac{16\times 0.513-0.519}{15}=0.5126$. 误差小于$|0.513-0.5126|=0.0004$.

$I=I_1+I_2=0.5126+0.014=0.5266.$

奇异积分的计算

分割奇异点方法

例4.13 计算积分$I=\int_{0.3}^{2}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}\mathrm{d}x$, 精确到0.05.

解: 被积函数在$x=2$处不连续,

$$I=\int_{0.3}^{2}\frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}=\left(\int_{0.3}^{2-\delta}+\int_{2-\delta}^{2}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}=I_1+I_2$$

当$0<\delta\le 0.1$时,

$$0<I_2<\frac{\mathrm{e}^{-1.9}}{\sqrt[4]{2.9}}\int_{2-\delta}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{2-x}}=0.153\delta^{3/4}<0.028.$$

用变步长的Simpson公式求I_1: $h=0.8$时, $I_1\approx 0.519$; $h=0.4$时, $I_1\approx 0.513$. 利用Romberg公式, $I_1=\frac{16\times 0.513-0.519}{15}=0.5126$. 误差小于$|0.513-0.5126|=0.0004$.

$I=I_1+I_2=0.5126+0.014=0.5266$. 真值$=0.53779327238365$.

奇异积分的计算

变量替换方法

奇异积分的计算

变量替换方法

$$I = \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$$

奇异积分的计算

变量替换方法

$$I = \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x \overset{t=\sqrt{x}}{=\!=\!=} 2\int_0^1 f(t^2)\mathrm{d}t$$

奇异积分的计算

变量替换方法

$$I = \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x \xlongequal{t=\sqrt{x}} 2\int_0^1 f(t^2) \mathrm{d}t$$

又例

$$I = \int_0^1 \sqrt{x} \sin x \mathrm{d}x$$

奇异积分的计算

变量替换方法

$$I=\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \xlongequal{t=\sqrt{x}} 2\int_0^1 f(t^2)\mathrm{d}t$$

又例

$$I=\int_0^1 \sqrt{x}\sin x\mathrm{d}x$$

二阶导数在$x=0$不连续

奇异积分的计算

变量替换方法

$$I=\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \xlongequal{t=\sqrt{x}} 2\int_0^1 f(t^2)\mathrm{d}t$$

又例

$$I=\int_0^1 \sqrt{x}\sin x\mathrm{d}x \xlongequal{t=\sqrt{x}} 2\int_0^1 t^2\sin t^2\mathrm{d}t$$

二阶导数在$x=0$不连续

奇异积分的计算

利用Gauss积分公式

奇异积分的计算

利用Gauss积分公式

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^4}} \mathrm{d}x$$

奇异积分的计算

利用Gauss积分公式

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x \xlongequal{\frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}=g(x)} \int_{-1}^{1}\frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

奇异积分的计算

利用Gauss积分公式

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x \xlongequal{\frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}=g(x)} \int_{-1}^{1}\frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n}\frac{\omega_i f(x_i)}{\sqrt{1+x_i^2}}$$

奇异积分的计算

利用Gauss积分公式

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x \xlongequal{\frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}=g(x)} \int_{-1}^{1}\frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n}\frac{\omega_i f(x_i)}{\sqrt{1+x_i^2}}$$

Gauss-Chebyshev公式

奇异积分的计算

利用Gauss积分公式

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^4}} \mathrm{d}x \xlongequal{\frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}=g(x)} \int_{-1}^{1} \frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega_i f(x_i)}{\sqrt{1+x_i^2}}$$

Gauss-Chebyshev公式

$$\int_{0}^{1} \ln \frac{1}{x} f(x) \mathrm{d}x$$

奇异积分的计算

利用Gauss积分公式

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x \xlongequal{\frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}=g(x)} \int_{-1}^{1}\frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n}\frac{\omega_i f(x_i)}{\sqrt{1+x_i^2}}$$

Gauss-Chebyshev公式

$$\int_0^1 \ln\frac{1}{x}f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=\mathrm{e}^{-t}} \int_0^{\infty} t\mathrm{e}^{-t}f(\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t$$

奇异积分的计算

利用Gauss积分公式

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x \xlongequal{\frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}=g(x)} \int_{-1}^{1}\frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n}\frac{\omega_i f(x_i)}{\sqrt{1+x_i^2}}$$

Gauss-Chebyshev公式

$$\int_{0}^{1}\ln\frac{1}{x}f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=\mathrm{e}^{-t}} \int_{0}^{\infty} t\mathrm{e}^{-t}f(\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i \mathrm{e}^{-x_i} f(\mathrm{e}^{-x_i})$$

奇异积分的计算

利用Gauss积分公式

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x \xlongequal{\frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}=g(x)} \int_{-1}^{1}\frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n}\frac{\omega_i f(x_i)}{\sqrt{1+x_i^2}}$$

Gauss-Chebyshev公式

$$\int_{0}^{1}\ln\frac{1}{x}f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=\mathrm{e}^{-t}} \int_{0}^{\infty}t\mathrm{e}^{-t}f(\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t=\sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i \mathrm{e}^{-x_i}f(\mathrm{e}^{-x_i})$$

Gauss-Laguerre公式

奇异积分的计算

无穷区间上的积分

奇异积分的计算

无穷区间上的积分

变换为有限的区间

奇异积分的计算

无穷区间上的积分

变换为有限的区间

$$\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$$

奇异积分的计算

无穷区间上的积分

变换为有限的区间

$$\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \overset{x=1/t}{=\!=\!=} \int_0^1 \frac{1}{t^2} f(\frac{1}{t})\mathrm{d}t$$

奇异积分的计算

无穷区间上的积分

变换为有限的区间

$$\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=1/t} \int_0^1 \frac{1}{t^2} f(\frac{1}{t})\mathrm{d}t$$

截断区间成为有限区间的积分

奇异积分的计算

无穷区间上的积分

变换为有限的区间

$$\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x \overset{x=1/t}{=\!=\!=} \int_0^1 \frac{1}{t^2} f(\frac{1}{t})\mathrm{d}t$$

截断区间成为有限区间的积分

$$\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x \approx \int_0^M f(x)\mathrm{d}x$$

奇异积分的计算

无穷区间上的积分

变换为有限的区间

$$\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=1/t} \int_0^1 \frac{1}{t^2} f(\frac{1}{t})\mathrm{d}t$$

截断区间成为有限区间的积分

$$\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \approx \int_0^{M} f(x)\mathrm{d}x$$

例4.14 计算积分$I = \int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$, 精度为$10^{-2}$.

奇异积分的计算

无穷区间上的积分

变换为有限的区间

$$\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=1/t} \int_0^1 \frac{1}{t^2} f(\frac{1}{t})\mathrm{d}t$$

截断区间成为有限区间的积分

$$\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \approx \int_0^{M} f(x)\mathrm{d}x$$

例4.14 计算积分$I = \int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$, 精度为$10^{-2}$.

$$\int_M^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$$

奇异积分的计算

无穷区间上的积分

变换为有限的区间

$$\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=1/t} \int_0^1 \frac{1}{t^2} f(\frac{1}{t})\mathrm{d}t$$

截断区间成为有限区间的积分

$$\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \approx \int_0^M f(x)\mathrm{d}x$$

例4.14 计算积分$I = \int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$, 精度为$10^{-2}$.

$$\int_M^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} < \int_M^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$$

奇异积分的计算

无穷区间上的积分

变换为有限的区间

$$\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=1/t} \int_0^1 \frac{1}{t^2} f(\frac{1}{t})\mathrm{d}t$$

截断区间成为有限区间的积分

$$\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \approx \int_0^M f(x)\mathrm{d}x$$

例4.14 计算积分$I=\int_2^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$, 精度为$10^{-2}$.

$$\int_M^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} < \int_M^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \frac{1}{2M^2}$$

奇异积分的计算

无穷区间上的积分

变换为有限的区间

$$\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x \overset{x=1/t}{=\!=\!=} \int_0^1 \frac{1}{t^2} f(\frac{1}{t})\mathrm{d}t$$

截断区间成为有限区间的积分

$$\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x \approx \int_0^M f(x)\mathrm{d}x$$

例4.14 计算积分$I = \int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$, 精度为$10^{-2}$.

$$\int_M^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} < \int_M^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \frac{1}{2M^2} \le \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

奇异积分的计算

无穷区间上的积分

变换为有限的区间

$$\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=1/t} \int_0^1 \frac{1}{t^2} f(\frac{1}{t})\mathrm{d}t$$

截断区间成为有限区间的积分

$$\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \approx \int_0^{M} f(x)\mathrm{d}x$$

例4.14 计算积分$I = \int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$，精度为$10^{-2}$.

$$\int_M^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} < \int_M^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \frac{1}{2M^2} \le \frac{1}{2} \times 10^{-2} \Rightarrow M = 10$$

奇异积分的计算

无穷区间上的积分

变换为有限的区间

$$\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=1/t} \int_0^1 \frac{1}{t^2} f(\frac{1}{t})\mathrm{d}t$$

截断区间成为有限区间的积分

$$\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \approx \int_0^M f(x)\mathrm{d}x$$

例4.14 计算积分$I = \int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$, 精度为$10^{-2}$.

$$\int_M^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} < \int_M^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \frac{1}{2M^2} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2} \Rightarrow M = 10$$

利用变步长Simpson公式计算$\int_2^{10} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$,

奇异积分的计算

无穷区间上的积分

变换为有限的区间

$$\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=1/t} \int_0^1 \frac{1}{t^2} f(\frac{1}{t})\mathrm{d}t$$

截断区间成为有限区间的积分

$$\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \approx \int_0^M f(x)\mathrm{d}x$$

例4.14 计算积分$I = \int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$, 精度为$10^{-2}$.

$$\int_M^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} < \int_M^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \frac{1}{2M^2} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2} \Rightarrow M = 10$$

利用变步长Simpson公式计算$\int_2^{10} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$,

$h = 1$, $I_1 \approx 0.1159$; $h = 2$, $I_1 \approx 0.1206$; 因此, $I \approx 0.12$.

振荡积分的计算

$$\int_a^b f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \qquad \int_a^b f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

振荡积分的计算

$$\int_a^b f(x)\cos nx \mathrm{d}x \qquad \int_a^b f(x)\sin nx \mathrm{d}x$$

分割零点

振荡积分的计算

$$\int_a^b f(x)\cos nx\mathrm{d}x \qquad \int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

分割零点

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{2n-1}\int_{\frac{i}{n}\pi}^{\frac{i+1}{n}\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

振荡积分的计算

$$\int_a^b f(x)\cos nx\mathrm{d}x \qquad \int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

分割零点

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{2n-1}\int_{\frac{i}{n}\pi}^{\frac{i+1}{n}\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

每个子区间端点为0, 可用五点Gauss-Lobatto-Legendre公式(实际只算三个值)

振荡积分的计算

$$\int_a^b f(x)\cos nx \mathrm{d}x \qquad \int_a^b f(x)\sin nx \mathrm{d}x$$

Filon方法

振荡积分的计算

$$\int_a^b f(x)\cos nx\mathrm{d}x \qquad\qquad \int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

Filon方法

$$\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

振荡积分的计算

$$\int_a^b f(x)\cos nx\mathrm{d}x \qquad\qquad \int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

Filon方法

$$\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

在每个子区间$[a+2ih, a+(2i+2)h](i=0,\cdots,m-1)$上，

$h=\frac{b-a}{2m}$, 作$f(x)$的抛物线插值函数$p(x)$.

振荡积分的计算

$$\int_a^b f(x)\cos nx\mathrm{d}x \qquad \int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

Filon方法

$$\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x \approx \int_a^b p(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

在每个子区间$[a+2ih, a+(2i+2)h](i=0,\cdots,m-1)$上,
$h=\frac{b-a}{2m}$, 作$f(x)$的抛物线插值函数$p(x)$.

振荡积分的计算

$$\int_a^b f(x)\cos nx\mathrm{d}x \qquad\qquad \int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

Filon方法

$$\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{m-1}\int_{a+2ih}^{a+(2i+2)h}(a_ix^2+b_ix+c_i)\sin nx\mathrm{d}x$$

在每个子区间$[a+2ih, a+(2i+2)h](i=0,\cdots,m-1)$上，
$h=\frac{b-a}{2m}$, 作$f(x)$的抛物线插值函数$p(x)$.

振荡积分的计算

$$\int_a^b f(x)\cos nx\mathrm{d}x \qquad \int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

Filon方法

$$\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{m-1}\int_{a+2ih}^{a+(2i+2)h}(a_ix^2+b_ix+c_i)\sin nx\mathrm{d}x$$

在每个子区间$[a+2ih, a+(2i+2)h](i=0,\cdots,m-1)$上，

$h=\frac{b-a}{2m}$, 作$f(x)$的抛物线插值函数$p(x)$.

$$\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x \approx h\{-\alpha[f(b)\cos nb - f(a)\cos na] + \beta S_{2m} + \gamma S_{2m-1}\}$$

振荡积分的计算

$$\int_a^b f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \qquad\qquad \int_a^b f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

Filon方法

$$\int_a^b f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \approx h\{-\alpha[f(b)\cos nb - f(a)\cos na] + \beta S_{2m} + \gamma S_{2m-1}\}$$

$$h = \tfrac{b-a}{2m}, \quad \theta = nh, \quad \alpha = \tfrac{1}{\theta^2}(\theta^2 + \theta\sin\theta\cos\theta - 2\sin^2\theta),$$

$$\gamma = \tfrac{4}{\theta^4}(\sin\theta - \cos\theta), \quad \beta = \tfrac{2}{\theta^2}[\theta(1+\cos^2\theta) - \sin 2\theta],$$

$$S_{2m} = \frac{1}{2}f(a)\sin na + \sum_{i=1}^{m-1} f(a+2ih)\sin n(a+2ih) + \frac{1}{2}f(b)\sin nb,$$

$$S_{2m-1} = \sum_{i=1}^{m} f(a+(2i-1)h)\sin n(a+2(i-1)h).$$

振荡积分的计算

例4.15 计算积分$I=\int_0^{2\pi} x\cos x\sin nx\mathrm{d}x$.

振荡积分的计算

例4.15 计算积分$I = \int_0^{2\pi} x \cos x \sin nx \mathrm{d}x$.

解:

振荡积分的计算

例4.15 计算积分$I = \int_0^{2\pi} x\cos x \sin nx \mathrm{d}x.$

解: G_{32}代表32个点的Gauss公式计算值; $2n \times L_5$代表零点划分的$2n$个子区间的Gauss-Lobatto-Legendre公式的计算值; 用F_9表示$h = \frac{2\pi}{9n}$的Filon公式计算值。

振荡积分的计算

例4.15 计算积分$I=\int_0^{2\pi} x\cos x\sin nx\mathrm{d}x$.

解: G_{32}代表32个点的Gauss公式计算值; $2n\times L_5$代表零点划分的$2n$个子区间的Gauss-Lobatto-Legendre公式的计算值; 用F_9表示$h=\frac{2\pi}{9n}$的Filon公式计算值。

n	精确值	G_{32}	$2n\times L_5$	F_9

振荡积分的计算

例4.15 计算积分$I=\int_0^{2\pi} x\cos x\sin nx\,\mathrm{d}x$.

解: G_{32}代表32个点的Gauss公式计算值; $2n\times L_5$代表零点划分的$2n$个子区间的Gauss-Lobatto-Legendre公式的计算值; 用F_9表示$h=\frac{2\pi}{9n}$的Filon公式计算值。

n	精确值	G_{32}	$2n\times L_5$	F_9
10	-0.63466518	-0.6340207	-0.5587594	-0.63466497

振荡积分的计算

例4.15 计算积分$I = \int_0^{2\pi} x\cos x \sin nx \mathrm{d}x$.

解: G_{32}代表32个点的Gauss公式计算值; $2n \times L_5$代表零点划分的$2n$个子区间的Gauss-Lobatto-Legendre公式的计算值; 用F_9表示$h = \frac{2\pi}{9n}$的Filon公式计算值。

n	精确值	G_{32}	$2n \times L_5$	F_9
10	-0.63466518	-0.6340207	-0.5587594	-0.63466497
20	-0.31494663	-1.2092524	-0.2778962	-0.31494463

振荡积分的计算

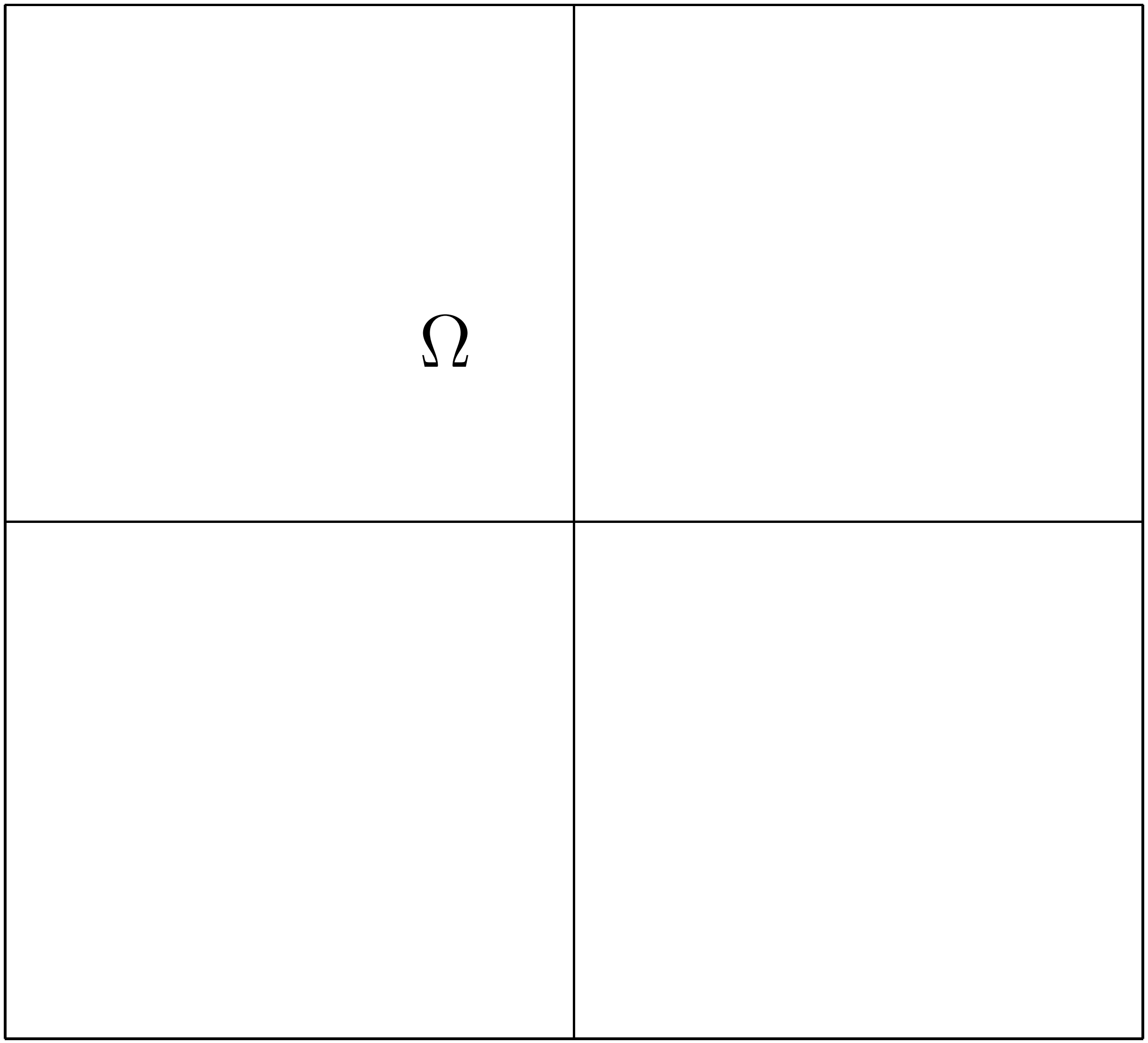
例4.15 计算积分$I=\int_0^{2\pi} x\cos x\sin nx\mathrm{d}x$.

解: G_{32}代表32个点的Gauss公式计算值; $2n\times L_5$代表零点划分的$2n$个子区间的Gauss-Lobatto-Legendre公式的计算值; 用F_9表示$h=\frac{2\pi}{9n}$的Filon公式计算值。

n	精确值	G_{32}	$2n\times L_5$	F_9
10	-0.63466518	-0.6340207	-0.5587594	-0.63466497
20	-0.31494663	-1.2092524	-0.2778962	-0.31494463
30	-0.20967243	-1.5822272	-0.18508448	-0.20967248

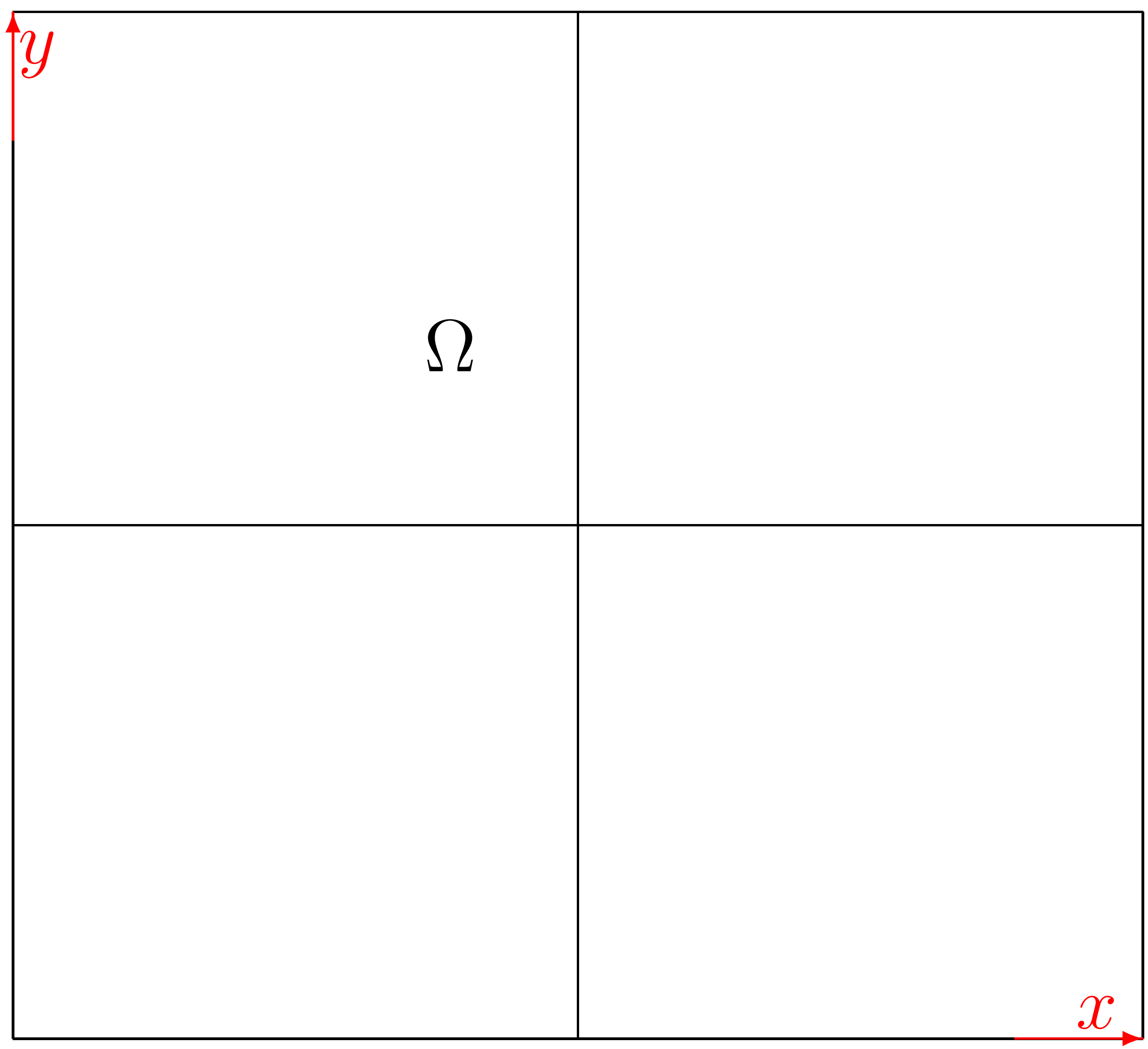
二重积分的计算

$\int_c^d \int_a^b F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$



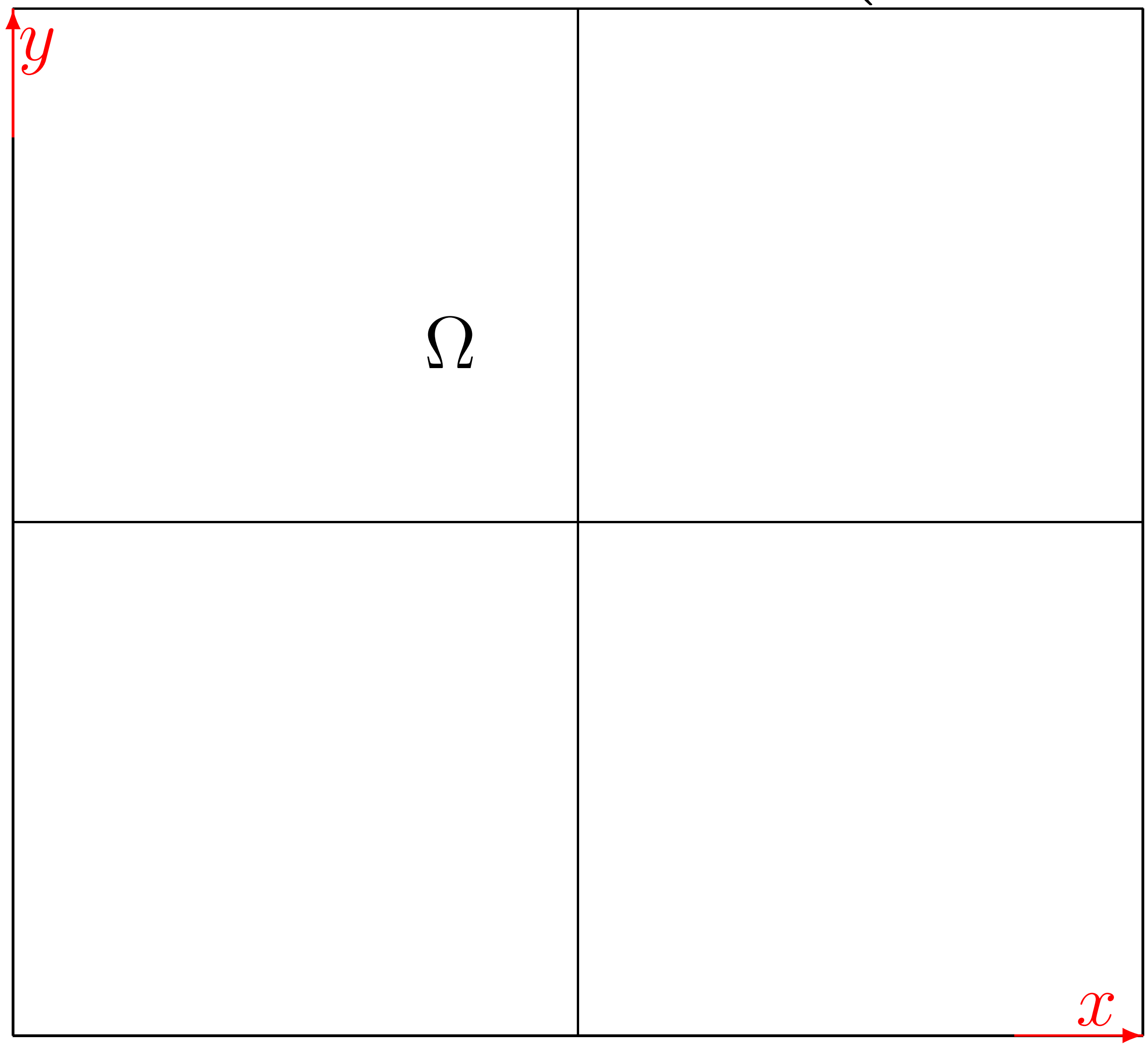
二重积分的计算

$$\int_c^d \int_a^b F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



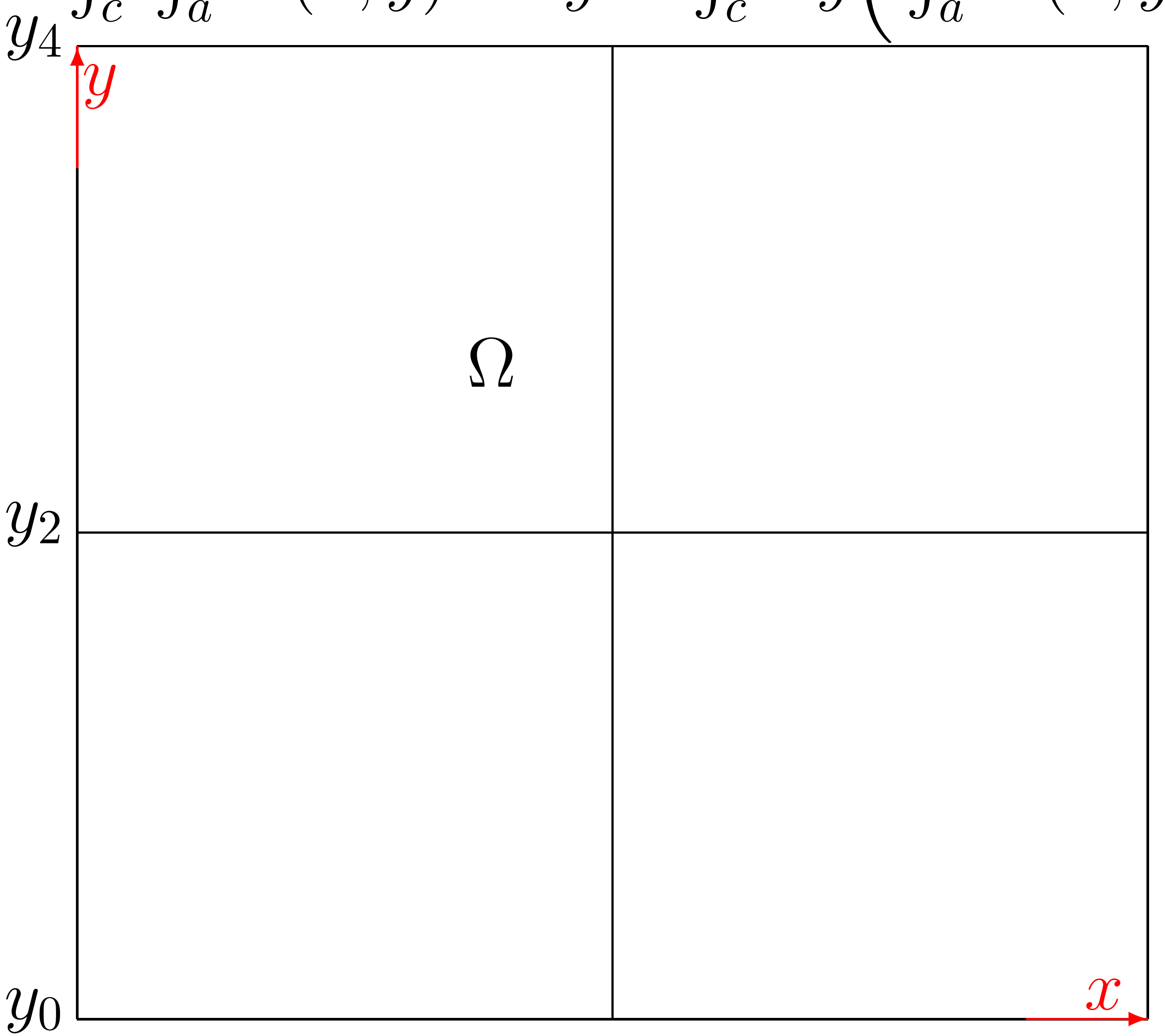
二重积分的计算

$$\int_c^d \int_a^b F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y\left(\int_a^b F(x,y)\mathrm{d}x\right)$$



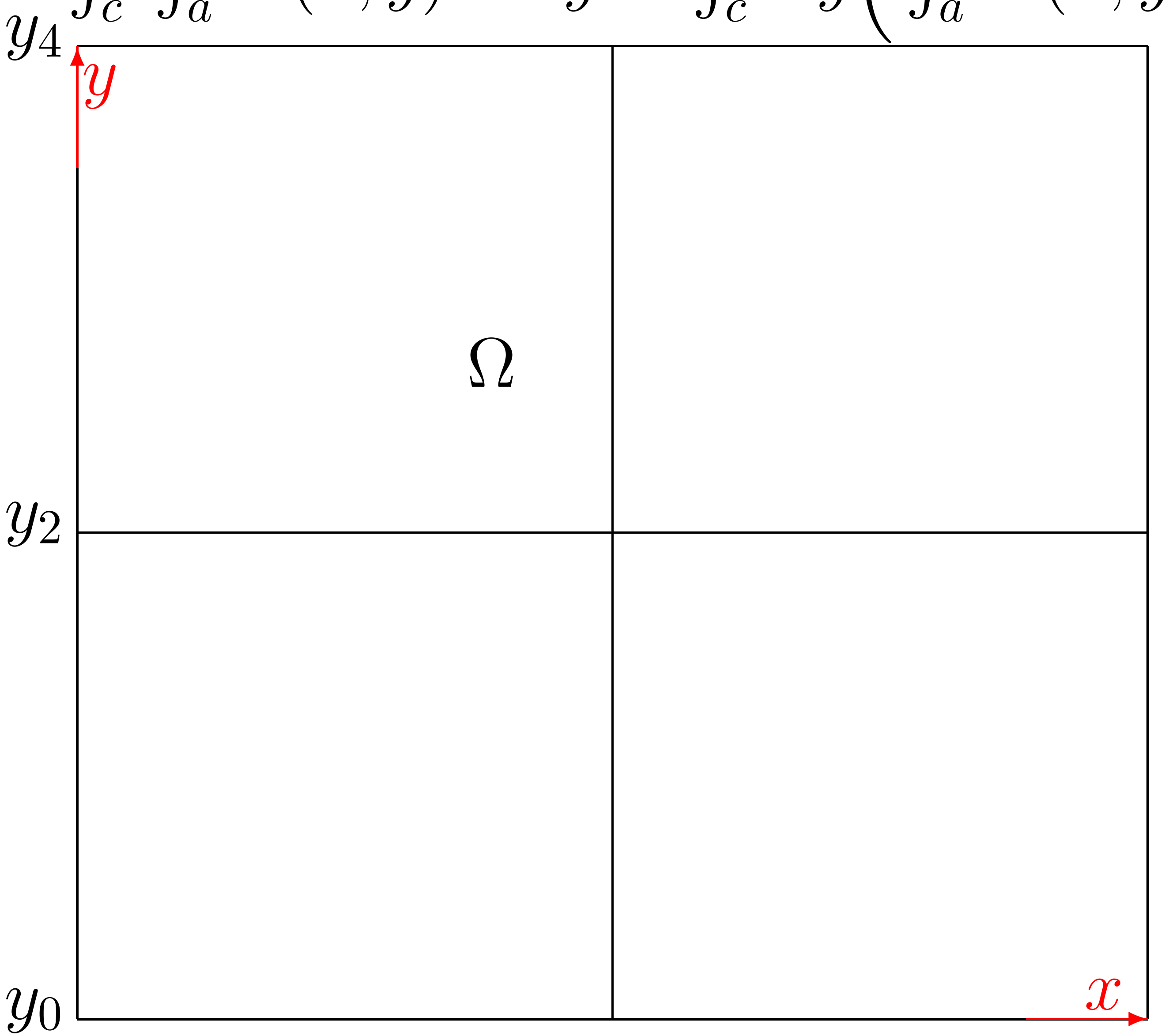
二重积分的计算

$$\int_c^d \int_a^b F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y\Big(\int_a^b F(x,y)\mathrm{d}x\Big)$$



二重积分的计算

$$\int_c^d \int_a^b F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y\left(\int_a^b F(x,y)\mathrm{d}x\right)$$



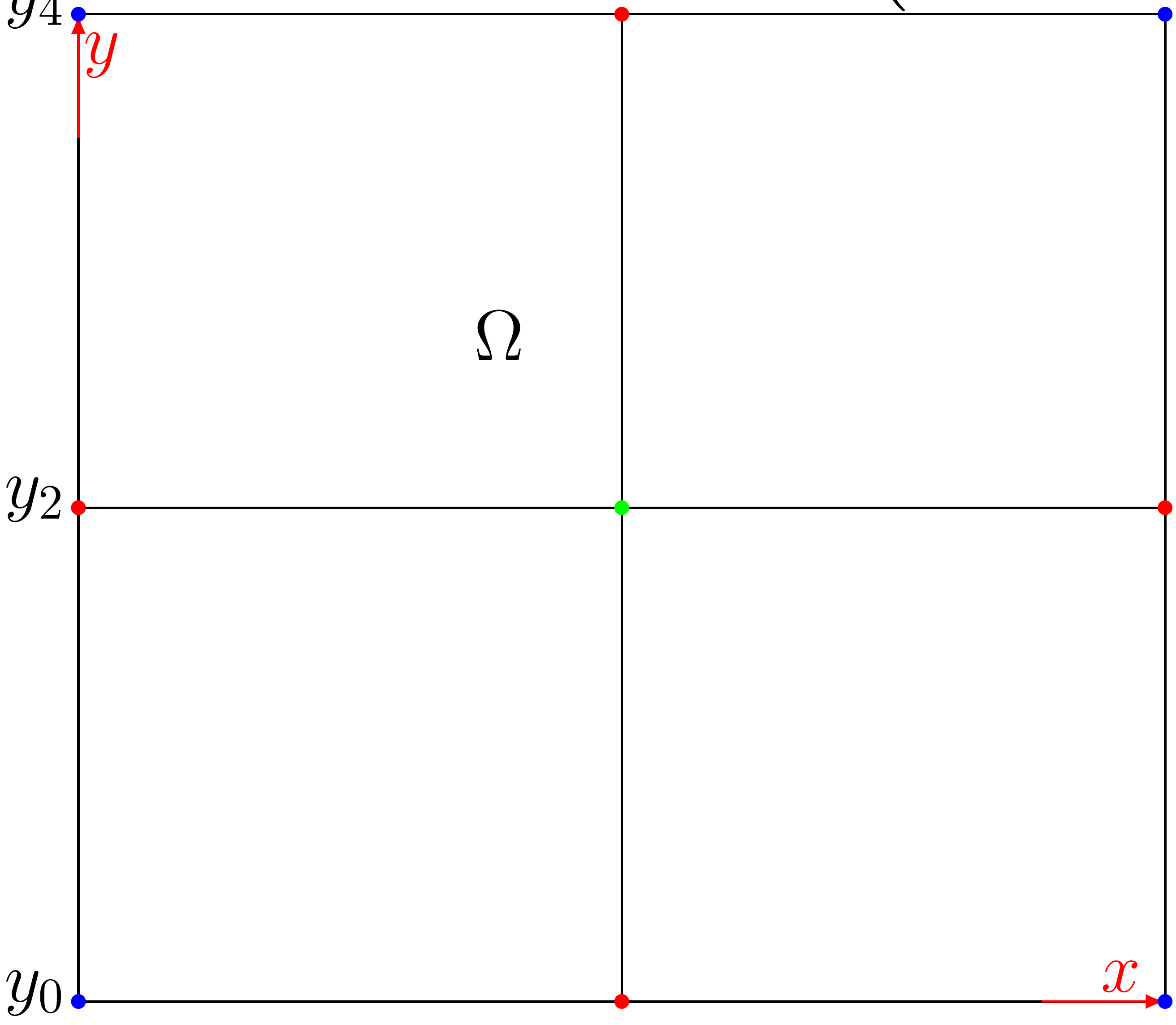
$$1 \cdot \int_a^b F(x,y_4)\mathrm{d}x$$

$$2 \cdot \int_a^b F(x,y_2)\mathrm{d}x$$

$$1 \cdot \int_a^b F(x,y_0)\mathrm{d}x$$

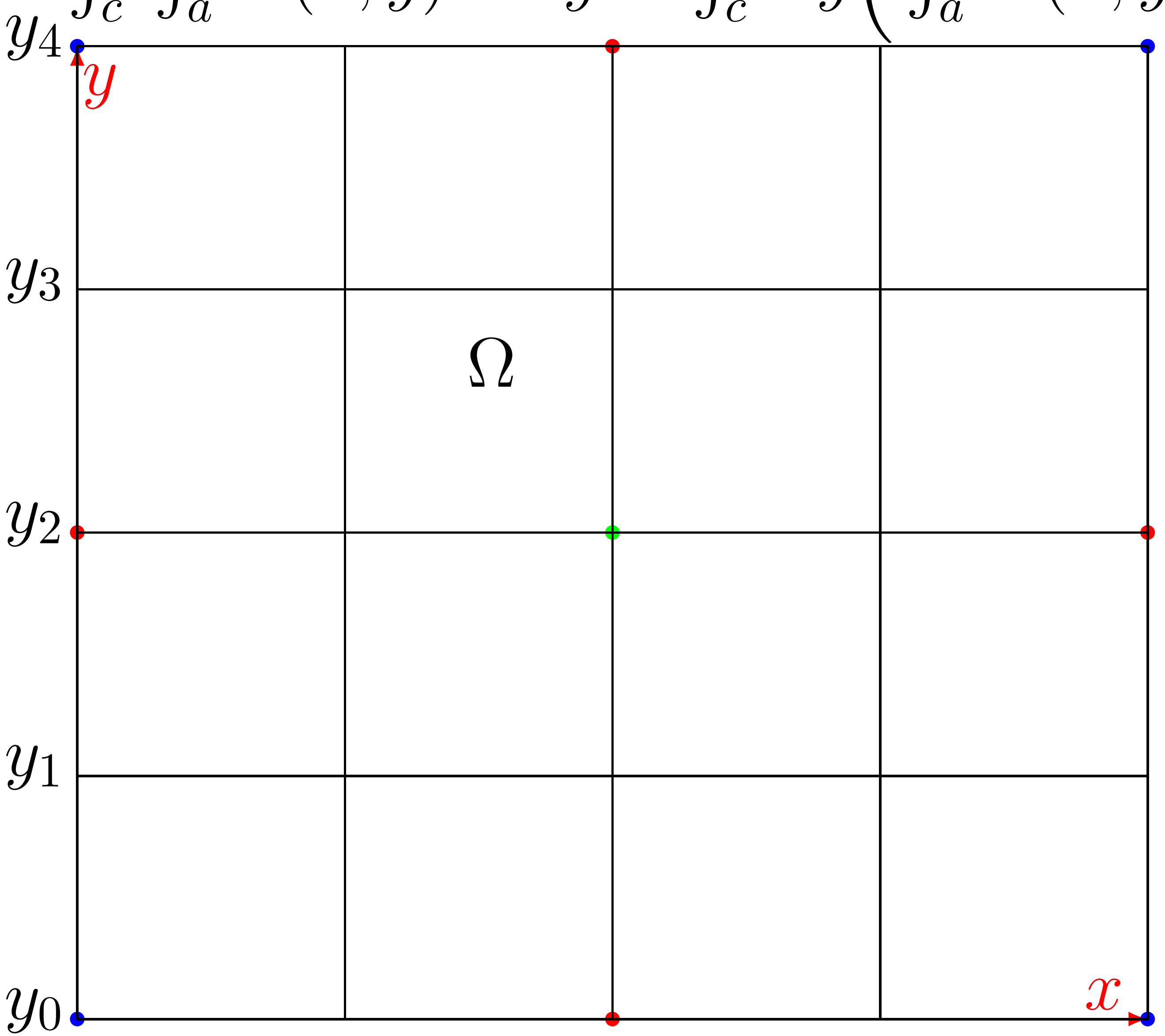
二重积分的计算

$$\int_c^d \int_a^b F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y\left(\int_a^b F(x,y)\mathrm{d}x\right)$$



二重积分的计算

$$\int_c^d \int_a^b F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y\left(\int_a^b F(x,y)\mathrm{d}x\right)$$



$$1 \cdot \int_a^b F(x,y_4)\mathrm{d}x$$

$$4 \cdot \int_a^b F(x,y_3)\mathrm{d}x$$

$$2 \cdot \int_a^b F(x,y_2)\mathrm{d}x$$

$$4 \cdot \int_a^b F(x,y_1)\mathrm{d}x$$

$$1 \cdot \int_a^b F(x,y_0)\mathrm{d}x$$

二重积分的计算

例4.16 用复合Simpson公式计算积分

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x+y)\mathrm{d}y.$$

二重积分的计算

例4.16 用复合Simpson公式计算积分

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x+y)\mathrm{d}y.$$

解:

二重积分的计算

例4.16 用复合Simpson公式计算积分

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(x+y)\mathrm{d}y.$$

解: 设$F(x)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(x+y)\mathrm{d}y$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}F(x)\mathrm{d}x\approx\frac{\pi}{24}[F_0+F_4+2F_2+4(F_1+F_3)],$$

二重积分的计算

例4.16 用复合Simpson公式计算积分

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(x+y)\mathrm{d}y.$$

解: 设$F(x)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(x+y)\mathrm{d}y$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}F(x)\mathrm{d}x\approx\frac{\pi}{24}[F_0+F_4+2F_2+4(F_1+F_3)],$$

其中, $F_i=F(\frac{i}{8}\pi)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(\frac{i}{8}\pi+y)\mathrm{d}y.$

二重积分的计算

例4.16 用复合Simpson公式计算积分

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x+y)\mathrm{d}y.$$

解: 设$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x+y)\mathrm{d}y$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x)\mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{24}[F_0 + F_4 + 2F_2 + 4(F_1 + F_3)],$$

其中, $F_i = F(\frac{i}{8}\pi) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(\frac{i}{8}\pi + y)\mathrm{d}y$. 利用Simpson公式, 可计算得$F_0 = 0.292940$, $F_1 = 0.541269$, $F_2 = 0.707211$, $F_3 = 0.765475$, $F_4 = 0.707211$.

二重积分的计算

例4.16 用复合Simpson公式计算积分

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(x+y)\mathrm{d}y.$$

解: 设$F(x)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(x+y)\mathrm{d}y$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}F(x)\mathrm{d}x\approx\frac{\pi}{24}[F_0+F_4+2F_2+4(F_1+F_3)],$$

其中, $F_i=F(\frac{i}{8}\pi)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(\frac{i}{8}\pi+y)\mathrm{d}y$. 利用Simpson公式, 可计算得$F_0=0.292940$, $F_1=0.541269$, $F_2=0.707211$, $F_3=0.765475$, $F_4=0.707211$. 因此, $I=1.00028$.

二重积分的计算

例4.16 用复合Simpson公式计算积分

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x+y)\mathrm{d}y.$$

解: 设$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x+y)\mathrm{d}y$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x)\mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{24}[F_0 + F_4 + 2F_2 + 4(F_1 + F_3)],$$

其中, $F_i = F(\frac{i}{8}\pi) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(\frac{i}{8}\pi + y)\mathrm{d}y$. 利用Simpson公式, 可计算得$F_0 = 0.292940$, $F_1 = 0.541269$, $F_2 = 0.707211$, $F_3 = 0.765475$, $F_4 = 0.707211$. 因此, $I = 1.00028$. (真值$= 1$.)

二重积分的计算: **Lyusternik-Ditkin**

1. 设Ω是圆心在原点的单位圆, 则

$$\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx \pi\Big[\frac{1}{4}f(0)+\frac{1}{8}\sum_{i=0}^{5}f(M_i)\Big],$$

其中点M_i的极坐标为$\rho_i=\sqrt{\frac{2}{3}}, \theta_i=\frac{i\pi}{3}, (i=0,1,\cdots,5)$.

二重积分的计算: Lyusternik-Ditkin

1. 设Ω是圆心在原点的单位圆, 则

$$\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx \pi\Big[\frac{1}{4}f(0)+\frac{1}{8}\sum_{i=0}^{5} f(M_i)\Big],$$

其中点M_i的极坐标为$\rho_i=\sqrt{\frac{2}{3}}, \theta_i=\frac{i\pi}{3}, (i=0,1,\cdots,5)$.

2. 设Ω是圆心在原点单位圆的内接正六边形, 则

$$\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx \frac{\sqrt{3}}{2}\Big[\frac{43}{56}f(0)+\frac{125}{336}\sum_{i=0}^{5} f(M_i)\Big],$$

其中点M_i的极坐标为$\rho_i=\frac{\sqrt{14}}{15}, \theta_i=\frac{i\pi}{3}, (i=0,1,\cdots,5)$.

二重积分的计算: Lyusternik-Ditkin

1. 设Ω是圆心在原点的单位圆, 则

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx \pi\Big[\frac{1}{4}f(0)+\frac{1}{8}\sum_{i=0}^{5} f(M_i)\Big],$$

其中点M_i的极坐标为$\rho_i=\sqrt{\frac{2}{3}}, \theta_i=\frac{i\pi}{3}, (i=0,1,\cdots,5)$.

2. 设Ω是圆心在原点单位圆的内接正六边形, 则

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx \frac{\sqrt{3}}{2}\Big[\frac{43}{56}f(0)+\frac{125}{336}\sum_{i=0}^{5} f(M_i)\Big],$$

其中点M_i的极坐标为$\rho_i=\frac{\sqrt{14}}{15}, \theta_i=\frac{i\pi}{3}, (i=0,1,\cdots,5)$.

3. 设$\Omega=\{-1\le x\le 1, -1\le y\le 1\}$, 则

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx \tfrac{8}{7}f(0,0)+\tfrac{20}{63}\Big[f(\sqrt{\tfrac{14}{15}},0)+f(-\sqrt{\tfrac{14}{15}},0)\Big]$$
$$+\tfrac{5}{9}\Big[f(\sqrt{\tfrac{1}{3}},\sqrt{\tfrac{3}{5}})+f(-\sqrt{\tfrac{1}{3}},\sqrt{\tfrac{3}{5}})+f(\sqrt{\tfrac{1}{3}},-\sqrt{\tfrac{3}{5}})+f(-\sqrt{\tfrac{1}{3}},-\sqrt{\tfrac{3}{5}})\Big].$$

数值微分

插值余项

数值微分

插值余项

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i), \quad \xi \in (a,b)$$

数值微分

插值余项

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i), \quad \xi \in (a, b)$$

两边求导

数值微分

插值余项

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i), \quad \xi \in (a,b)$$

两边求导

$$f'(x) - P_n'(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left[\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right]' + \frac{\left[f^{(n+1)}(\xi)\right]'}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

数值微分

插值余项

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i), \quad \xi \in (a, b)$$

两边求导

$$f'(x) - P_n'(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \left[\prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right]' + \frac{\left[f^{(n+1)}(\xi) \right]'}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

令$x = x_i$

数值微分

插值余项

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i), \quad \xi \in (a, b)$$

两边求导

$$f'(x) - P_n'(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left[\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right]' + \frac{\left[f^{(n+1)}(\xi)\right]'}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

令$x = x_i$

$$f'(x_i) - P_n'(x_i)$$

数值微分

插值余项

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i), \quad \xi \in (a,b)$$

两边求导

$$f'(x) - P_n'(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left[\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right]' + \frac{\left[f^{(n+1)}(\xi)\right]'}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

令$x = x_i$

$$f'(x_i) - P_n'(x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left[\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right]'\Bigg|_{x=x_i}$$

数值微分

插值余项

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i), \quad \xi \in (a, b)$$

两边求导

$$f'(x) - P_n'(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left[\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right]' + \frac{\left[f^{(n+1)}(\xi)\right]'}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

令$x = x_i$

$$f'(x_i) - P_n'(x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{j=0,\ j\neq i}^{n}(x_i - x_j)$$

数值微分

两点公式

数值微分

两点公式

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

数值微分

两点公式

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} - \frac{h}{2} f''(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_1).$$

数值微分

两点公式

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} - \frac{h}{2} f''(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_1).$$

同理

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + \frac{h}{2} f''(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_1).$$

数值微分

三点公式$(x_0 < x_1 < x_2, h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0)$,

数值微分

三点公式$(x_0 < x_1 < x_2, h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0)$,

$$
\begin{aligned}
L_2(x) = \quad & \tfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \tfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) \\
+ \quad & \tfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)
\end{aligned}
$$

数值微分

三点公式$(x_0 < x_1 < x_2, h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0)$,

$$
\begin{aligned}
L_2(x) = & \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) \\
+ & \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) = & \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)] + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi), \\
f'(x_1) = & \frac{1}{2h}[-f(x_0) + f(x_2)] - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi), \\
f'(x_2) = & \frac{1}{2h}[f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)] + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi).
\end{aligned}
$$

数值微分

三点公式$(x_0 < x_1 < x_2, h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0)$,

$$
\begin{aligned}
L_2(x) = & \tfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \tfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) \\
+ & \tfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) = & \tfrac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)] + \tfrac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi), \\
f'(x_1) = & \tfrac{1}{2h}[-f(x_0) + f(x_2)] - \tfrac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi), \\
f'(x_2) = & \tfrac{1}{2h}[f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)] + \tfrac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi).
\end{aligned}
$$

$$
f''(x_1) = \frac{1}{h^2}[f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)
$$

数值微分

例4.18 给定函数$f(x)=\mathrm{e}^x$的下列数据表, 试利用二点、三点微分公式计算$x=2.7$处的一阶、二阶导数值。

x	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
$f(x)$	12.1825	13.4637	14.8797	16.4446	18.1741

数值微分

例4.18 给定函数$f(x)=\mathrm{e}^x$的下列数据表, 试利用二点、三点微分公式计算$x=2.7$处的一阶、二阶导数值。

x	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
$f(x)$	12.1825	13.4637	14.8797	16.4446	18.1741

解:

数值微分

例4.18 给定函数$f(x) = \mathrm{e}^x$的下列数据表，试利用二点、三点微分公式计算$x = 2.7$处的一阶、二阶导数值。

x	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
$f(x)$	12.1825	13.4637	14.8797	16.4446	18.1741

解: 两点公式

数值微分

例4.18 给定函数$f(x)=\mathrm{e}^x$的下列数据表，试利用二点、三点微分公式计算$x=2.7$处的一阶、二阶导数值。

x	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
$f(x)$	12.1825	13.4637	14.8797	16.4446	18.1741

解: 两点公式

$$f'(2.7) \approx \frac{1}{0.1}[f(2.7)-f(2.6)] = 14.1600$$

$$f'(2.7) \approx \frac{1}{0.1}[f(2.8)-f(2.7)] = 15.6490$$

数值微分

例4.18 给定函数$f(x)=\mathrm{e}^x$的下列数据表，试利用二点、三点微分公式计算$x=2.7$处的一阶、二阶导数值。

x	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
$f(x)$	12.1825	13.4637	14.8797	16.4446	18.1741

解: 三点公式

数值微分

例4.18 给定函数$f(x)=\mathrm{e}^x$的下列数据表，试利用二点、三点微分公式计算$x=2.7$处的一阶、二阶导数值。

x	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
$f(x)$	12.1825	13.4637	14.8797	16.4446	18.1741

解: 三点公式

$$
\begin{aligned}
f'(2.7) &\approx \tfrac{1}{2\times 0.1}[f(2.8)-f(2.6)] = 14.9045 \\
f''(2.7) &\approx \tfrac{1}{0.1^2}[f(2.8)-2f(2.7)+f(2.6)] = 14.8900
\end{aligned}
$$