第五章　线性方程组的直接解法

现代数值数学和计算课程

线性方程组的直接解法

- 数值计算的核心问题之一

线性方程组的直接解法

- 数值计算的核心问题之一
- 直接解法和迭代解法

线性方程组的直接解法

- 数值计算的核心问题之一
- 直接解法和迭代解法
- 满矩阵和稀疏矩阵

线性方程组的直接解法

- 数值计算的核心问题之一
- 直接解法和迭代解法
- 满矩阵和稀疏矩阵
- 特殊形式的矩阵

Gauss消去法

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots = \cdots \\ a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \cdots + a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Gauss消去法

$$
\left\{
\begin{array}{rrrrl}
a_{11}^{(1)}x_1+ & a_{12}^{(1)}x_2+ & \cdots+ & a_{1,n-1}^{(1)}x_{n-1}+ & a_{1n}^{(1)}x_n=b_1^{(1)} \\
a_{21}^{(1)}x_1+ & a_{22}^{(1)}x_2+ & \cdots+ & a_{2,n-1}^{(1)}x_{n-1}+ & a_{2n}^{(1)}x_n=b_2^{(1)} \\
\cdots+ & \cdots+ & \cdots+ & \cdots+ & \cdots=\cdots \\
a_{n-1,1}^{(1)}x_1+ & a_{n-1,2}^{(1)}x_2+ & \cdots+ & a_{n-1,n-1}^{(1)}x_{n-1}+ & a_{n-1,n}^{(1)}x_n=b_{n-1}^{(1)} \\
a_{n1}^{(1)}x_1+ & a_{n2}^{(1)}x_2+ & \cdots+ & a_{n,n-1}^{(1)}x_{n-1}+ & a_{nn}^{(1)}x_n=b_n^{(1)}
\end{array}
\right.
$$

Gauss消去法

$$
\begin{cases}
a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}^{(1)}x_{n-1} + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\
a_{21}^{(1)}x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}^{(1)}x_{n-1} + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\
\cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots = \cdots \\
a_{n-1,1}^{(1)}x_1 + a_{n-1,2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{n-1,n-1}^{(1)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(1)}x_n = b_{n-1}^{(1)} \\
a_{n1}^{(1)}x_1 + a_{n2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{n,n-1}^{(1)}x_{n-1} + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}
\end{cases}
$$

第一行乘以$-\frac{a_{k1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$加到第$2,\cdots,n$行;

Gauss消去法

$$
\begin{cases}
a_{11}^{(1)}x_1 + & a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + & a_{1,n-1}^{(1)}x_{n-1} + & a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\
0 + & a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + & a_{2,n-1}^{(1)}x_{n-1} + & a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\
\cdots + & \cdots + \cdots + & \cdots + & \cdots = \cdots \\
0 + a_{n-1,2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{n-1,n-1}^{(1)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(1)}x_n = b_{n-1}^{(1)} \\
0 + & a_{n2}^{(1)}x_2 + \cdots + & a_{n,n-1}^{(1)}x_{n-1} + & a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}
\end{cases}
$$

第一行乘以$-\frac{a_{k1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$加到第$2, \cdots, n$行;

Gauss消去法

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + & a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + & a_{1,n-1}^{(1)}x_{n-1} + & a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ 0 + & a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + & a_{2,n-1}^{(2)}x_{n-1} + & a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \cdots + & \cdots + \cdots + & \cdots + & \cdots = \cdots \\ 0 + a_{n-1,2}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{n-1,n-1}^{(2)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(2)}x_n = b_{n-1}^{(2)} \\ 0 + & a_{n2}^{(2)}x_2 + \cdots + & a_{n,n-1}^{(2)}x_{n-1} + & a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)} \end{cases}$$

第一行乘以$-\frac{a_{k1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$加到第$2, \cdots, n$行;

Gauss消去法

$$\left\{\begin{array}{rrrrl}
a_{11}^{(1)}x_1+ & a_{12}^{(1)}x_2+\cdots+ & a_{1,n-1}^{(1)}x_{n-1}+ & a_{1n}^{(1)}x_n= & b_1^{(1)} \\
0+ & a_{22}^{(2)}x_2+\cdots+ & a_{2,n-1}^{(2)}x_{n-1}+ & a_{2n}^{(2)}x_n= & b_2^{(2)} \\
\cdots+ & \cdots+\cdots+ & \cdots+ & \cdots= & \cdots \\
0+ & a_{n-1,2}^{(2)}x_2+\cdots+ & a_{n-1,n-1}^{(2)}x_{n-1}+ & a_{n-1,n}^{(2)}x_n= & b_{n-1}^{(2)} \\
0+ & a_{n2}^{(2)}x_2+\cdots+ & a_{n,n-1}^{(2)}x_{n-1}+ & a_{nn}^{(2)}x_n= & b_n^{(2)}
\end{array}\right.$$

第一行乘以$-\frac{a_{k1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$加到第$2,\cdots,n$行;

第二行乘以$-\frac{a_{k2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$加到第$3,\cdots,n$行;

Gauss消去法

$$
\left\{\begin{array}{rrrrr}
a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + & a_{1,n-1}^{(1)}x_{n-1} + & a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\
0 + a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + & a_{2,n-1}^{(2)}x_{n-1} + & a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\
\cdots + \quad \cdots + \cdots + & \cdots + & \cdots = \cdots \\
0 + \quad 0 + \cdots + & a_{n-1,n-1}^{(2)}x_{n-1} + & a_{n-1,n}^{(2)}x_n = b_{n-1}^{(2)} \\
0 + \quad 0 + \cdots + & a_{n,n-1}^{(2)}x_{n-1} + & a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)}
\end{array}\right.
$$

第一行乘以$-\frac{a_{k1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$加到第$2,\cdots,n$行;

第二行乘以$-\frac{a_{k2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$加到第$3,\cdots,n$行;

Gauss消去法

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}^{(1)}x_{n-1} + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ 0 + a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}^{(2)}x_{n-1} + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots = \cdots \\ 0 + 0 + \cdots + a_{n-1,n-1}^{(3)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(3)}x_n = b_{n-1}^{(3)} \\ 0 + 0 + \cdots + a_{n,n-1}^{(3)}x_{n-1} + a_{nn}^{(3)}x_n = b_n^{(3)} \end{cases}$$

第一行乘以$-\frac{a_{k1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$加到第$2, \cdots, n$行;

第二行乘以$-\frac{a_{k2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$加到第$3, \cdots, n$行;

Gauss消去法

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1+a_{12}^{(1)}x_2+\cdots+ & a_{1,n-1}^{(1)}x_{n-1}+ & a_{1n}^{(1)}x_n=b_1^{(1)} \\ 0+a_{22}^{(2)}x_2+\cdots+ & a_{2,n-1}^{(2)}x_{n-1}+ & a_{2n}^{(2)}x_n=b_2^{(2)} \\ \cdots+\quad\cdots+\cdots+ & \cdots+ & \cdots=\cdots \\ 0+\quad 0+\cdots+a_{n-1,n-1}^{(3)}x_{n-1} & +a_{n-1,n}^{(3)}x_n & =b_{n-1}^{(3)} \\ 0+\quad 0+\cdots+ & a_{n,n-1}^{(3)}x_{n-1}+ & a_{nn}^{(3)}x_n=b_n^{(3)} \end{cases}$$

第一行乘以$-\frac{a_{k1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$加到第$2,\cdots,n$行;

第二行乘以$-\frac{a_{k2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$加到第$3,\cdots,n$行;

$\cdots\cdots$

Gauss消去法

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1+a_{12}^{(1)}x_2+\cdots+ & a_{1,n-1}^{(1)}x_{n-1}+ & a_{1n}^{(1)}x_n=b_1^{(1)} \\ 0+a_{22}^{(2)}x_2+\cdots+ & a_{2,n-1}^{(2)}x_{n-1}+ & a_{2n}^{(2)}x_n=b_2^{(2)} \\ \cdots+\quad\cdots+\cdots+ & \cdots+ & \cdots=\cdots \\ 0+\quad 0+\cdots+a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1}+ & a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n=b_{n-1}^{(n-1)} \\ 0+\quad 0+\cdots+ & a_{n,n-1}^{(n-1)}x_{n-1}+a_{nn}^{(n-1)}x_n=b_n^{(n-1)} \end{cases}$$

第一行乘以$-\frac{a_{k1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$加到第$2,\cdots,n$行;

第二行乘以$-\frac{a_{k2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$加到第$3,\cdots,n$行;

$\cdots\cdots$

Gauss消去法

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}^{(1)}x_{n-1} + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ 0 + a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}^{(2)}x_{n-1} + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots = \cdots \\ 0 + 0 + \cdots + a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n = b_{n-1}^{(n-1)} \\ 0 + 0 + \cdots + a_{n,n-1}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{cases}$$

第一行乘以$-\frac{a_{k1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$加到第$2,\cdots,n$行;

第二行乘以$-\frac{a_{k2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$加到第$3,\cdots,n$行;

$\cdots\cdots$

第$n-1$行乘以$-\frac{a_{n,n-1}^{(n-1)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}}$加到第$n$行;

Gauss消去法

$$
\begin{cases}
a_{11}^{(1)}x_1+a_{12}^{(1)}x_2+\cdots+a_{1,n-1}^{(1)}x_{n-1}+a_{1n}^{(1)}x_n=b_1^{(1)}\\
0+a_{22}^{(2)}x_2+\cdots+a_{2,n-1}^{(2)}x_{n-1}+a_{2n}^{(2)}x_n=b_2^{(2)}\\
\cdots+\cdots+\cdots+\cdots+\cdots=\cdots\\
0+0+\cdots+a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1}+a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n=b_{n-1}^{(n-1)}\\
0+0+\cdots+0+a_{nn}^{(n)}x_n=b_n^{(n)}
\end{cases}
$$

第一行乘以$-\frac{a_{k1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$加到第$2,\cdots,n$行;

第二行乘以$-\frac{a_{k2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$加到第$3,\cdots,n$行;

$\cdots\cdots$

第$n-1$行乘以$-\frac{a_{n,n-1}^{(n-1)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}}$加到第$n$行;

Gauss消去法

$$
\begin{cases}
a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}^{(1)}x_{n-1} + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\
0 + a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}^{(2)}x_{n-1} + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\
\cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots = \cdots \\
0 + 0 + \cdots + a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n = b_{n-1}^{(n-1)} \\
0 + 0 + \cdots + 0 + a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)}
\end{cases}
$$

第一行乘以$-\frac{a_{k1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$加到第$2, \cdots, n$行;

第二行乘以$-\frac{a_{k2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$加到第$3, \cdots, n$行;

$\cdots\cdots$

第$n-1$行乘以$-\frac{a_{n,n-1}^{(n-1)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}}$加到第$n$行;

回代

Gauss消去法

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}^{(1)}x_{n-1} + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ 0 + a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}^{(2)}x_{n-1} + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots = \cdots \\ 0 + 0 + \cdots + a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n = b_{n-1}^{(n-1)} \\ 0 + 0 + \cdots + 0 + a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)} \end{cases}$$

第一行乘以$-\frac{a_{k1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$加到第$2, \cdots, n$行; 运算量: $(n-1)^2 + 2(n-1)$

第二行乘以$-\frac{a_{k2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$加到第$3, \cdots, n$行; 运算量: $(n-2)^2 + 2(n-2)$

$\cdots\cdots$

第$n-1$行乘以$-\frac{a_{n,n-1}^{(n-1)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}}$加到第$n$行; 运算量: $1 + 2 \cdot 1$

回代

Gauss消去法

$$
\begin{cases}
a_{11}^{(1)}x_1+a_{12}^{(1)}x_2+\cdots+ & a_{1,n-1}^{(1)}x_{n-1}+ & a_{1n}^{(1)}x_n=b_1^{(1)} \\
0+a_{22}^{(2)}x_2+\cdots+ & a_{2,n-1}^{(2)}x_{n-1}+ & a_{2n}^{(2)}x_n=b_2^{(2)} \\
\cdots+\quad\cdots+\cdots+ & \cdots+ & \cdots=\cdots \\
0+\quad 0+\cdots+ & a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1}+ & a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n=b_{n-1}^{(n-1)} \\
0+\quad 0+\cdots+ & 0+ & a_{nn}^{(n)}x_n=b_n^{(n)}
\end{cases}
$$

第一行乘以$-\frac{a_{k1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$加到第$2,\cdots,n$行; 运算量: $(n-1)^2+2(n-1)$

第二行乘以$-\frac{a_{k2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$加到第$3,\cdots,n$行; 运算量: $(n-2)^2+2(n-2)$

$\cdots\cdots$

第$n-1$行乘以$-\frac{a_{n,n-1}^{(n-1)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}}$加到第$n$行; 运算量: $1+2\cdot 1$

回代 运算量: $\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)$

Gauss消去法

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}^{(1)}x_{n-1} + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ 0 + a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}^{(2)}x_{n-1} + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots = \cdots \\ 0 + 0 + \cdots + a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n = b_{n-1}^{(n-1)} \\ 0 + 0 + \cdots + 0 + a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)} \end{cases}$$

总运算量: $\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n.$

Gauss消去法

$$\left\{\begin{array}{rrrrl}
a_{11}^{(1)}x_1+a_{12}^{(1)}x_2+\cdots+ & a_{1,n-1}^{(1)}x_{n-1}+ & a_{1n}^{(1)}x_n=b_1^{(1)} \\
0+a_{22}^{(2)}x_2+\cdots+ & a_{2,n-1}^{(2)}x_{n-1}+ & a_{2n}^{(2)}x_n=b_2^{(2)} \\
\cdots+\quad\cdots+\cdots+ & \cdots+ & \cdots=\cdots \\
0+\quad 0+\cdots+ & a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1}+ & a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n=b_{n-1}^{(n-1)} \\
0+\quad 0+\cdots+ & 0+ & a_{nn}^{(n)}x_n=b_n^{(n)}
\end{array}\right.$$

总运算量: $\frac{1}{3}n^3+n^2-\frac{1}{3}n$.

条件: $a_{11}^{(1)}\neq 0,\ a_{22}^{(2)}\neq 0,\ \cdots,\ a_{nn}^{(n)}\neq 0$.

Gauss消去法

$$\left\{\begin{array}{rrrrrl} a_{11}^{(1)}x_1+ & a_{12}^{(1)}x_2+\cdots+ & a_{1,n-1}^{(1)}x_{n-1}+ & a_{1n}^{(1)}x_n & = & b_1^{(1)} \\ 0+ & a_{22}^{(2)}x_2+\cdots+ & a_{2,n-1}^{(2)}x_{n-1}+ & a_{2n}^{(2)}x_n & = & b_2^{(2)} \\ \cdots+ & \cdots+\cdots+ & \cdots+ & \cdots & = & \cdots \\ 0+ & 0+\cdots+ & a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1}+ & a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n & = & b_{n-1}^{(n-1)} \\ 0+ & 0+\cdots+ & 0+ & a_{nn}^{(n)}x_n & = & b_n^{(n)} \end{array}\right.$$

总运算量: $\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n$.

条件: $a_{11}^{(1)} \neq 0, a_{22}^{(2)} \neq 0, \cdots, a_{nn}^{(n)} \neq 0.$

列主元Gauss消去法

Gauss消去法

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}^{(1)}x_{n-1} + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ 0 + a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}^{(2)}x_{n-1} + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots = \cdots \\ 0 + 0 + \cdots + a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n = b_{n-1}^{(n-1)} \\ 0 + 0 + \cdots + 0 + a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)} \end{cases}$$

总运算量: $\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n.$

条件: $a_{11}^{(1)} \neq 0, a_{22}^{(2)} \neq 0, \cdots, a_{nn}^{(n)} \neq 0.$

列主元Gauss消去法

在第k次消元时, 选出第k列从第k行到第n行元素中绝对值最大者, 调换该行与第k行。

Gauss消去法

例5.1 取$\varepsilon = 10^{-9}$, 分别用Gauss消去法和列主元Gauss消去法计算下述线代数方程组。假定模型计算机具有8位字长的浮点表示及16位的累加器。

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

Gauss消去法

例5.1 取$\varepsilon = 10^{-9}$, 分别用Gauss消去法和列主元Gauss消去法计算下述线代数方程组。假定模型计算机具有8位字长的浮点表示及16位的累加器。

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

解:

Gauss消去法

例5.1 取$\varepsilon = 10^{-9}$, 分别用Gauss消去法和列主元Gauss消去法计算下述线代数方程组。假定模型计算机具有8位字长的浮点表示及16位的累加器。

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

解: Gauss消去法:

Gauss消去法

例5.1 取$\varepsilon = 10^{-9}$, 分别用Gauss消去法和列主元Gauss消去法计算下述线代数方程组。假定模型计算机具有8位字长的浮点表示及16位的累加器。

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

解: Gauss消去法:

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 1, \\ (1 - 1/\varepsilon) x_2 = 2 - 1/\varepsilon. \end{cases}$$

Gauss消去法

例5.1 取$\varepsilon = 10^{-9}$, 分别用Gauss消去法和列主元Gauss消去法计算下述线代数方程组。假定模型计算机具有8位字长的浮点表示及16位的累加器。

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

解: Gauss消去法:

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 1, \\ (1 - 1/\varepsilon) x_2 = 2 - 1/\varepsilon. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{2-1/\varepsilon}{1-1/\varepsilon} \\ x_1 = \frac{1-x_2}{\varepsilon} \end{cases}$$

Gauss消去法

例5.1 取$\varepsilon = 10^{-9}$, 分别用Gauss消去法和列主元Gauss消去法计算下述线代数方程组。假定模型计算机具有8位字长的浮点表示及16位的累加器。

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

解: Gauss消去法:

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 1, \\ (1 - 1/\varepsilon) x_2 = 2 - 1/\varepsilon. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{2-1/\varepsilon}{1-1/\varepsilon} \\ x_1 = \frac{1-x_2}{\varepsilon} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} - 2 = 10^9 - 2 = 10^9 \quad (!!)$$

Gauss消去法

例5.1 取$\varepsilon = 10^{-9}$, 分别用Gauss消去法和列主元Gauss消去法计算下述线代数方程组。假定模型计算机具有8位字长的浮点表示及16位的累加器。

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

解: Gauss消去法:

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 1, \\ (1 - 1/\varepsilon) x_2 = 2 - 1/\varepsilon. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{2-1/\varepsilon}{1-1/\varepsilon} = 1 \\ x_1 = \frac{1-x_2}{\varepsilon} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} - 2 = 10^9 - 2 = 10^9 \quad (!!)$$

Gauss消去法

例5.1 取$\varepsilon = 10^{-9}$, 分别用Gauss消去法和列主元Gauss消去法计算下述线代数方程组。假定模型计算机具有8位字长的浮点表示及16位的累加器。

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

解: 列主元Gauss消去法:

Gauss消去法

例5.1 取$\varepsilon = 10^{-9}$, 分别用Gauss消去法和列主元Gauss消去法计算下述线代数方程组。假定模型计算机具有8位字长的浮点表示及16位的累加器。

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

解: 列主元Gauss消去法:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ \varepsilon x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Gauss消去法

例5.1 取$\varepsilon = 10^{-9}$, 分别用Gauss消去法和列主元Gauss消去法计算下述线代数方程组。假定模型计算机具有8位字长的浮点表示及16位的累加器。

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

解: 列主元Gauss消去法:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ \varepsilon x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ (1-\varepsilon) x_2 = 1 - 2\varepsilon. \end{cases}$$

Gauss消去法

例5.1 取$\varepsilon = 10^{-9}$, 分别用Gauss消去法和列主元Gauss消去法计算下述线代数方程组。假定模型计算机具有8位字长的浮点表示及16位的累加器。

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

解: 列主元Gauss消去法:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ \varepsilon x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ (1-\varepsilon)x_2 = 1 - 2\varepsilon. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

Gauss消去法

例5.1 取$\varepsilon = 10^{-9}$, 分别用Gauss消去法和列主元Gauss消去法计算下述线代数方程组。假定模型计算机具有8位字长的浮点表示及16位的累加器。

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

解: 列主元Gauss消去法:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ \varepsilon x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ (1-\varepsilon) x_2 = 1 - 2\varepsilon. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

真解$x^* \approx (1, 1)$.

Gauss消去法

例5.1 取$\varepsilon = 10^{-9}$, 分别用Gauss消去法和列主元Gauss消去法计算下述线代数方程组。假定模型计算机具有8位字长的浮点表示及16位的累加器。

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

若考虑方程

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{\varepsilon} x_2 = \frac{1}{\varepsilon}. \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

Gauss消去法

例5.1 取$\varepsilon = 10^{-9}$, 分别用Gauss消去法和列主元Gauss消去法计算下述线代数方程组。假定模型计算机具有8位字长的浮点表示及16位的累加器。

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

若考虑方程

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{\varepsilon} x_2 = \frac{1}{\varepsilon}. \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

此时, 选不选主元一样:

Gauss消去法

例5.1 取$\varepsilon = 10^{-9}$, 分别用Gauss消去法和列主元Gauss消去法计算下述线代数方程组。假定模型计算机具有8位字长的浮点表示及16位的累加器。

若考虑方程

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{\varepsilon} x_2 = \frac{1}{\varepsilon}. \\ x_1 + \quad x_2 = 2. \end{cases}$$

此时, 选不选主元一样:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{\varepsilon} x_2 = \frac{1}{\varepsilon}, \\ (1 - \frac{1}{\varepsilon}) x_2 = 2 - \frac{1}{\varepsilon}. \end{cases}$$

Gauss消去法

例5.1 取$\varepsilon = 10^{-9}$, 分别用Gauss消去法和列主元Gauss消去法计算下述线代数方程组。假定模型计算机具有8位字长的浮点表示及16位的累加器。

若考虑方程

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{\varepsilon} x_2 = \frac{1}{\varepsilon}. \\ x_1 + \ \ x_2 = 2. \end{cases}$$

此时, 选不选主元一样:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{\varepsilon} x_2 = \frac{1}{\varepsilon}, \\ (1 - \frac{1}{\varepsilon}) x_2 = 2 - \frac{1}{\varepsilon}. \end{cases} \Rightarrow x_2 = \frac{2 - 1/\varepsilon}{1 - 1/\varepsilon} = 1, \quad x_1 = 0$$

Gauss消去法

例5.1 取$\varepsilon = 10^{-9}$, 分别用Gauss消去法和列主元Gauss消去法计算下述线代数方程组。假定模型计算机具有8位字长的浮点表示及16位的累加器。

若考虑方程

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{\varepsilon} x_2 = \frac{1}{\varepsilon}. \\ x_1 + \quad x_2 = 2. \end{cases}$$

此时, 选不选主元一样:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{\varepsilon} x_2 = \frac{1}{\varepsilon}, \\ (1 - \frac{1}{\varepsilon}) x_2 = 2 - \frac{1}{\varepsilon}. \end{cases} \Rightarrow x_2 = \frac{2 - 1/\varepsilon}{1 - 1/\varepsilon} = 1, \quad x_1 = 0$$

选主元因为方程的同等变形变得毫无意义。

量化的列主元素Gauss消去法

例5.2 用量化的列主元高斯消去法求解:

量化的列主元素Gauss消去法

例5.2 用量化的列主元高斯消去法求解:

$$\begin{bmatrix} 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \\ 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 \\ -34 \\ 16 \\ 26 \end{bmatrix}$$

量化的列主元素Gauss消去法

例5.2 用量化的列主元高斯消去法求解:

$$\begin{bmatrix} 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \\ 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 \\ -34 \\ 16 \\ 26 \end{bmatrix}$$

$$l = (1, 2, 3, 4)$$

量化的列主元素Gauss消去法

例5.2 用量化的列主元高斯消去法求解:

$$\begin{bmatrix} 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \\ 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 \\ -34 \\ 16 \\ 26 \end{bmatrix}$$

$$l = (1, 2, 3, 4)$$

$$S = (13, 18, 6, 12)$$

量化的列主元素Gauss消去法

例5.2 用量化的列主元高斯消去法求解:

$$\begin{bmatrix} 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \\ 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 \\ -34 \\ 16 \\ 26 \end{bmatrix}$$

$$l = (1, 2, 3, 4)$$

$$S = (13, 18, 6, 12)$$

$$\{\frac{|a_{l_i,1}|}{s_{l_i}} : i = 1, 2, 3, 4\} = \{\frac{3}{13}, \frac{6}{18}, \frac{6}{6}, \frac{12}{12}\}$$

量化的列主元素Gauss消去法

例5.2 用量化的列主元高斯消去法求解:

$$\begin{bmatrix} 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \\ 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 \\ -34 \\ 16 \\ 26 \end{bmatrix}$$

$$l = (3, 2, 1, 4)$$

$$S = (13, 18, 6, 12)$$

量化的列主元素Gauss消去法

例5.2 用量化的列主元高斯消去法求解:

$$\begin{bmatrix} 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \\ 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -18 \\ 16 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$l = (3, 2, 1, 4)$$

$$S = (13, 18, 6, 12)$$

量化的列主元素Gauss消去法

例5.2 用量化的列主元高斯消去法求解:

$$\begin{bmatrix} 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \\ 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -18 \\ 16 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$l = (3, 2, 1, 4)$$

$$S = (13, 18, 6, 12)$$

$$\{\frac{|a_{l_i,2}|}{s_{l_i}} : i = 2, 3, 4\} = \{\frac{2}{18}, \frac{12}{13}, \frac{4}{12}\}$$

量化的列主元素Gauss消去法

例5.2 用量化的列主元高斯消去法求解:

$$\begin{bmatrix} 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \\ 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -18 \\ 16 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$l = (3, 1, 2, 4)$$

$$S = (13, 18, 6, 12)$$

量化的列主元素Gauss消去法

例5.2 用量化的列主元高斯消去法求解:

$$\begin{bmatrix} 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{13}{3} & -\frac{83}{6} \\ 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -\frac{45}{2} \\ 16 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$l = (3, 1, 2, 4)$$

$$S = (13, 18, 6, 12)$$

量化的列主元素Gauss消去法

例5.2 用量化的列主元高斯消去法求解:

$$\begin{bmatrix} 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{13}{3} & -\frac{83}{6} \\ 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -\frac{45}{2} \\ 16 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$l = (3, 1, 2, 4)$$

$$S = (13, 18, 6, 12)$$

$$\{\frac{|a_{l_i,2}|}{s_{l_i}} : i = 3, 4\} = \{\frac{13/3}{8}, \frac{2/3}{12}\}$$

量化的列主元素Gauss消去法

例5.2 用量化的列主元高斯消去法求解:

$$\begin{bmatrix} 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{13}{3} & -\frac{83}{6} \\ 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -\frac{45}{2} \\ 16 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$l = (3, 1, 2, 4)$$

$$S = (13, 18, 6, 12)$$

量化的列主元素Gauss消去法

例5.2 用量化的列主元高斯消去法求解:

$$\begin{bmatrix} 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{13}{3} & -\frac{83}{6} \\ 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -\frac{45}{2} \\ 16 \\ -\frac{6}{13} \end{bmatrix}$$

$$l = (3, 1, 2, 4)$$

$$S = (13, 18, 6, 12)$$

量化的列主元素Gauss消去法

例5.2 用量化的列主元高斯消去法求解:

$$\begin{bmatrix} 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{13}{3} & -\frac{83}{6} \\ 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -\frac{45}{2} \\ 16 \\ -\frac{6}{13} \end{bmatrix}$$

$$l = (3, 1, 2, 4)$$

$$S = (13, 18, 6, 12)$$

量化的列主元素Gauss消去法

例5.2 用量化的列主元高斯消去法求解:

$$\begin{bmatrix} 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{13}{3} & -\frac{83}{6} \\ 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -\frac{45}{2} \\ 16 \\ -\frac{6}{13} \end{bmatrix}$$

$$l = (3, 1, 2, 4)$$

$$S = (13, 18, 6, 12)$$

回代次序为第4,2,1,3个方程, 即l的逆序,

量化的列主元素Gauss消去法

例5.2 用量化的列主元高斯消去法求解:

$$\begin{bmatrix} 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{13}{3} & -\frac{83}{6} \\ 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -\frac{45}{2} \\ 16 \\ -\frac{6}{13} \end{bmatrix}$$

$$l = (3, 1, 2, 4)$$

$$S = (13, 18, 6, 12)$$

回代次序为第4,2,1,3个方程, 即l的逆序,

$$x_4 = 1, \quad x_3 = -2, \quad x_2 = 1, \quad x_1 = 3$$

矩阵的三角分解

第一行乘上m_{k1}加到第k行上, $k = 2, \cdots, n$, 相当于

矩阵的三角分解

第一行乘上m_{k1}加到第k行上, $k = 2, \cdots, n$, 相当于

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ m_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ m_{n1} & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = L_1 A$$

矩阵的三角分解

第i行乘上m_{ki}加到第k行上, $k = i + 1, \cdots, n$, 相当于

矩阵的三角分解

第i行乘上m_{ki}加到第k行上, $k = i+1, \cdots, n$, 相当于

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & m_{i+1,i} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & m_{ni} & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & a_{ii} & a_{i,i+1} & \cdots & a_{in} \\ & & a_{i+1,i} & a_{i+1,i+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & a_{ni} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= L_i A$$

矩阵的三角分解

第i行乘上m_{ki}加到第k行上, $k = i+1, \cdots, n$, 相当于

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & m_{i+1,i} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & m_{ni} & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & a_{ii} & a_{i,i+1} & \cdots & a_{in} \\ & & a_{i+1,i} & a_{i+1,i+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & a_{ni} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= L_i A$$

所以, Gauss消去法的过程实际上就是

$$L_{n-1} \cdots L_2 L_1 A$$

矩阵的三角分解

第i行乘上m_{ki}加到第k行上, $k = i+1, \cdots, n$, 相当于

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & m_{i+1,i} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & m_{ni} & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & a_{ii} & a_{i,i+1} & \cdots & a_{in} \\ & & a_{i+1,i} & a_{i+1,i+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & a_{ni} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= L_i A$$

所以, Gauss消去法的过程实际上就是

$$L_{n-1} \cdots L_2 L_1 A = U$$

矩阵的三角分解

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & m_{i+1,i} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & m_{ni} & & & 1 \end{bmatrix}^{-1} =$$

矩阵的三角分解

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & m_{i+1,i} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & m_{ni} & & & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -m_{i+1,i} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -m_{ni} & & & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵的三角分解

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & m_{i+1,i} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & m_{ni} & & & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -m_{i+1,i} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -m_{ni} & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} U$$

矩阵的三角分解

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & m_{i+1,i} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & m_{ni} & & & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -m_{i+1,i} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -m_{ni} & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} U = LU$$

矩阵的三角分解

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & m_{i+1,i} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & m_{ni} & & & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -m_{i+1,i} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -m_{ni} & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} U = LU$$

L为单位下三角矩阵, U为上三角矩阵, 该分解称为Doolittle分解或LU分解.

矩阵的三角分解

由初等行变换的性质可知,

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

矩阵的三角分解

由初等行变换的性质可知,

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \cdots a_{kk}^{(k)}$$

矩阵的三角分解

由初等行变换的性质可知,

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \cdots a_{kk}^{(k)}$$

定理5.1 利用Gauss消去法求解$Ax = b$的主元素 $a_{kk}^{(k)} \neq 0$的充要条件是A的所有顺序主子式Δ_k非零。

矩阵的三角分解

定理5.2 如果$\Delta_k \neq 0, k = 1, \cdots, n$, A的LU分解存在且唯一。

矩阵的三角分解

定理5.2 如果$\Delta_k \neq 0, k = 1, \cdots, n$, A的LU分解存在且唯一。

假设存在两个分解$A = L_1 U_1 = L_2 U_2$

矩阵的三角分解

定理5.2 如果$\Delta_k \neq 0, k = 1, \cdots, n$, A的LU分解存在且唯一。

假设存在两个分解$A = L_1U_1 = L_2U_2$

$$L_1U_1 \quad = \quad L_2U_2$$

矩阵的三角分解

定理5.2 如果$\Delta_k \neq 0, k = 1, \cdots, n$, A的LU分解存在且唯一。

假设存在两个分解$A = L_1U_1 = L_2U_2$

$$L_2^{-1}L_1U_1 \qquad = L_2^{-1}L_2U_2$$

矩阵的三角分解

定理5.2 如果$\Delta_k \neq 0, k = 1, \cdots, n$, A的LU分解存在且唯一。

假设存在两个分解$A = L_1U_1 = L_2U_2$

$$L_2^{-1}L_1U_1U_1^{-1} = L_2^{-1}L_2U_2U_1^{-1}$$

矩阵的三角分解

定理5.2 如果$\Delta_k \neq 0, k = 1, \cdots, n$, A的LU分解存在且唯一。

假设存在两个分解$A = L_1U_1 = L_2U_2$

$$L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$$

矩阵的三角分解

定理5.2 如果$\Delta_k \neq 0, k = 1, \cdots, n$, A的LU分解存在且唯一。

假设存在两个分解$A = L_1U_1 = L_2U_2$

$$L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$$

单位下三角矩阵什么时候等于上三角矩阵?

矩阵的三角分解

定理5.2 如果$\Delta_k \neq 0, k = 1, \cdots, n$, A的LU分解存在且唯一。

假设存在两个分解$A = L_1U_1 = L_2U_2$

$$L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1} = I$$

矩阵的三角分解

定理5.2 如果$\Delta_k \neq 0, k = 1, \cdots, n$, A的LU分解存在且唯一。

假设存在两个分解$A = L_1U_1 = L_2U_2$

$$L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1} = I$$

$$L_2 = L_1, \quad U_2 = U_1.$$

矩阵的三角分解

定理5.2 如果$\Delta_k \neq 0, k = 1, \cdots, n$, A的LU分解存在且唯一。

假设存在两个分解$A = L_1U_1 = L_2U_2$

$$L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1} = I$$

$$L_2 = L_1, \quad U_2 = U_1.$$

定理5.3 如果A的所有顺序主子式非零，

(1) $A = LDR$分解唯一，L、R为单位上、下三角矩阵，D为对角矩阵(LDR分解);

矩阵的三角分解

定理5.2 如果$\Delta_k \neq 0, k=1,\cdots,n$, A的LU分解存在且唯一。

假设存在两个分解$A = L_1U_1 = L_2U_2$

$$L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1} = I$$

$$L_2 = L_1, \quad U_2 = U_1.$$

定理5.3 如果A的所有顺序主子式非零,

(1) $A = LDR$分解唯一, L、R为单位上、下三角矩阵, D为对角矩阵(LDR分解);

(2) $A = \bar{L}\bar{U}$分解唯一, $\bar{L}$为下三角矩阵, $\bar{U}$为单位上三角矩阵(Crout分解)。

三角分解紧凑格式

例5.3 利用三角分解求解$Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

三角分解紧凑格式

例5.3 利用三角分解求解$Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} = LU$$

三角分解紧凑格式

例5.3 利用三角分解求解$Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} = LU$$

三角分解紧凑格式

例5.3 利用三角分解求解$Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} = LU$$

三角分解紧凑格式

例5.3 利用三角分解求解$Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} = LU$$

三角分解紧凑格式

例5.3 利用三角分解求解$Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} = LU$$

三角分解紧凑格式

例5.3 利用三角分解求解$Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = LU$$

三角分解紧凑格式

例5.3 利用三角分解求解$Ax=b$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = LU$$

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b$$

三角分解紧凑格式

例5.3 利用三角分解求解$Ax=b$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = LU$$

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow Ly = b,\ Ux = y$$

三角分解紧凑格式

例5.3 利用三角分解求解$Ax=b$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = LU$$

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow Ly = b,\ Ux = y$$

$$Ly = b \Rightarrow y = (4, 3, 2)^T$$

三角分解紧凑格式

例5.3 利用三角分解求解$Ax=b$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = LU$$

$$Ax=b \Leftrightarrow LUx=b \Leftrightarrow Ly=b,\ Ux=y$$

$$Ly=b \Rightarrow y=(4,3,2)^T$$

$$Ux=y \Rightarrow x=(1,1,1)^T$$

对称正定矩阵的Cholesky分解

例5.3 利用Cholesky分解求解$Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

对称正定矩阵的Cholesky分解

例5.3 利用Cholesky分解求解$Ax=b$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 0 & 0 \\ & & 0 \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} = LL^T$$

对称正定矩阵的Cholesky分解

例5.3 利用Cholesky分解求解$Ax=b$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ & & 0 \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} = LL^T$$

对称正定矩阵的Cholesky分解

例5.3 利用Cholesky分解求解$Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & & 0 \\ -1 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} = LL^T$$

对称正定矩阵的Cholesky分解

例5.3 利用Cholesky分解求解$Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} = LL^T$$

对称正定矩阵的Cholesky分解

例5.3 利用Cholesky分解求解$Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} = LL^T$$

对称正定矩阵的Cholesky分解

例5.3 利用Cholesky分解求解$Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = LL^T$$

对称正定矩阵的Cholesky分解

例5.3 利用Cholesky分解求解$Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = LL^T$$

$$Ax = b \Leftrightarrow LL^T x = b$$

对称正定矩阵的Cholesky分解

例5.3 利用Cholesky分解求解$Ax=b$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = LL^T$$

$$Ax = b \Leftrightarrow LL^T x = b \Leftrightarrow Ly = b,\ L^T x = y$$

对称正定矩阵的Cholesky分解

例5.3 利用Cholesky分解求解$Ax=b$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = LL^T$$

$$Ax = b \Leftrightarrow LL^T x = b \Leftrightarrow Ly = b,\ L^T x = y$$

$$Ly = b \Rightarrow y = (2, -1, 3)^T$$

对称正定矩阵的Cholesky分解

例5.3 利用Cholesky分解求解$Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = LL^T$$

$$Ax = b \Leftrightarrow LL^T x = b \Leftrightarrow Ly = b,\ L^T x = y$$

$$Ly = b \Rightarrow y = (2, -1, 3)^T$$

$$L^T x = y \Rightarrow x = (1, 1, 1)^T$$

矩阵三角分解的MatLab调用

```
>> A = [ 2 1 1;
         2 3 2;
         2 3 4];
```

矩阵三角分解的MatLab调用

```
>> A = [ 2 1 1;
         2 3 2;
         2 3 4];
>> [l,u] = lu(A)
```

矩阵三角分解的MatLab调用

```
>> A = [ 2 1 1;
         2 3 2;
         2 3 4];
>> [l,u] = lu(A)
l =

    1      0      0

    1      1      0

    1      1      1


u =

    2      1      1

    0      2      1

    0      0      2
```

矩阵三角分解的MatLab调用

```
>> A = [ 4   2   -2
         2   2   -3
        -2  -3   14 ];
```

矩阵三角分解的MatLab调用

```
>> A = [ 4   2   -2
         2   2   -3
        -2  -3   14 ];
>> L = chol(A)
```

矩阵三角分解的MatLab调用

```
>> A = [ 4  2  -2
         2  2  -3
        -2 -3  14 ];
>> L = chol(A)
L =
    2     1    -1
    0     1    -2
    0     0     3
```

矩阵三角分解的MatLab调用

```
>> A = [ 4  2  -2
         2  2  -3
        -2 -3  14 ];
>> L = chol(A)
L =
     2     1    -1
     0     1    -2
     0     0     3
>> b = [4 1 9]';
>> L = L';
>> x = L'\ (L\b)
```

矩阵三角分解的MatLab调用

```
>> A = [ 4   2   -2
         2   2   -3
        -2  -3   14 ];
>> L = chol(A)
L =
    2      1     -1
    0      1     -2
    0      0      3
>> b = [4 1 9]';
>> L = L';
>> x = L'\ (L\b)
x =
     1
     1
     1
```

三对角矩阵的三角分解—追赶法

例5.5 用追赶法求解下面的方程

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

三对角矩阵的三角分解—追赶法

例5.5 用追赶法求解下面的方程

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & & & \\ -1 & \times & & \\ & -2 & \times & \\ & & -3 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \times & & \\ & 1 & \times & \\ & & 1 & \times \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

三对角矩阵的三角分解—追赶法

例5.5 用追赶法求解下面的方程

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \times & & \\ & -2 & \times & \\ & & -3 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \times & & \\ & 1 & \times & \\ & & 1 & \times \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

三对角矩阵的三角分解—追赶法

例5.5 用追赶法求解下面的方程

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \times & & \\ & -2 & \times & \\ & & -3 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & \times & \\ & & 1 & \times \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

三对角矩阵的三角分解—追赶法

例5.5 用追赶法求解下面的方程

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \times & \\ & & -3 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & \times & \\ & & 1 & \times \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

三对角矩阵的三角分解—追赶法

例5.5 用追赶法求解下面的方程

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \times & \\ & & -3 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & -\frac{4}{5} & \\ & & 1 & \times \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

三对角矩阵的三角分解—追赶法

例5.5 用追赶法求解下面的方程

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \frac{12}{5} & \\ & & -3 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & -\frac{4}{5} & \\ & & 1 & \times \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

三对角矩阵的三角分解—追赶法

例5.5 用追赶法求解下面的方程

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \frac{12}{5} & \\ & & -3 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & -\frac{4}{5} & \\ & & 1 & -\frac{5}{4} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

三对角矩阵的三角分解—追赶法

例5.5 用追赶法求解下面的方程

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \frac{12}{5} & \\ & & -3 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & -\frac{4}{5} & \\ & & 1 & -\frac{5}{4} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

三对角矩阵的三角分解—追赶法

$$\begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \frac{12}{5} & \\ & & -3 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

三对角矩阵的三角分解—追赶法

$$\begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \frac{12}{5} & \\ & & -3 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{8}{5} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

三对角矩阵的三角分解—追赶法

$$\begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \frac{12}{5} & \\ & & -3 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{8}{5} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & -\frac{4}{5} & \\ & & 1 & -\frac{5}{4} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

三对角矩阵的三角分解—追赶法

$$\begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \frac{12}{5} & \\ & & -3 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{8}{5} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & -\frac{4}{5} & \\ & & 1 & -\frac{5}{4} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

三对角矩阵的三角分解—追赶法

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & & & \\ -1 & \times & & \\ & -2 & \times & \\ & & -3 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \times & & \\ & 1 & \times & \\ & & 1 & \times \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \times & & & \\ -1 & \times & & \\ & -2 & \times & \\ & & -3 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \times & & \\ & 1 & \times & \\ & & 1 & \times \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix}$$

三对角矩阵的三角分解—追赶法

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \times & & \\ & -2 & \times & \\ & & -3 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \times & & \\ & 1 & \times & \\ & & 1 & \times \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \times & & & \\ -1 & \times & & \\ & -2 & \times & \\ & & -3 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \times & & \\ & 1 & \times & \\ & & 1 & \times \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix}$$

三对角矩阵的三角分解—追赶法

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \times & & \\ & -2 & \times & \\ & & -3 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \times & & \\ & 1 & \times & \\ & & 1 & \times \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \times & & \\ & -2 & \times & \\ & & -3 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \times & & \\ & 1 & \times & \\ & & 1 & \times \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix}$$

三对角矩阵的三角分解—追赶法

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \times & & \\ & -2 & \times & \\ & & -3 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \times & & \\ & 1 & \times & \\ & & 1 & \times \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \times & & \\ & -2 & \times & \\ & & -3 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \times & & \\ & 1 & \times & \\ & & 1 & \times \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix}$$

三对角矩阵的三角分解—追赶法

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \times & & \\ & -2 & \times & \\ & & -3 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & \times & \\ & & 1 & \times \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \times & & \\ & -2 & \times & \\ & & -3 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & \times & \\ & & 1 & \times \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix}$$

三对角矩阵的三角分解—追赶法

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \times & \\ & & -3 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & \times & \\ & & 1 & \times \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \times & & \\ & -2 & \times & \\ & & -3 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & \times & \\ & & 1 & \times \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix}$$

三对角矩阵的三角分解—追赶法

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \times & \\ & & -3 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & \times & \\ & & 1 & \times \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \times & \\ & & -3 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & \times & \\ & & 1 & \times \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix}$$

三对角矩阵的三角分解—追赶法

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \times & \\ & & -3 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & \times & \\ & & 1 & \times \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \times & \\ & & -3 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{8}{5} \\ \times \\ \times \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & \times & \\ & & 1 & \times \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix}$$

三对角矩阵的三角分解—追赶法

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \times & \\ & & -3 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & -\frac{4}{5} & \\ & & 1 & \times \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \times & \\ & & -3 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{8}{5} \\ \times \\ \times \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & -\frac{4}{5} & \\ & & 1 & \times \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix}$$

三对角矩阵的三角分解—追赶法

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \frac{12}{5} & \\ & & -3 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & -\frac{4}{5} & \\ & & 1 & \times \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \times & \\ & & -3 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{8}{5} \\ \times \\ \times \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & -\frac{4}{5} & \\ & & 1 & \times \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix}$$

三对角矩阵的三角分解—追赶法

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \frac{12}{5} & \\ & & -3 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & -\frac{4}{5} & \\ & & 1 & \times \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \frac{12}{5} & \\ & & -3 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{8}{5} \\ \times \\ \times \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & -\frac{4}{5} & \\ & & 1 & \times \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix}$$

三对角矩阵的三角分解—追赶法

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \frac{12}{5} & \\ & & -3 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & -\frac{4}{5} & \\ & & 1 & \times \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \frac{12}{5} & \\ & & -3 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{8}{5} \\ \frac{1}{2} \\ \times \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & -\frac{4}{5} & \\ & & 1 & \times \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix}$$

三对角矩阵的三角分解—追赶法

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \frac{12}{5} & \\ & & -3 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & -\frac{4}{5} & \\ & & 1 & -\frac{5}{4} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \frac{12}{5} & \\ & & -3 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{8}{5} \\ \frac{1}{2} \\ \times \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & -\frac{4}{5} & \\ & & 1 & -\frac{5}{4} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix}$$

三对角矩阵的三角分解—追赶法

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \frac{12}{5} & \\ & & -3 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & -\frac{4}{5} & \\ & & 1 & -\frac{5}{4} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \frac{12}{5} & \\ & & -3 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{8}{5} \\ \frac{1}{2} \\ \times \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & -\frac{4}{5} & \\ & & 1 & -\frac{5}{4} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix}$$

三对角矩阵的三角分解—追赶法

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \frac{12}{5} & \\ & & -3 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & -\frac{4}{5} & \\ & & 1 & -\frac{5}{4} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \frac{12}{5} & \\ & & -3 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{8}{5} \\ \frac{1}{2} \\ \times \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & -\frac{4}{5} & \\ & & 1 & -\frac{5}{4} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix}$$

三对角矩阵的三角分解—追赶法

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \frac{12}{5} & \\ & & -3 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & -\frac{4}{5} & \\ & & 1 & -\frac{5}{4} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \frac{12}{5} & \\ & & -3 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{8}{5} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & -\frac{4}{5} & \\ & & 1 & -\frac{5}{4} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix}$$

三对角矩阵的三角分解—追赶法

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \frac{12}{5} & \\ & & -3 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & -\frac{4}{5} & \\ & & 1 & -\frac{5}{4} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \frac{12}{5} & \\ & & -3 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{8}{5} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & -\frac{4}{5} & \\ & & 1 & -\frac{5}{4} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ 2 \end{bmatrix}$$

三对角矩阵的三角分解—追赶法

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \frac{12}{5} & \\ & & -3 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & -\frac{4}{5} & \\ & & 1 & -\frac{5}{4} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \frac{12}{5} & \\ & & -3 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{8}{5} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & -\frac{4}{5} & \\ & & 1 & -\frac{5}{4} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

三对角矩阵的三角分解—追赶法

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \frac{12}{5} & \\ & & -3 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & -\frac{4}{5} & \\ & & 1 & -\frac{5}{4} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \frac{12}{5} & \\ & & -3 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{8}{5} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & -\frac{4}{5} & \\ & & 1 & -\frac{5}{4} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

三对角矩阵的三角分解—追赶法

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \frac{12}{5} & \\ & & -3 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & -\frac{4}{5} & \\ & & 1 & -\frac{5}{4} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & \frac{5}{2} & & \\ & -2 & \frac{12}{5} & \\ & & -3 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{8}{5} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & -\frac{4}{5} & \\ & & 1 & -\frac{5}{4} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$