文章编号:1003－207(2014)06－0134－07

方案有不确定偏好的区间数相对熵群决策方法

刘小弟[1,2]，朱建军[1]，刘思峰[1]

(1. 南京航空航天大学经济与管理学院，江苏 南京 211106；
2. 安徽工业大学数理学院，安徽 马鞍山 243002)

摘　要：研究了属性值是区间数并且已知方案偏好信息的多属性群决策问题。建立了每个方案客观偏好值与主观偏好值偏差的相对熵测度矩阵；基于客观信息和方案偏好信息的相对熵建立了属性权重模型；建立了一个新的区间数比较的可能度公式，基于可能度公式给出了方案排序方法，算例说明方法可行性。

关键词：群决策；区间数；相对熵；可能度

中图分类号：C934　　　**文献标识码**：A

1 引言

由于现实问题的复杂性、不确定性、人类思维的模糊性，以及决策者个人偏好的差异，采用确定的偏好形式来刻画复杂问题往往是不现实的，决策信息常常以区间数等形式来表示，研究方向集中在区间数的多属性决策、区间数运算法则、区间数大小比较等方面[1-8]。区间数的比较在不确定性决策中起着重要的作用，很多文献进行了区间数的大小比较研究，Facchinetti 等[9]提出区间数比较的可能度法，达庆利等[10]、徐泽水等[11]给出与之等价的可能度公式，张全等[12]基于概率论的视角，Kunda[13]定义一种模糊左关系来比较两个区间数，要求区间数服从一定的分布(如均匀分布等)。Sengupta 等[14]定义一种可接受度法比较区间数，难点在于这种方法得到的结果不具有互补性。Wang Yingming 等[15]通过比较区间端点位置关系，给出了一种排序公式。总体来看，基于可能度的排序公式应用较为广泛，但现有公式有的应用范围有限，有的形式较为复杂，计算量大。

在管理实践中，决策者往往通过一些途径获得方案的偏好信息，对方案有偏好的多属性决策问题引起了人们的重视，Fan Zhiping 等[16]研究了决策者对方案偏好信息以互补判断矩阵形式给出的决策方法。Xu Zeshui[17]利用投影模型研究了偏好信息为实数的多属性决策问题。徐泽水做了一系列研究[18-21]，对于方案的偏好信息为区间数的多属性决策问题，提出一种相离度的方法；研究方案偏好信息为互补和互反判断矩阵两种形式的多属性决策问题，提出一种基于目标规划模型的决策方法；针对属性值是三角模糊数形式，提出一种基于相似度的对方案有偏好的多属性决策方法；针对 Fan Zhiping 等[16]中存在的问题，提出利用线性转化函数将决策信息转换为互补判断矩阵，建立优化模型，进而给出一种方案排序方法。刘树林，汪寿阳[22]给出一种方案优劣次序的方法。卫贵武等[23]针对方案偏好形式为区间数，提出一种灰色关联分析的决策方法。刘於勋等[24]对方案偏好值为梯形模糊数形式，提出一种基于梯形模糊数距离期望值的多维偏好群决策模型。Xu Zeshui[25]研究了属性值为区间数，决策者对属性的偏好以区间效用值、区间模糊偏好关系、区间乘性偏好关系形式给出的决策问题，通过用期望值表示属性值，建立优化模型获得属性权重，进而对方案排序。Xu Zeshui 等[26]针对属性值是精确数，决策者对方案的偏好为区间效用值、区间模糊偏好关系、区间乘性偏好关系的形式，通过主客观信息是否一致化，建立目标规划模型获得权重范围，最后给出一种方案的排序方法。相对熵的概念及优化原

收稿日期：2012－10－26；**修订日期**：2013－03－25

基金项目：国家自然科学基金资助项目(71171112)；江苏省高校哲学社会科学重点项目(2012ZDIXM007)；江苏省高校哲学社会科学重点研究基地重大项目(2012JDXM003)；中央高校基本科研业务费专项资金(NS2014086)；江苏省普通高校研究生科研创新计划项目(CXLX13_171)；广义虚拟经济研究专项(GX2013－1017CM)；安徽工业大学青年教师科研基金资助课题(QZ201321)

作者简介：刘小弟(1981－)，男(汉族)，安徽合肥人，南京航空航天大学经济与管理学院，讲师，博士，研究方向：多属性决策、复杂系统建模等.

理已经被成功地应用在决策分析等方面，许多学者不断对此进行研究，已经得到了许多很好的研究成果[27-33]，邱菀华[27]、Andrew 等[28]研究了相对熵并讨论了其性质，Chen Huayou 等[29]将相对熵应用于群决策中对方案进行排序，Lai 等[30]将相对熵理论应用到信号处理中。吕跃进等[31]基于相对熵理论，结合乘性和加性互补判断矩阵，获得新的排序方法，赵萌等[32-33]利用被评价方案与理想方案和负理想方案的相对熵，定义一种新的与理想方案的贴近度。现有文献研究表明，对方案有偏好的研究集中在决策者提供单个决策矩阵，对属性或方案有不同偏好形式的情形，但对于决策者提供多个决策矩阵的方案偏好群决策研究较少，而属性值和方案的偏好值均为区间数且有多个决策矩阵的多属性群决策问题鲜有报道，从复杂问题的决策过程来看，这种问题具有较大的研究价值。

在现有研究的基础上，本文将相对熵概念引入到对方案偏好值和属性值均为区间数的多属性群决策中，通过每个方案的客观偏好值对主观偏好值的相对熵最小，建立优化决策模型；之后提出一个新的区间数比较方法，由此解决区间型多属性决策的方案排序问题。

2　预备知识

2.1　区间数比较的可能度公式

设 R 为实数集，$\tilde{a}=[a^L,a^U]$ 为区间数，其中 $a^L\leqslant a^U$，且 $a^L,a^U\in R$. 当 $a^L=a^U$ 时，则 $\tilde{a}$ 退化为一个实数。为了便于计算，下面引入区间数的运算法则[34]：

设 $\tilde{a}=[a^L,a^U]$ 和 $\tilde{b}=[b^L,b^U]$，$\lambda\geqslant 0$，则：

(1) $\tilde{a}=\tilde{b}$ 当且仅当 $a^L=b^L,a^U=b^U$

(2) $\tilde{a}+\tilde{b}=[a^L+b^L,a^U+b^U]$

(3) $\lambda\tilde{a}=[\lambda a^L,\lambda a^U]$，$\lambda\geqslant 0$. 特别地，当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\tilde{a}=0$

为了对区间数比较，给出两个区间数比较的可能度公式[9-10,11,15]，见定义 1。

定义 1 当 $\tilde{a},\tilde{b}$ 为区间数时，设 $\tilde{a}=[a^L,a^U]$，$\tilde{b}=[b^L,b^U]$，$l_{\tilde{a}}=a^U-a^L$，$l_{\tilde{b}}=b^U-b^L$，

$$p_1(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})=\min\{\max(\frac{a^U-b^L}{l_a+l_b},0),1\}\qquad(1)$$

$$p_2(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})=\frac{\max\{0,l_{\tilde{a}}+l_{\tilde{b}}-\max(b^U-a^L,0)\}}{l_{\tilde{a}}+l_{\tilde{b}}}\qquad(2)$$

$$p_3(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})=\frac{\min\{l_{\tilde{a}}+l_{\tilde{b}},\max(a^U-b^L,0)\}}{l_{\tilde{a}}+l_{\tilde{b}}}\qquad(3)$$

$$p_4(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})=\frac{\max\{0,a^U-b^L\}-\max\{0,a^L-b^U\}}{l_{\tilde{a}}+l_{\tilde{b}}}\qquad(4)$$

为 $\tilde{a}\geqslant\tilde{b}$ 的可能度，且记 $\tilde{a},\tilde{b}$ 的次序关系为 $\tilde{a}\geqslant_p\tilde{b}$

根据上述定义，可能度公式对于下列结论成立。

引理 1[3]　设 $\tilde{a}=[a^L,a^U]$ 和 $\tilde{b}=[b^L,b^U]$，则：

(1) $0\leq p(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})\leqslant 1$

(2) $p(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})=1$ 当且仅当 $b^U\leqslant a^L$

(3) $p(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})=0$ 当且仅当 $a^U\leqslant b^L$

(4)（互补性）$p(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})+p(\tilde{b}\geqslant\tilde{a})=1$. 特别地，$p(\tilde{a}\geqslant\tilde{a})=\frac{1}{2}$

(5) $p(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})\geqslant\frac{1}{2}$ 当且仅当 $a^U+a^L\geqslant b^U+b^L$。特别地，$p(\tilde{a}\geqslant\tilde{d})=\frac{1}{2}$，当且仅当 $a^U+a^L=b^U+b^L$

(6)（传递性）对于三个区间数 $\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}$，若 $p(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})\geqslant\frac{1}{2}$，$p(\tilde{b}\geqslant\tilde{c})\geqslant\frac{1}{2}$，则 $p(\tilde{a}\geqslant\tilde{c})\geqslant\frac{1}{2}$

2.2　相对熵

在将相对熵用于优化模型之前，为方便起见，下面引入离散形式的相对熵及其主要性质。

定义 2[27] 设 $x_i,y_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n$，且 $1=\sum_i^n x_i\geqslant y_i$，则称 $h(x,y)=\sum_{i=1}^n x_i\log\frac{x_i}{y_i}\geqslant 0$ 为 X 相对于 Y 的相对熵，其中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$。

如果函数 $h(x,y)$ 为 X,Y 的相对熵，则其满足以下性质[27]：

(1) $\sum_{i=1}^n x_i\log\frac{x_i}{y_i}\geqslant 0$；

(2) $\sum_{i=1}^n x_i\log\frac{x_i}{y_i}=0$，当且仅当 $x_i=y_i,\forall i$.

特别地，当 $n=2$ 时，$h(x,y)=x\log\frac{x}{y}+(1-x)\log\frac{1-x}{1-y}$。由上述性质可知，当 X,Y 完全相同时，其相对熵达到了最小，所以相对熵可以用来度量二者的差异或符合程度。

赵萌等[33]将相对熵应用到方案排序中，并给出了区间型相对熵公式：设 $\tilde{a}=[a^L,a^U]$，$\tilde{b}=[b^L,b^U]$，则：

$$h(\tilde{a},\tilde{b})=h(a^L,b^L)+h(a^U,b^U)\qquad(5)$$

其中：

$$h(a^L,b^L)=a^L\log\frac{a^L}{b^L}+(1-a^L)\log\frac{1-a^L}{1-b^L} \tag{6}$$

$$h(a^U,b^U)=a^U\log\frac{a^U}{b^U}+(1-a^U)\log\frac{1-a^U}{1-b^U} \tag{7}$$

相对熵并不对称，所以它不满足距离的公理化定义，从而也就不是真正意义上的距离。然而将相对熵视为两个系统的距离比欧式距离、海明距离等几何距离更有用，它可以有效解决两方案在中垂线上利用 TOPSIS 法无法排序等问题[32]，从而具有更高的分辨率，可以提高决策的辨别能力。

3 对方案有偏好的区间数群决策方法

对于方案有偏好的区间数多属性群决策问题，可以描述如下：

设 $Y=\{Y_1,Y_2,\cdots Y_m\}$ 为方案集，$G=\{G_1,G_2,\cdots G_n\}$ 为属性集，$D=\{d_1,d_2,\cdots d_l\}$ 为决策者集，$A^k=(\tilde{a}_{ij}^k)_{m\times n}$ 为决策者 d_k 对决策方案集 Y 在属性集 G 下的区间数决策矩阵，决策者 d_k 对方案集 Y 在属性集 G 下的偏好为区间数 $\tilde{\varphi}_i^k(i=1,2,\cdots,m,k=1,2,\cdots,l)$，决策者 d_k 的权重为 $\lambda_k\in[0,1]$，$\sum_{k=1}^{l}\lambda_k=1$，属性权重向量为 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots\omega_n)$，$\omega_j\in[0,1]$，$\sum_{j=1}^{n}\omega_j=1$，$W$ 为已知部分权重信息的权重集合，$\omega_j\in W$。

方案有偏好情景下的区间数群决策方法的研究难点在于以下 2 个方面：(1)如何充分利用方案的属性信息和方案的整体偏好信息，在此基础上对决策的关键要素进行分析，确定客观的属性权重；(2)如何基于不确定的偏好信息进行方案的有效排序。对此，本文利用相对熵建立决策模型确定属性权重，再通过一个简洁的区间数排序公式来对区间数进行比较。

3.1 区间数规范化方法

为了消除不同量纲对决策结果的影响，需要对每一个决策矩阵进行规范化处理，对效益型和成本型属性按如下方法处理[3]，得到规范化矩阵为 $R^k=(\tilde{r}_{ij}{}^k)_{m\times n}$。

效益型：

$$(r_{ij}^L)^k=(a_{ij}^L)^k\sqrt{\sum_{i=1}^{m}((a_{ij}{}^U)^k)^2}$$

$$(r_{ij}^U)^k=(a_{ij}^U)^k/\sqrt{\sum_{i=1}^{m}((a_{ij}{}^L)^k)^2},i=1,2,\cdots m,j=1,2,\cdots n \tag{8}$$

成本型：

$$(r_{ij}^L)^k=1/(a_{ij}^U)^k/\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(1/(a_{ij}{}^L)^k)^2}$$

$$(r_{ij}^U)^k=1/(a_{ij}^L)^k/\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(1/(a_{ij}{}^U)^k)^2},i=1,2,\cdots m,j=1,2,\cdots n \tag{9}$$

3.2 新的区间数排序公式

为了得到区间数排序的公式，本文基于可能度的方法，从区间数表达信息的模糊性出发，充分考虑两个区间端点差异的各种情形(见图(1))，定义一种反映一个区间数大于另一个区间数程度的量，并以此为基础，给出一个形式简洁，便于计算的可能度公式。

定义 3 设 $\tilde{a}=[a^L,a^U]$，$\tilde{b}=[b^L,b^U]$，$l_{\tilde{a}}$，$l_{\tilde{b}}$ 表示这两个区间数的长度，称：

$$p_5(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})=\frac{1}{2}(1+\frac{|a^U-b^L|-|a^L-b^U|}{l_{\tilde{a}}+l_{\tilde{b}}}) \tag{10}$$

为 $\tilde{a}\geqslant\tilde{b}$ 的可能度。

定义 3 的合理性说明如下，对于图(1)中情形<1>有 $a^L<a^U\leqslant b^L<b^U$，此时，$p_5(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})=0$。对于情形<2>有 $a^U>a^L\geqslant b^U>b^L$，此时，$p_5(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})=1$。对于情形<3>有 $a^L<b^U,a^U>b^L$，此时，$p_5(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})=\frac{a^U-b^L}{l_{\tilde{a}}+l_{\tilde{b}}}$，综合上述三种情形可得，$p_5(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})=\frac{1}{2}(1+\frac{|a^U-b^L|-|a^L-b^U|}{l_{\tilde{a}}+l_{\tilde{b}}})$。

图 1 两区间端点关系

为了书写简便，用 p_i 代替 $p_i(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})$。对于可能度公式 p_5，容易证明其满足引理 1 中的(1)—(6)，下面证明它与可能度公式 p_1,p_2,p_3,p_4 等价。

定理 1 可能度公式 p_5 与 $p_1,\cdots,p_4$ 等价，即 $p_1\Leftrightarrow p_2\Leftrightarrow p_3\Leftrightarrow p_4\Leftrightarrow p_5$。

证明：徐泽水等[11,35]证明了 $p_1\Leftrightarrow p_2\Leftrightarrow p_3$，$p_1\Leftrightarrow p_2\Leftrightarrow p_3\Leftrightarrow p_4$，下面证明 p_5 与其余也等价。

<1> $p_4\Leftrightarrow p_5$

因为 $\max\{a,b\} = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$

$\min\{a,b\} = \dfrac{a+b-|a-b|}{2}, a,b \in R$

$$p_4(\tilde{a} \geqslant \tilde{b}) = \frac{\max\{0,a^U-b^L\}-\max\{0,a^L-b^U\}}{l_{\tilde{a}}+l_{\tilde{b}}} =$$

$$\frac{a^U-b^L+|a^U-b^L|-(a^L-b^U+|a^L-b^U|)}{2(l_{\tilde{a}}+l_{\tilde{b}})}$$

$$= \frac{l_{\tilde{a}}+l_{\tilde{b}}+|a^U-b^L|-|a^L-b^U|}{2(l_{\tilde{a}}+l_{\tilde{b}})}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{|a^U-b^L|-|a^L-b^U|}{l_{\tilde{a}}+l_{\tilde{b}}}\right) = p_5$$

综上可得可能度公式 p_5 与 $p_1,\cdots,p_4$ 等价，证毕。

基于定理 1，可以采用定义 3 来比较两个区间数的大小，计算方便，容易理解。

3.3 属性权重的确定

属性权重的确定研究方法众多，但其值确定相当敏感，本文提出了基于方案有偏好情景下的区间数属性值的属性权重确定模型。对于属性值为区间数的多属性群决策问题，若决策者 d^k 对方案 Y_i 有一定的主观偏好，并且偏好值为区间数 $\varphi_i^k = [(\varphi_i^L)^k,(\varphi_i^U)^k]$，规范化矩阵 $R^k = (\tilde{r_{ij}}^k)_{m\times n}$ 中的属性值 $\tilde{r_{ij}}^k = [(r_{ij}^L)^k,(r_{ij}^U)^k]$ 是决策者 d^k 在属性 G_j 下对方案 X_i 的客观偏好值。

由于各种条件的限制，主观偏好与客观偏好之间往往存在一定的偏差，为了使决策具有合理性，属性权重向量 ω 的选择应使决策者的主观偏好与客观偏好值的总偏差最少。基于相对熵的距离测度方式，在投影法[17]和其它几何距离测度方法失效或无法分辨时，仍能准确地给出方案排序[32]，因而提供的信息量更多，辨别力也更高，鉴于此，给出基于相对熵的权重确定模型：

$$\begin{cases} \min f(\omega) = \sum_{k=1}^{l}\lambda_k\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\Big[(r_{ij}{}^L)^k\log\dfrac{(r_{ij}{}^L)^k}{(\varphi_i{}^L)^k} + \\ (1-(r_{ij}{}^L)^k)\log\dfrac{1-(r_{ij}{}^L)^k}{1-(\varphi_i{}^L)^k} + (r_{ij}{}^U)k\log\dfrac{(r_{ij}{}^U)^k}{(\varphi_i{}^U)^k} + \\ (1-(r_{ij}{}^U)k)\log\dfrac{1-(r_{ij}{}^U)^k}{1-(\varphi_i{}^U)^k}\Big]\omega_j \\ s.t\ \omega_j \in W,\ \sum_{j=1}^{n}\omega_j = 1,\ \omega_j \geqslant 0 \end{cases} \tag{11}$$

以上模型可以通过 Lingo 等软件求出属性的权重向量 ω^*。对决策者 d_k 下的决策矩阵 $R^k = (\tilde{r_{ij}}^k)_{m\times n}$ 属性值进行集结，得到决策方案 Y_i 在决策者 d_k 下的综合属性值：

$$z_i{}^k(\omega) = \sum_{j=1}^{n}\omega_j\tilde{r}_{ij}{}^k,\ k=1,2,\cdots l,\ i=1,2,\cdots,m \tag{12}$$

$$z_i(\omega) = \sum_{k=1}^{l}\lambda_k z_i{}^k(\omega) \tag{13}$$

再利用(13)式得到决策方案 Y_i 在群决策下的综合属性值，其中 λ_k 为决策者的权重。由于方案 Y_i 的综合属性值仍为区间数，通过区间数排序公式(10)比较 $z_i(\omega)$ 的大小，得到可能度矩阵，之后对方案进行排序。

3.4 决策步骤

按照上述分析，给出一种对方案有偏好的区间数多属性群决策方法，具体步骤如下：

(1)按式(8)，(9)将决策矩阵 $A^k = (\tilde{a}_{ij}{}^k)_{m\times n}$ 转化为规范化矩阵 $R^k = (\tilde{r_{ij}}^k)_{m\times n}$.

(2)按式(11)基于相对熵求属性权重向量 ω^*。

(3)按式(12)，(13)计算各方案的综合属性值 $z_i(\omega), i = 1,2,\cdots,m$.

(4)按式(10)对 $z_i(\omega)$，$i = 1,2,\cdots,m$. 进行两两比较，得到可能度矩阵 P.

(5)对可能度矩阵 P 每行相加，按照每行和对方案排序[2]。

4 算例分析

例 1　对某个学院的四个系主任 $Y_i, i = 1,2,3,4$ 进行评估，需要考虑三个属性：G_1 教学，G_2 科研，G_3 服务，三位决策者 (d_1,d_2,d_3) 对各项属性分别打分(0－1 之间进行测度)，再进行统计处理，最终每个候选人(方案)在各属性下的属性值以区间数形式给出，具体见表 1—3。已知属性权重信息为 W：$\omega_1 \in [0.15,0.33]$，$\omega_2 \in [0.22,0.38]$，$\omega_3 \in [0.10,0.32]$，三位决策者的权重分别为：$\lambda_1 = 0.4, \lambda_2 = \lambda_3 = 0.3$。决策者 (d_1,d_2,d_3) 对各方案的主观偏好值分别为：

$$\tilde{\varphi}^1 = ([0.3,0.5],[0.5,0.6],[0.4,0.6],[0.4,0.5])^T$$

$$\tilde{\varphi}^2 = ([0.6,0.7],[0.3,0.5],[0.5,0.8],[0.4,0.6])^T$$

$$\tilde{\varphi}^3 = ([0.2,0.4],[0.4,0.8],[0.5,0.9],[0.6,0.7])^T$$

表 1　决策矩阵 A^1

	G_1	G_2	G_3
Y_1	[0.80,0.90]	[0.90,0.92]	[0.91,0.94]
Y_2	[0.85,0.92]	[0.88,0.91]	[0.90,0.91]
Y_3	[0.86,0.90]	[0.83,0.85]	[0.91,0.93]
Y_4	[0.92,0.95]	[0.91,0.93]	[0.84,0.87]

表 2 决策矩阵 A^2

	G_1	G_2	G_3
Y_1	[0.93,0.96]	[0.90,0.91]	[0.95,0.97]
Y_2	[0.90,0.92]	[0.94,0.96]	[0.90,0.92]
Y_3	[0.85,0.91]	[0.82,0.88]	[0.90,0.92]
Y_4	[0.91,0.93]	[0.90,0.92]	[0.85,0.88]

表 3 决策矩阵 A^3

	G_1	G_2	G_3
Y_1	[0.85,0.92]	[0.88,0.90]	[0.92,0.96]
Y_2	[0.88,0.91]	[0.90,0.95]	[0.89,0.91]
Y_3	[0.82,0.86]	[0.84,0.87]	[0.88,0.90]
Y_4	[0.88,0.92]	[0.87,0.91]	[0.86,0.90]

步骤 1 由于各属性均为效益型，按(9)式，得到规范化后的矩阵分别为 R^1,R^2,R^3。

表 4 规范化矩阵 R^1

	G_1	G_2	G_3
Y_1	[0.436,0.524]	[0.498,0.522]	[0.498,0.528]
Y_2	[0.463,0.536]	[0.487,0.517]	[0.493,0.511]
Y_3	[0.469,0.524]	[0.460,0.483]	[0.498,0.522]
Y_4	[0.501,0.553]	[0.504,0.528]	[0.460,0.488]

表 5 规范化矩阵 R^2

	G_1	G_2	G_3
Y_1	[0.500, 0.535]	[0.490,0.511]	[0.515,0.538]
Y_2	[0.484,0.512]	[0.512,0.539]	[0.488,0.511]
Y_3	[0.457,0.507]	[0.447,0.494]	[0.488,0.511]
Y_4	[0.489,0.518]	[0.490,0.516]	[0.460,0.489]

表 6 规范化矩阵 R^3

	G_1	G_2	G_3
Y_1	[0.471,0.536]	[0.485,0.516]	[0.501,0.541]
Y_2	[0.487,0.530]	[0.496,0.544]	[0.485,0.513]
Y_3	[0.454,0.501]	[0.463,0.498]	[0.479,0.507]
Y_4	[0.487,0.536]	[0.479,0.521]	[0.468,0.507]

步骤 2 首先按(5)式分别计算在各决策者 (d_1, d_2, d_3) 下，各方案的客观偏好对主观偏好的相对熵矩阵。

$$H(R^1,\tilde{\varphi}^1)=\begin{bmatrix}0.4232 & 0.8646 & 0.8706\\ 0.1115 & 0.1443 & 0.1629\\ 0.2160 & 0.3528 & 0.3207\\ 0.2645 & 0.2363 & 0.0077\end{bmatrix}$$

$$H(R^2,\tilde{\varphi}^2)=\begin{bmatrix}0.0804 & 0.1028 & 0.0726\\ 0.0744 & 0.1007 & 0.0775\\ 0.2172 & 0.2372 & 0.2084\\ 0.0300 & 0.0310 & 0.0325\end{bmatrix}$$

$$H(R^3,\tilde{\varphi}^3)=\begin{bmatrix}0.2222 & 0.2302 & 0.2649\\ 0.1988 & 0.1848 & 0.2202\\ 0.5129 & 0.5180 & 0.4964\\ 0.0853 & 0.1001 & 0.1168\end{bmatrix}$$

由(11)式列出优化模型：

$$\begin{cases}\min f(\omega)=0.8324\omega_1+1.0906\omega_2+0.9916\omega_3\\ s.t\ \omega_j\in W,\ \sum_{j=1}^{3}\omega_j=1,\ \omega_j\geqslant 0\end{cases}$$

由 LINGO 软件解得属性权重向量为 $\omega^*=(0.33,\ 0.35,\ 0.32)$。

步骤 3 按(12)，(13)式计算候选方案 Y_i 的综合属性值：

$z_1(\omega)=[0.4858,0.5273]$, $z_2(\omega)=[0.4878,0.5237]$,

$z_3(\omega)=[0.4686,0.5053]$, $z_4(\omega)=[0.4830,0.5182]$

步骤 4 为了对方案进行排序，先用(10)式求出 $z_i(\omega)(i=1,2,3,4,5)$ 两两比较的可能度矩阵：

$$P=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5103 & 0.7506 & 0.5776\\ 0.4897 & 0.5 & 0.7837 & 0.5724\\ 0.2494 & 0.2163 & 0.5 & 0.3102\\ 0.4224 & 0.4276 & 0.6898 & 0.5\end{bmatrix}$$

步骤 5 对可能度矩阵每行相加，得到：

$\bar{p}_1=2.3385$, $\bar{p}_2=2.3458$, $\bar{p}_3=1.2759$, $\bar{p}_4=2.0398$。

所以，$Y_2\succ_{0.4897}Y_1\succ_{0.5776}Y_4\succ_{0.6898}Y_3$，最优方案为 Y_2。

徐泽水等[18]、卫贵武等[23]处理的是属性值和方案偏好值均为区间数、单个决策矩阵的多属性决策问题，徐泽水等[18]利用方案在每个属性下的属性值与对应偏好值的偏差最小建立模型求属性权重，由于偏差模型是基于一种相离度来求属性权重，容易造成信息丢失，且分辨率不高。例如，区间数 $\tilde{a}=[0.1,0.2]$，$\tilde{b}=[0.7,0.8]$ 与 $\tilde{c}=[0.4,0.5]$ 的相离度分别为 $D(\tilde{a},\tilde{c})=|c^L-a^L|+|c^U-a^U|=0.6$，$D(\tilde{b},\tilde{c})=0.6$，若用相对熵可得到 $\tilde{a},\tilde{c}$ 与 $\tilde{b},\tilde{c}$ 的相对熵分别为 $h(\tilde{a},\tilde{c})=0.419$，$h(\tilde{b},\tilde{c})=0.377$，因而作为一种信息距离，相对熵提供的信息量更多，分辨率也更高。卫贵武等[23]中的灰关联方法没有考虑各个方案相比确切的可能度。

Xu Zeshui[25]研究了决策者对属性的偏好分别为区间效用值、区间模糊偏好关系、区间乘性偏好关系的群决策问题，方案的属性值为区间数，侧重的是对属性的不同偏好，但仍为单个决策矩阵。Xu Zeshui 等[26]研究了决策者对方案的偏好分别为区间效用值、区间模糊偏好关系、区间乘性偏好关系三种不同形式的群决策问题,侧重的是对方案的不同偏好,但针对的属性值为精确数,并且为单个决策矩阵情形。为了与文献[25][26]中的方法作比较,以本文决策矩阵 A^1 为例,经过规范化后,若利用文献[25]中的方法,将不确定决策矩阵转化为期望值决策矩阵,利用文献[26]中基于决策矩阵与区间效用值的模型,得到各方案的综合属性值为:$z_1=0.5010$,$z_2=0.5013$,$z_3=0.4924$,$z_4=0.5062$,所以,$Y_4\succ Y_2\succ Y_1\succ Y_3$。若利用本文基于相对熵的模型,可得各方案的综合属性值为:$z_1=[0.4822,0.5245]$,$z_2=[0.4830,0.5198]$,$z_3=[0.4753,0.5068]$,$z_4=[0.4882,0.5207]$,利用可能度比较公式得到两两比较的可能度矩阵,从而得到 $Y_4\succ_{0.5147}Y_1\succ_{0.5247}Y_2\succ_{0.6515}Y_3$。通过比较可以发现,两种方法所得的最优方案一致,但方案的排序略有不同,造成这种差异的主要原因在于,利用期望值表示属性值,即用精确数表示区间数,容易造成信息丢失,且没有充分考虑不确定信息导致的结果不确定性问题。

另外,对于可能度公式,与文献[12-13]相比,本文无需区间数相互独立且满足均匀分布的限定条件,并且计算量小。与 Sengupta[14]相比,具有良好的性质,如互补性等,与文献[9-10,11,15]相比,由于没有用取大取小算子定义的可能度公式,从而显得更加简洁、紧凑。

5　结语

本文对属性值、方案偏好均为区间数形式、属性权重不完全的多属性群决策问题进行了研究,提出一种新的解决该问题的方法—相对熵方法,利用相对熵获得各方案客观偏好值和主观偏好值的相对熵矩阵,建立单目标规划模型,进而得到属性权重。为比较两个区间数,给出一个新的可能度公式,该公式形式简单,易于计算,在方案择优排序方面得到了很好的应用,进一步丰富和完善了区间型多属性决策的理论。

参考文献:

[1] 朱建军. 群决策信息分析及集结模型研究[M]. 北京:科学出版社,2012.

[2] 卫贵武. 基于模糊信息的多属性决策理论与方法[M]. 北京:中国经济出版社,2010.

[3] 徐泽水. 不确定多属性决策方法及应用[M]. 北京:清华大学出版社,2004.

[4] 刘健,刘思峰. 属性值为区间数的多属性决策对象排序研究[J]. 中国管理科学,2010,18(3):90-94.

[5] Jiang C, Han X, Liu G R, et al. A nonlinear interval number programming method for uncertain optimization problems[J]. Europearn Journal of Operational Research, 2008, 188(1): 1-13.

[6] Sayadi M K, Heydari M, Shahanaghi K. Extention of VIKOR method for decision making problem with interval numbers[J]. Applied Mathematical Modelling, 2009, 33(5): 2257-2262.

[7] Chen S M, Sanguansat K. Analyzing fuzzy risk based on similarity measures between interval-valued fuzzy numbers[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2008,55(8):1670-1685.

[8] Kuo M S, Liang G S. A soft computing method of performance evaluation with MCDM based on interval-valued fuzzy numbers[J]. Applied soft computing, 2012, 12(1): 476-485.

[9] Facchinetti G, Ricci R G, Muzzioli S. Note on ranking fuzzy triangular numbers [J]. International Journal of Intelligent Systems, 1998, 13(7): 613-622.

[10] 达庆利,刘新旺. 区间数线性规划及其满意解[J]. 系统工程理论与实践,1999,19(4):3-7.

[11] 徐泽水,达庆利. 区间数排序的可能度法及其应用[J]. 系统工程学报,2003,18(1):67-70.

[12] 张全,樊治平,潘德惠. 不确定多属性决策中区间数的一种排序方法[J]. 系统工程理论与实践,1999,19(5):129-133.

[13] Kunda S. Min-transitivity of fuzzy leftness relationship and its application to decision making[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 86(3): 357-367.

[14] Sengupta A, Pal TK. On comparing interval numbers [J]. European Journal of Operational Research, 2000, 127(1): 28-43.

[15] Wang Yingming, Yang Jianbo, Xu Dongling. A preference aggregation method through the estimation of utility intervals [J]. Computers & operations research, 2005, 32(8): 2027-2049.

[16] Fan Zhiping, Ma Jian, Zhang Quan. An approach to multiple attribute decision making based on fuzzy preference information on alternatives[J]. Fuzzy Sets and Systems,2002, 131(1): 101-106.

[17] Xu Zeshui, Da Q L. Prejection method for uncertain multi-attribute decision making with preference information on alternatives[J]. International Journal of Information Technology & Decision Making,2004, 3(3):

429－434.

[18] 徐泽水．求解不确定型多属性决策问题的一种新方法[J]．系统工程学报，2002，17(2)：177－181.

[19] 徐泽水．部分权重信息下对方案有偏好的多属性决策法[J]．控制与决策，2004，19(1)：85－88.

[20] 徐泽水．对方案有偏好的三角模糊数型多属性决策方法研究[J]．系统工程与电子技术，2002，24(8)：9－12.

[21] 徐泽水．权重信息完全未知且对方案有偏好的多属性决策法[J]．系统工程理论与实践，2003，23(12)：100－103.

[22] 刘树林，汪寿阳．一个已知方案偏好信息的多属性决策新方法[J].系统工程理论与实践，1999，19(4)：12－15.

[23] 卫贵武，魏宇．对方案有偏好的区间数多属性灰色关联决策模型[J]．中国管理科学，2008，16(1)：158－162.

[24] 刘於勋，沈轶，谢妞妞．基于梯形模糊数期望值的多维偏好群决策模型[J]．控制与决策，2009，24(9)：1377－1340.

[25] Xu Zheshui. Multiple attribute group decision making with different formats of preference information on attributes[J]. IEEE Transactions on Systems，Man，and Cybernetics-Part B，2007，37(6)：1500－1511.

[26] Xu Zheshui，Chen Jian. MAGDM linear programming models with distinct uncertain preference structures [J]. IEEE Transactions on Systems，Man，and Cybernetics-Part B，2008，38(5)：1356－1370.

[27] 邱菀华．管理决策与应用熵学[M]．北京：机械工业出版社，2001.

[28] Andrew E B，Lim J，Shanthikumar G. Relative entropy，exponential utility，and robust dynamic pricing[J]. Operations Research，2007，55(2)，198－214.

[29] Chen Huayou，Zhou Ligang. A relative entropy approach to group decision making with interval reciprocal relations based on COWA operator[J]. Group Decision and Negotiation，2012，21(4)：585－599.

[30] Lai J，Ford J. Relative entropy rate based multiple hidden markov model approximation[J]. IEEE Transactions on signal process，2010，58(1)：165－174.

[31] 吕跃进，程宏涛，覃菊莹．基于相对熵的互补判断矩阵排序方法[J]．系统工程理论与实践，2011，31(7)：1328－1333.

[32] 赵萌，邱菀华，刘北上．基于相对熵的多属性决策排序方法[J]．控制与决策，2010，25(7)：1098－1011.

[33] 赵萌，邱菀华，何大义．区间型多属性决策的相对熵排序法[J].系统工程，2010，28(8)：70－74.

[34] Xu Ruoning，Zhai Xiaoyan. Extensions of the analytic hierarchy process in fuzzy environment[J]. Fuzzy Sets and Systems，1992. 52(3)：251－257.

[35] Xu Zeshui，Chen Jian. Some models for deriving the priority weights from interval fuzzy preference relations [J]. European Journal of Operational Research，2008，184(1)：266－280.

Group Decision-Making Method with Uncertain Preference Information on Alternatives by Interval Number Relative Entropy

LIU Xiao-di[1,2]，**ZHU Jian-jun**[1]，**LIU Si-feng**[1]

(1. College of Economics and Management，Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing 211106，China；

2. School of Mathematicsand Physics，Anhui University of Technology，Ma'anshan 243002，China)

Abstract：The problem of multiple attribute group decision making with interval numbers and preference information on alternatives is studied in this paper. Firstly，he relative entropy matrix for the deviation between objective preference and subjective preference value on each alternative is obtained. Then a mathematical model based on the relative entropy of objective and preference information on alternatives is constructed to obtain the attribute weights. Furthermore，a new probability degree formula for the comparison between two interval numbers is presented. Based on the formula，a method for ranking alternatives is given. Finally，a numerical example is given to verify the proposed method and to demonstrate its feasibility.

Key words：group decision-making；interval number；relative entropy；probability degree