文章编号: 1001-0920(2009)05-0797-04

一种利用切比雪夫逼近求解库存最优控制的方法

孙在冠, 李树荣
(中国石油大学(华东) 信息与控制工程学院, 山东 东营 257061)

摘 要: 针对供应链中库存随着需求的变化可能导致的积压和对生产(或采购)产生的不利影响,为更好地协调生产(或采购)并减少产品库存,研究了一类基于库存约束和动态时变需求下的多品种、多周期、多循环的生产与库存的最优控制模型. 结合最优控制理论,给出一种采用切比雪夫多项式逼近和高斯-切比雪夫数值积分对库存最优控制问题进行数值求解的方法. 实例分析表明该方法是可行的.

关键词: 切比雪夫逼近; 最优控制; 库存; 动态需求; 数值计算
中图分类号: F224.1 **文献标识码**: A

A method of solving optimal inventory control with Chebshev approximation

SUN Zai-guan, LI Shu-rong
(College of Information and Control Engineering, China University of Petroleum, Dongying 257061, China. Correspondent: SUN Zai-guan, E-mail: sunzaiguan@163.com)

Abstract: In view of the backlog that inventory may disturb well-balanced producing (or procurement cycle) process for time-varied demand, and in order to coordinate producing (or procurement cycle) with it better, meanwhile reduce the backlog of enterprise inventory, a production centered multi-item and multi-period production-inventory control model is formulated based on supply chain system for deteriorating items with time variable dynamic demands. Combined with optimal control theory, a method is proposed for the numerical computation of the optimal control problem, which uses a kind of Chebyshev polynomial and Gauss-Chebyshev approximations method.

Key words: Chebyshev approach; Optimal control; Inventory; Dynamic demand; Numerical computation

1 引 言

在库存的控制研究中, Harris[1] 提出了定常需求下的静态经济批量订货公式; Wanger 和 Whitin[2] 提出了基于可变需求的动态环境下的动态批量计划模型. 随后,越来越多的学者开始研究多产品、多阶段带能力约束的生产批量模型. 在大多数库存模型中,产品的价值假定为恒定不变,库存的补充与时间的关系也不必考虑. 而实际上,物品在存放期间会有物理上的损失或价值上的变化,且很多产品的库存补充均与时间有关. 考虑到上述情况, Balkhi[3,4] 研究了有限时域下易损产品的批量生产库存模型和最优化的方法; Zhou 等[5] 探讨了在时变需求下的可变排产策略; Benkherouf 等[6] 研究了一类易损物品的扩散库存模型; Worell[7] 应用多项式几何规划法分析了库存的控制模型; Maity 和 Maiti[8] 应用切比雪夫逼近方法解决了生产与库存的最优化问题.

本文研究一类在动态时变需求下的以库存控制为中心的多产品、多周期、多循环的生产(或采购)与库存模型的建立以及最优控制函数的求解. 在模型中的生产率和库存变化是时变函数,据此建立动态的最优控制模型. 考虑到利用庞特里亚金极大值原理的方法求解析解难度较大,因而采用高斯-切比雪夫多项式逼近的方法求其近似解.

2 切比雪夫逼近原理

2.1 切比雪夫多项式

称多项式 $T_n(x) = \cos(n\arccos x)$ 为 n 次的切比雪夫多项式. 其中: $-1 \leq x \leq 1$, $n = 0,1,\cdots$; 点 $x_k = \cos\frac{k}{n}\pi (k = 0,1,\cdots,n)$ 是 $T_n(x)$ 的切比雪夫

收稿日期: 2008-06-18; **修回日期**: 2008-09-25.
基金项目: 国家 973 计划项目(2004CB318000).
作者简介: 孙在冠(1971 —),男,山东诸城人,博士,从事最优化和最优控制理论应用的研究; 李树荣(1966 —),男,山东潍坊人,教授,博士生导师,从事最优化和最优控制理论与应用等研究.

交错点. 相邻的切比雪夫多项式有如下递推关系:

$$\begin{cases} T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x; \\ T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x), \\ \qquad n = 1,2,\cdots. \end{cases}$$

2.2 切比雪夫逼近

记 $H_n = \mathrm{span}\{T_0(x), T_1(x), \cdots, T_n(x)\}$, 显然 $H_n \subset C[a,b]$. 切比雪夫多项式 $T_0(x), T_1(x), \cdots, T_n(x)$ 是 $[a,b]$ 上一组线性无关的函数组, 且为 H_n 中的一组基. H_n 中的元素 $P_n(x)$ 可表示为 $P_n(x) = a_0 + a_1 T(x_1) + \cdots + a_n T(x_n)$, 其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为任意实数. 要在 H_n 中求 $p_n^*(x)$ 以逼近 $f(x) \in C[a,b]$, 使其误差满足

$$\max_{a \le x \le b} | f(x) - p_n^*(x) | = \min_{p_n \in H_n} \max_{a \le x \le b} | f(x) - p_n(x) |,$$

这便是最佳一致逼近或切比雪夫逼近问题.

3 生产与库存的最优控制数学模型

3.1 符号说明

n 为循环数; $[T_0, T_f]$ 为总时间区间; r 为产品种类; V 为最大储存空间; $d_p(t)$ 为时刻 t 的需求; $u_p(t)$ 为时刻 t 的生产率; $x_{ip}(t)$ 为第 i 次循环中第 p 类产品在时刻 t 的库存水平; α_p 为损失率; c_{up} 为单位时间内每类产品的单位生产费用; h_p 为单位时间内每类产品的单位持有费用; $[t_{i-1}, t_i]$ 为第 i 循环的时域; t_{ip^*} 为第 i 循环库存达到上限, 生产暂时停止的时间; s_p 为单位毛利.

3.2 生产与库存的最优控制模型

设库存的变动满足微分方程

$$\mathrm{d}X/\mathrm{d}\tau = F(X, U, \tau). \tag{1}$$

其中: $X = (x_1, x_2, \cdots, x_r)^{\mathrm{T}}$ 为库存的状态向量; $U = (u_1, u_2, \cdots, u_r)^{\mathrm{T}}$ 为生产的控制向量; $X(T_0) = X_0$, 要求边界条件满足 $X(T_f) = 0$, 并且在时域 $[T_0, T_f]$ 上达到最优指标

$$\max I = \int_{T_0}^{T_f} G(X, U, \tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{2}$$

对于给定的时域 $[T_0, T_f]$, 其生产与库存费用函数为

$$G(x, u, t) = s_p d(t) - h_p x_p(t) - c_{up} u_p(t). \tag{3}$$

考虑到动态需求的多产品库存控制系统, 其产品的生产(或采购)是时变的, 物品的价值损失率是常数, 需求随时间而变. 设在时域 $[T_0, T_f]$ 上发生了 n 个生产与库存循环, 则原问题变为求解最优控制问题

$$\max I = \int_{T_0}^{T_f} G(X, U, \tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{T_0}^{T_f} [s_p d(t) - h_p x_p(t) - c_{up} u_p(t)]\,\mathrm{d}\tau.$$

可转为求

$$\begin{aligned} \min J = & \int_{T_0}^{T_f} [h_p x_p(t) + c_{up} u_p(t)]\,\mathrm{d}t = \\ & \sum_{p=1}^{r} \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_{ip^*}} [h_p x_{ip}(t) + c_{up} u_p(t)]\,\mathrm{d}t + \\ & \sum_{p=1}^{r} \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{ip^*}}^{t_i} h_p x_{ip}(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{4}$$

$$\text{s.t. } \frac{\mathrm{d}x_{ip}(t)}{\mathrm{d}t} = u_p(t) - d_p(t) - \alpha_p x_{ip}(t), \quad t_{i-1} \le t \le t_{ip^*}; \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_{ip}(t)}{\mathrm{d}t} = -d_p(t) - \alpha_p x_{ip}(t), \quad t_{ip^*} \le t \le t_i; \tag{6}$$

$$\sum_{p=1}^{r} x_{ip}(t) \le V; \tag{7}$$

$$x_{ip}(t_i) = x_{ip}(t_{i-1}) = 0,\ i = 2, \cdots, n,\ p = 1, \cdots, r,\ x_{ip}(t_0) = x_0. \tag{8}$$

令

$$J_1 = \sum_{p=1}^{r} \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_{ip^*}} [h_p x_{ip}(t) + c_{up} u_p(t)]\,\mathrm{d}t,$$

$$J_2 = \sum_{p=1}^{r} \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{ip^*}}^{t_i} h_p x_{ip}(t)\,\mathrm{d}t.$$

由式(6), 解微分方程可得

$$x_{ip}(t) = \frac{1}{\alpha_p} \mathrm{e}^{-\alpha_p t} \int [u(t) - d(t)] \mathrm{e}^{-\alpha_p t}\,\mathrm{d}t, \quad t_{i-1} \le t \le t_{ip^*}. \tag{9}$$

在 J_1 中, 令 $t = \frac{1}{2}[(t_{ip^*} - t_{i-1})\xi + (t_{i-1} + t_{ip^*})]$, 则

$$J_1 = \sum_{p=1}^{r} \sum_{i=1}^{n} \frac{t_{ip^*} - t_{i-1}}{2} \int_{-1}^{1} [h_p x_{ip}(\xi) + c_{up} u_p(\xi)]\,\mathrm{d}\xi, \tag{10}$$

$$\text{s.t. } \frac{\mathrm{d}x_{ip}(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = \frac{t_{ip^*} - t_{i-1}}{2} (u_p(\xi) - d_p(\xi)) - \alpha_p x_{ip}(\xi),\ -1 \le \xi \le 1. \tag{11}$$

其中

$$x_{ip}(\xi_0 = -1) = x_0, \text{即 } x_{ip}(t_0) = x_0, \text{且 } x_{ip}(\xi_N = 1) = 0. \tag{12}$$

令

$$x_{ip}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \times \sqrt{1-\xi^2} \times x_{ip}(\xi) \triangleq \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} f_{ip}(\xi),\ -1 \le \xi \le 1,$$

则由高斯-切比雪夫求积公式可得

$$\int_{-1}^{1} x_{ip}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} f_{ip}(\xi)\,\mathrm{d}\xi \approx$$

$$A_k \sum_{k=1}^{N} f_{ip}(\xi_k). \tag{13}$$

通过 m 阶切比雪夫多项式对控制向量参数化, 即

$$u_p(\xi_s) = \sum_{k=0}^{m} a_{kp} T_k(\xi_s),\ s = 0,1,\cdots,N. \tag{14}$$

其中

$$a_{kp} = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{u_p(\xi)\,T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\mathrm{d}\xi,\ k = 1,2,\cdots,m;$$

$$a_{0p} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{u_p(\xi)\,T_0(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\mathrm{d}\xi;$$

$T_k(\xi)$ 为 k 次切比雪夫多项式; $\xi_s = -\cos\frac{s\pi}{N}$ 是区间 $[-1,1]$ 上的切比雪夫点. 所以有

$$J_1 = \sum_{p=1}^{r}\sum_{i=1}^{n} \frac{t_{ip^*} - t_{i-1}}{2}\Big(h_p \sum_{k=0}^{N} A_k f_{ip}(\xi_k) + c_{ip}\sum_{s=0}^{N}\sum_{k=0}^{m} u_{kp} T_k(\xi_s)\Big). \tag{15}$$

又由式 (7) 可得

$$x_{ip}(t) = -\frac{1}{\alpha_p}\mathrm{e}^{-\alpha_p t}\int f(t)\,\mathrm{e}^{-\alpha_p t}\,\mathrm{d}t,$$

$$t_{ip^*} \le t \le t_i,\ i = 1,\cdots,n,\ p = 1,\cdots,r. \tag{16}$$

令 $t = \frac{1}{2}[(t_i - t_{ip^*})\xi + (t_i + t_{ip^*})]$, 代入上式可得区间 $[-1,1]$ 上的 $x_{ip}(\xi)$. 构造区间 $[-1,1]$ 上的以 $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 为权函数, 以正交多项式为切比雪夫多项式, 并且在 $T_N(x) = \cos(N\arccos x)$ 的零点取值的高斯-切比雪夫积分函数

$$x_{ip}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \times \sqrt{1-\xi^2} \times x_{ip}(\xi) \triangleq \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} f_{ip}(\xi),\ -1 \le \xi \le 1.$$

所以

$$J_2 = \sum_{p=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{ip^*}}^{t_i} h_p x_{ip}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{p=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i - t_{ip^*}}{2}\int_{-1}^{1} h_p x_{ip}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \sum_{p=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}\frac{h_p(t_i - t_{ip^*})}{2}\sum_{j=1}^{N} A_j f_{ip}(\xi_j). \tag{17}$$

其中: $A_j = \frac{\pi}{N}$; $\xi_j = \cos\frac{(2j-1)\pi}{2N}$ $(j = 1,2,\cdots,N)$ 为 $T_N(\xi)$ 的零点. 则原最优控制问题的解的形式为

$$u^*(t) = u(T_n(t)),\ -1 \le t \le 1,$$

$$n = \arg(I(T_n(t))).$$

对于该问题, 可结合一般动态规划的方法运用 Matlab 进行求解.

4　算法设计

令

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \phi(t) = F(X,U,t). \tag{18}$$

由约束条件及初始值, 可得

$$x(t) = \int_{-1}^{1}\phi(t)\,\mathrm{d}t + x_0. \tag{19}$$

由前述分析, 给出 Chebyshev 谱逼近

$$x_i = x(t_i) = \sum_{j=0}^{N} b_{i,j}\phi(t_j) + x_0, \tag{20}$$

对控制向量进行 Chebyshev 多项式参数化

$$u_m(t) = \sum_{i=0}^{m} c_i T_i(t). \tag{21}$$

将上述状态和控制变量代换后可得

$$\phi(t_i) = F\Big(\sum_{j=0}^{N} b_{ij}\phi(t_j) + x_0,\ \sum_{k=0}^{m} c_k T_k(t_i),\ t_i\Big), \tag{22}$$

则原系统的约束条件转换为

$$F(\alpha,\beta) = 0. \tag{23}$$

其中

$$\alpha \triangleq (\phi(t_0),\phi(t_1),\cdots,\phi(t_N)),$$

$$\beta \triangleq (c_0,c_1,\cdots,c_m).$$

相应的性能指标转换为

$$J(\alpha,\beta) \triangleq \sum_{j=0}^{N} b_{Nj} G(x(t_j),u(t_j),T) = \sum_{j=0}^{N} b_{Nj} G\Big(\sum_{s=0}^{N} b_{js}\phi(t_s) + x_0,\ \sum_{r=0}^{m} c_r T_r(t_j),\ T\Big). \tag{24}$$

于是, 原最优控制问题转化为参数最优化问题, 即可转化为关于变量 α,β 的非线性规划求解

$$\min J = J(\alpha,\beta), \tag{25}$$

$$\text{s.t.}\ \ F(\alpha,\beta) = 0. \tag{26}$$

对于此问题, 可采用 Lagrange 乘子法和罚函数法等求解析解. 但处理大系统问题时会非常繁琐, 因此, 本文采用误差估计的方法求满足误差约束的近似数值解. 对事先给定的 $\forall\varepsilon > 0$, 要求

$$|J(\alpha_{N+1},\beta_{N+1}) - J(\alpha_N,\beta_N)| < \varepsilon.$$

5　实例应用

设某生产与库存偏差的控制目标函数和系统状态方程满足

$$\min J = a\int_0^1 (XQX^{\mathrm{T}} + URU^{\mathrm{T}})\,\mathrm{d}t,$$

$$\text{s.t.}\ \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = -X + U,\ 0 \le t \le 1.$$

其中: $X(0) = 1$, 取 $a = 2, Q = E, R = E$. 于是

$$\min J = \int_{-1}^{1}(x^2 + u^2)\,\mathrm{d}t.$$

$$\text{s.t.}\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}u,\ -1 \le t \le 1;$$

$$x(-1) = x_0 = 1;$$

$$J = \sum_{j=0}^{N} b_{Nj}\Big[\Big(\sum_{s=0}^{N} b_{js}\Phi(t_s) + 1\Big)^2 + \Big(\sum_{k=0}^{m} c_k T_k(t_j)\Big)^2\Big].$$

给定 $\varepsilon = 10^{-7}$,用 Matlab 编程求解可得表 1.

表 1 切比雪夫谱方法逼近最优指标

m	$N = 1$	$N = 3$	$N = 5$	$N = 7$
1	0.7716398	0.7716379	0.7716374	0.7716373
3	0.7716378	0.7716376	0.7716373	0.7716372
5	0.7716378	0.7716375	0.7716372	0.7716372

经比较可知,运用高斯-切比雪夫三阶正交多项式逼近,所得近似解与最优数值解的误差仅为 4×10^{-7}.

6 结 论

通过实例分析可以发现,利用高斯-切比雪夫谱逼近方法参数化状态和控制向量,并运用非线性规划的方法求解库存最优控制问题是可行的. 切比雪夫逼近算法虽然不能像庞特里亚金方法得到最优控制问题的解析解,但容易得到比较接近的近似解.

参考文献(References)

[1] Harris F. Operations and cost [C]. Factory Management Series. Chicago: A W Shaw Co, 1915.

[2] Wagner H M, Whitin T M. A dynamic version of the economic lot size model[J]. Management Science, 1958, 5(1): 89-96.

[3] Balkhi Z T. On a finite horizon production lot size inventory model for deteriorating items: An optimal solution[J]. European J of Operational Research, 2001, 1(7): 210-223.

[4] Balkhi Z T. On an inventory model for deteriorationg items with stock dependent and time-varying demand rates[J]. Computers and Operations Research, 2004, 2(2): 223-240.

[5] Zhou Y W, Lau H S, Yang S L. A new variable production scheduling strategy for deteriorating items with time varying demand and partial lost sale[J]. Computers and Operations Research, 2003, 30(12): 1753-1776.

[6] Benkherouf L, Bomenir A, Aggoun L. A diffusion inventory model for deteriorating items[J]. Applied Mathematics and Computation, 2003, 1(6): 21-39.

[7] Worell B M, Hall M A. The analysis of inventory control model using polynomial geometric programming [J]. Int J of Production Research, 1982, 20(5): 657-667.

[8] Maity A K, Maity K, Mondal S, et al. A Chebyshev approximation for solving the optimal production-inventory problem of deteriorating multi-item [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2007, 45(1): 149-161.

(上接第 796 页)

[3] Wong J Y, Chiang C F. A general theory for skid steering of tracked vehicles on firm ground[J]. J of Automobile Engineering, 2001, 215(3): 343-355.

[4] Le A, Rye D, Durrant-Whyte H. Estimation of track-soil interactions for autonomous tracked vehicles[C]. Int Conf on Robotics and Automation. New Mexico, 1997: 1388-1393.

[5] De Santis R M. Modeling and path-tracking control of a mobile wheeled robot with a differential drive[J]. Robotica, 1995, 13(4): 401-410.

[6] 杨盐生, 贾欣乐. 一类不确定非线性系统变结构自适应鲁棒控制[J]. 电子学报, 2001, 29(7): 905-908.
(Yang Y S, Jia X L. Variable structure adaptive robust control algorithm for a class of uncertain nonlinear systems[J]. Acta Electronica Sinica, 2001, 29(7): 905-908.)

[7] 杨盐生. 船舶航向非线性系统自适应鲁棒自动舵的设计[J]. 大连海事大学学报, 2002, 28(3): 1-4.
(Yang Y S. Design of adaptive robust control autopilot for ship steering with uncertain nonlinear system[J]. J of Dalian Maritime University, 2002, 28(3): 1-4.)

[8] Man Z H, Yu X H, Eshraghian K, et al. A robust adaptive sliding mode tracking control using a RBF neural network for robotic manipulators[C]. Proc of IEEE Int Conf on Neural Networks. San Diego, 1995: 2403-2408.

[9] Gang F, Chak C K. Robot tracking in task space using neural networks[C]. Proc of IEEE Int Conf on Computational Intelligence. Orlando, 1994: 2854-2858.