文章编号: 1001-0920(2009)05-0723-06

区间数互补判断矩阵的一致性

钱 钢[1], 冯向前[1], 徐泽水[2]
(1. 南京师范大学 管理科学与工程研究所, 南京 210097; 2. 解放军理工大学 理学院, 南京 211101)

摘 要: 研究了区间数互补判断矩阵的一致性;定义了区间数互补判断矩阵的完全一致性、强一致性、一致性和满意一致性的概念;讨论了定义之间的关系;给出了强一致性判别方法以及 3 种一致性和满意一致性的判别方法. 最后用算例验证了所提出方法的有效性和适用性.

关键词: 不确定层次分析法; 区间数; 互补判断矩阵; 一致性
中图分类号: C934; O223 **文献标识码**: A

Consistency of interval complementary comparison matrix

QIAN Gang[1], *FENG Xiang-qian*[1], *XU Ze-shui*[2]
(1. Insititution of Management Science and Engineering, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China; 2. Institute of Science, PLA University of Science and Technology, Nanjing 211101, China. Correspondent: QIAN Gang, E-mail: qian_gang@yahoo.com.cn)

Abstract: The consistency problem of the interval complementary comparison matrix is studied in this paper. Some conceptions concerning the consistency of interval complementary comparison matrix including perfect consistency, strong consistency, consistency and satisfactory consistency are defined, and the relations between these definitions are discussed. A method for testing strong consistency, three methods for testing consistency and a method for testing satisfactory consistency are proposed. Finally, a numerical example illustrates the effectiveness and practicality of the proposed methods.

Key words: Uncertain type of the analytical hierarchy process; Interval numbers; Complementary matrix; Consistency

1 引 言

多属性决策是现代社会经常遇到的一类决策问题. 层次分析方法[1]因其有效、实用的特点而成为多属性决策分析的主要方法之一. 它的基本思路是,通过元素之间两两比较建立判断矩阵,并对其进行综合处理. 在实际的决策过程中,由于客观事物的复杂性以及人们的思维能力、知识结构和知识水平的局限性,决策者对方案进行两两比较时通常用模糊数或区间数给出自己的判断,从而使传统的层次分析法扩展为不确定层次分析法.

从元素的表示方式看,区间数判断矩阵有两种类型:区间数互反判断矩阵[3-7]和区间数互补判断矩阵[7-9]. 目前有关区间数互反判断矩阵的研究已经比较完善,而关于区间数互补判断矩阵的研究,由于现有文献对其一致性理论的研究较少,使得众多的排序方法缺乏理论依据. 针对这个问题,周礼刚等[7]从区间数互补判断矩阵的定义出发,给出了一致性定义,但若一个区间数互补判断矩阵满足此定义,它将退化为普通的实数矩阵,因此此定义不合理;巩在武等[9]借助区间数互反与互补判断矩阵之间的转换公式及区间数互反判断矩阵的完全一致性定义,给出了区间数互补判断矩阵一致性定义,但此定义给出的条件太强,决策者给出的区间数互补判断矩阵几乎都不能满足此条件,所以无法衡量决策者给出的判断信息是否合理. 徐泽水和朱建军等[10,11]基于权重可行域的思想,给出了区间数互补判断矩阵的一致性定义. 本文则从区间数互补判断矩阵的定义出发,对其一致性进行了系统深入的研究,给出了区间数互补判断矩阵完全一致性、强一致性、一致性和满意一致性定义,讨论了这些定义之间的关系,给出了相应的判别方法,并用算例进行了验证.

2 预备知识

收稿日期: 2008-05-20; **修回日期**: 2008-09-24.
基金项目: 国家自然科学基金项目(70571087); 南京师范大学科研启动基金项目(2008101XGQ0109).
作者简介: 钱钢(1965 —),男,江苏常州人,教授,从事决策分析与优化、信息化战略规划与项目管理等研究;
冯向前(1977 —),男,山西晋城人,讲师,博士,从事系统工程、多属性决策理论与方法等研究.

定义 1[12]　称实数互补判断矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 具有互补一致性,若对于任意的 $i,j,k \in N$, $N = \{1,2,\cdots,n\}$,有 $a_{ik} + a_{kj} = 0.5 + a_{ij}$.

引理 1[13]　实数互补判断矩阵 A 具有互补一致性的充分必要条件是存在向量 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$ 使得 $a_{ij} = 0.5(1 + w_i - w_j)$, $i,j \in N$. 其中 $w_i \geq 0$, $i \in N$,且 $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

定义 2[1]　称实数互反判断矩阵 $B = (b_{ij})_{n\times n}$ 具有一致性,若对于任意的 $i,j,k \in N$,有 $b_{ij} = b_{ik} \cdot b_{kj}$.

引理 2[1]　实数互反判断矩阵 B 具有一致性的充分必要条件是存在向量 $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^{\mathrm{T}}$ 使得对于任意的 $i,j \in N$,有 $b_{ij} = v_i / v_j$. 其中 $v_i \geq 0$, $i \in N$,且 $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$.

引理 3[14]　设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是实数互补判断矩阵,则通过转换公式

$$\bar{b}_{ij} = 9^{\bar{a}_{ij} - \bar{a}_{ji}} = 9^{2\bar{a}_{ij} - 1}, \tag{1}$$

可得互反判断矩阵 $B = (b_{ij})_{n\times n}$.

引理 4[14]　若 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是互补一致性实数互补判断矩阵,则通过式(1)转换而得到的判断矩阵 $B = (b_{ij})_{n\times n}$ 是一致性互反判断矩阵.

在实际应用中,判断矩阵很难满足一致性. 针对一个不一致的互反判断矩阵是否可以被接受,Saaty[1] 给出了互反判断矩阵 $B = (b_{ij})_{n\times n}$ 的一致性指标 $\mathrm{CR} = \dfrac{\lambda_{\max}(B) - n}{(n-1)\mathrm{RI}}$ 作为检验的标准. 其中:RI 为平均随机一致性指标,$\lambda_{\max}(B)$ 为 B 的最大特征值. 并指出,当 $\mathrm{CR} < 0.1$ 时,判断矩阵具有可接受的一致性;否则,判断矩阵偏离一致性程度过大.

Aguarón 等[15] 提出如下几何一致性指标:

$$\mathrm{GCI} = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{i<j} (\log b_{ij} + \log v_j - \log v_i)^2$$

作为检验标准,其中排序向量 $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^{\mathrm{T}}$ 可由对数最小二乘法[16] 求出. 并相对应于 Saaty 的一致性指标 CR 的临界值,给出了实数互反判断矩阵的几何一致性指标 GCI 的临界值,如表 1 所示.

表 1　互反判断矩阵几何一致性指标 GCI 的临界值

CR	0.01	0.05	0.10	0.15
GCI($n = 3$)	0.0314	0.1573	0.3174	0.4720
GCI($n = 4$)	0.0352	0.1763	0.3526	0.5289
GCI($n > 4$)	～0.037	～0.185	～0.370	～0.555

定义 3　设有 2 个区间数 $\bar{a}_1 = [l_1, u_1]$, $\bar{a}_2 = [l_2, u_2]$, $l_1 > 0$, $l_2 > 0$, c 为实数,则:

1) $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 = [l_1 + l_2, u_1 + u_2]$;

2) $\bar{a}_1 + c = [l_1 + c, u_1 + c]$;

3) $\bar{a}_1 = \bar{a}_2$ 当且仅当 $l_1 = l_2$, $u_1 = u_2$.

定义 4[17]　称 $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{n\times n}$ 是区间数互补判断矩阵,如果对于任意的 $i,j \in N$ 均有:

1) $\bar{a}_{ij} = [l_{ij}, u_{ij}]$ 且 $l_{ij} + u_{ji} = 1$;

2) $0 < l_{ij} \leq u_{ij} < 1$, $\bar{a}_{ii} = 0.5$.

当对任意的 $i,j \in N$,都有 $l_{ij} = u_{ij}$ 时,$\bar{A}$ 为实数互补判断矩阵.

3　区间数互补判断矩阵相关一致性

定义 5　称区间数互补判断矩阵 $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{n\times n}$ 具有完全一致性,若对 $\forall i < k < j$ 均有 $\bar{a}_{ij} = \bar{a}_{ik} + \bar{a}_{kj} - 0.5$.

文献[8]称此定义为一致性,但本文认为此条件很强,后面将给出更加合理的一致性定义.

定义 6　称区间数互补判断矩阵 $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{n\times n}$ 具有强一致性,若对于任意的实数 $a_{ij} \in [l_{ij}, u_{ij}]$,均存在实数互补判断矩阵 $A = (a_{kl})_{n\times n}$ ($a_{kl} \in [l_{kl}, u_{kl}]$, $k,l \in N$) 具有一致性,其中当 $k = i$, $l = j$ 时 $a_{kl} = a_{ij}$.

定理 1　区间数互补判断矩阵 $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{n\times n}$ 具有强一致性的充分必要条件是对于任意的 $i,j \in N$,有

$$\bigcap_{k=1}^{n} (\bar{a}_{ik} + \bar{a}_{kj} - 0.5) = \bar{a}_{ij}.$$

证明　设 $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{n\times n}$ 为区间数互补判断矩阵,且对于任意的 $i,j \in N$,有

$$\bigcap_{k=1}^{n} (\bar{a}_{ik} + \bar{a}_{kj} - 0.5) = \bar{a}_{ij}.$$

所以对于任意的 $k \in N$,有 $\bar{a}_{ij} \subseteq \bar{a}_{ik} + \bar{a}_{kj} - 0.5$,即对于任意的 $a_{ij} \in [l_{ij}, u_{ij}]$,存在 $a_{ik} \in [l_{ik}, u_{ik}]$ 和 $a_{kj} \in [l_{kj}, u_{kj}]$,使得 $a_{ij} = a_{ik} + a_{kj} - 0.5$, $k \in N$. 根据定义 1, $A = (a_{kl})_{n\times n}$ 具有互补一致性,又由定义 6 可知 $\bar{A}$ 具有强一致性.

反之,由定义 6,若 $\bar{A}$ 具有强一致性,则对于任意的实数 $a_{ij} \in [l_{ij}, u_{ij}]$,均存在实数互补判断矩阵 $A = (a_{kl})_{n\times n}$ ($a_{kl} \in [l_{kl}, u_{kl}]$, $k,l \in N$) 具有互补一致性,其中当 $k = i$, $l = j$ 时, $a_{kl} = a_{ij}$,即对于任意的实数 $a_{ij} \in [l_{ij}, u_{ij}]$,存在 $a_{ik} \in [l_{ik}, u_{ik}]$ 和 $a_{kj} \in [l_{kj}, u_{kj}]$,使得 $a_{ij} = a_{ik} + a_{kj} - 0.5$ ($k \in N$),所以

$$\bar{a}_{ij} \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} (\bar{a}_{ik} + \bar{a}_{kj} - 0.5).$$

又因为当 $k = i$ 时, $\bar{a}_{ik} + \bar{a}_{kj} - 0.5 = \bar{a}_{ij}$,所以

$$\bigcap_{k=1}^{n} (\bar{a}_{ik} + \bar{a}_{kj} - 0.5) \subseteq \bar{a}_{ij},$$

故

$$\bar{a}_{ij} = \bigcap_{k=1}^{n} (\bar{a}_{ik} + \bar{a}_{kj} - 0.5). \quad \square$$

定理 2　设 $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{n\times n}$ 为区间数互补判断矩阵,若 $\bar{A}$ 具有完全一致性,则 $\bar{A}$ 一定具有强一致性.

证明　设 $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{n\times n}$ 为区间数互补判断矩阵,要证明 $\bar{A}$ 具有强一致性,只需证明对于任意的 $a_{ij} \in [l_{ij}, u_{ij}]$, $i,j \in N$,存在 $a_{ik} \in [l_{ik}, u_{ik}]$ 和 $a_{kj} \in [l_{kj}, u_{kj}]$,使得 $a_{ij} = a_{ik} + a_{kj} - 0.5$, $k \in N$,其中当 $k = i$, $l = j$ 时, $a_{kl} = a_{ij}$. 由区间数互补判断矩阵定义知,若 $i = j$ 时显然成立. 下面只需证明 $i < j$ 的情况,因为当 $j < i$ 时可以类似此证明. 当 $i < j$ 时,又分为 3 种情况:

1) $i \le k \le j$. 由对于任意的 $i \in N$, $\bar{a}_{ii} = 0.5$ 以及定义 5 知,当 $i \le k \le j$ 时, $\bar{a}_{ij} = \bar{a}_{ik} + \bar{a}_{kj} - 0.5$,所以对于任意的 $a_{ij} \in [l_{ij}, u_{ij}]$,存在 $a_{ik} \in [l_{ik}, u_{ik}]$ 和 $a_{kj} \in [l_{kj}, u_{kj}]$,使得 $a_{ij} = a_{ik} + a_{kj} - 0.5$.

2) $k < i < j$. 由定义 5 知, $\bar{a}_{kj} = \bar{a}_{ki} + \bar{a}_{ij} - 0.5$,即对于任意的 $a_{ij} \in [l_{ij}, u_{ij}]$,存在 $a_{kj} \in [l_{kj}, u_{kj}]$ 和 $a_{ki} \in [l_{ki}, u_{ki}]$,使得 $a_{kj} = a_{ki} + a_{ij} - 0.5$. 由区间数互补判断矩阵定义知,存在 $a_{ik} \in [l_{ik}, u_{ik}]$,使得 $a_{ki} = 1 - a_{ik}$,所以 $a_{ij} = a_{ik} + a_{kj} - 0.5$.

3) $i < j < k$. 类似 2) 可以证明,不再赘述.

综上 3 种情况,对于任意的 $a_{ij} \in [l_{ij}, u_{ij}]$, $i < j$,存在 $a_{ik} \in [l_{ik}, u_{ik}]$ 和 $a_{kj} \in [l_{kj}, u_{kj}]$, $k \in N$,使得 $a_{ij} = a_{ik} + a_{kj} - 0.5$. □

定义 7　称区间数互补判断矩阵 $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{n\times n}$ 具有一致性,若存在实数互补判断矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}(a_{ij} \in [l_{ij}, u_{ij}], i,j \in N)$ 具有互补一致性.

从定义 7 可以看出,若专家给出的区间数互补判断矩阵具有一致性,则表明专家给出的偏好含有一致性信息,根据此偏好信息可以得到比较合理的排序向量;否则,可以将区间数互补判断矩阵反馈给专家,对其进行修正.

根据定义 6 和定义 7 易知,若一个区间数互补判断矩阵 $\bar{A}$ 具有强一致性,则 $\bar{A}$ 必定具有一致性.

定理 3[11]　区间数互补判断矩阵 $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{n\times n}$ 具有一致性的充分必要条件是凸集 S_w 非空,其中

$$S_w = \Big\{ w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}} \mid l_{ij} \le 0.5(1 + w_i - w_j) \le u_{ij},\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1,\ w_i \ge 0,\ i,j \in N \Big\}.$$

证明　设 $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{n\times n}$ 为区间数互补判断矩阵,若存在实数判断矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}(a_{ij} \in [l_{ij}, u_{ij}], i,j \in N)$ 具有互补一致性,则由引理 1 易知 S_w 非空. 若凸集 S_w 非空,则不妨设 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$ 是 S_w 中一个元素. 对于任意的 $i,j \in N$,令 $a_{ij} = 0.5(1 + w_i - w_j)$,显然 $a_{ij} \in [l_{ij}, u_{ij}]$,而且

$$\begin{aligned} & a_{ik} + a_{kj} = \\ & 0.5(1 + w_i - w_k) + 0.5(1 + w_k - w_j) = \\ & 0.5 + 0.5(1 + w_i - w_j) = 0.5 + a_{ij}. \end{aligned}$$

由定义 1 可知, $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 具有互补一致性,所以 $\bar{A}$ 具有一致性. □

定理 4　区间数互补判断矩阵 $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{n\times n}$ 具有一致性当且仅当下面不等式成立:

$$\max_k (l_{ik} + l_{kj} - 0.5) \le \min_k (u_{ik} + u_{kj} - 0.5),\quad \forall i,j,k \in N. \tag{2}$$

证明　若区间数互补判断矩阵 $\bar{A}$ 具有一致性,则凸集 S_w 非空,即存在向量 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$,使得下列不等式成立:

$$l_{ik} \le 0.5(w_i - w_k) + 0.5 \le u_{ik},\ i,k \in N; \tag{3}$$

$$l_{kj} \le 0.5(w_k - w_j) + 0.5 \le u_{kj},\ k,j \in N. \tag{4}$$

由式(3) 和(4) 可得

$$\begin{aligned} & l_{ik} + l_{kj} - 0.5 \le 0.5(w_i - w_j) + 0.5 \le \\ & u_{ik} + u_{kj} - 0.5,\ \forall i,j,k \in N. \end{aligned}$$

所以对于任意的 $i,j \in N$,有

$$\max_k (l_{ik} + l_{kj} - 0.5) \le \min_k (u_{ik} + u_{kj} - 0.5).$$

若式(1) 成立,则显然存在 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$,使得对于任意的 $i,j \in N$,有如下不等式成立:

$$l_{ij} \le 0.5(w_i - w_j) + 0.5 \le u_{ij},$$

即 S_w 非空. 根据定理 3,区间数互补判断矩阵 $\bar{A}$ 具有一致性. □

由定理 4 可知,只需进行简单的代数运算,便可以判别一个区间数互补判断矩阵是否具有一致性. 事实上,因为区间数互补判断矩阵具有互补性,即对于任意的 $i,j \in N$,有 $l_{ij} + u_{ji} = 1$,所以

$$\begin{aligned} & \max_k (l_{ik} + l_{kj} - 0.5) \le \min_k (u_{ik} + u_{kj} - 0.5) \Leftrightarrow \\ & \max_k (1 - u_{ki} + 1 - u_{jk} - 0.5) \le \\ & \min_k (1 - l_{ki} + 1 - l_{jk} - 0.5) \Leftrightarrow \\ & \max_k (l_{jk} + l_{ki} - 1.5) \le \min_k (u_{jk} + u_{ki} - 1.5) \Leftrightarrow \\ & \max_k (l_{jk} + l_{ki} - 0.5) \le \min_k (u_{ji} + u_{ki} - 0.5). \end{aligned}$$

因此,只需对矩阵的上三角(或下三角) 的元素进行验证就可以判别一个区间数互补判断矩阵是否具有一致性.

定理 5　区间数互补判断矩阵 $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{n\times n}$ 具有一致性的充分必要条件是对于任意的 $i,j \in N$,有

$$\bigcap_{k=1}^{n}(\bar{a}_{ik}+\bar{a}_{kj}-0.5)\neq\Phi. \tag{5}$$

证明 若区间数互补判断矩阵 $\bar{A}=(\bar{a}_{ij})_{n\times n}$ 具有一致性,则根据定义 7,存在实数判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}(a_{ij}\in[l_{ij},u_{ij}],\ i,j\in N)$ 具有互补一致性,根据定义 1,对于任意的 $i,j,k\in N$,都有 $a_{ij}=a_{ik}+a_{kj}-0.5\in\bar{a}_{ik}+\bar{a}_{kj}-0.5$. 所以对于任意的 $i,j\in N$,有 $\bigcap_{k=1}^{n}(\bar{a}_{ik}+\bar{a}_{kj}-0.5)\neq\Phi$.

若对于任意的 $i,j\in N$,有 $\bigcap_{k=1}^{n}(\bar{a}_{ik}+\bar{a}_{kj}-0.5)\neq\Phi$,则不妨令

$$\bigcap_{k=1}^{n}(\bar{a}_{ik}+\bar{a}_{kj}-0.5)=[b_{ij}^{-},b_{ij}^{+}]=b_{ij}.$$

显然有 $\max_k(l_{ik}+l_{kj}-0.5)\leq b_{ij}^{-}\leq b_{ij}^{+}\leq\min_k(u_{ik}+u_{kj}-0.5)$. 因此,根据定理 4,区间数互补判断矩阵 $\bar{A}$ 具有一致性. □

另外,当区间数互补判断矩阵不具有一致性时,可由下面的定义判别它是否具有满意一致性.

定义 8 称区间数互补判断矩阵 $\bar{A}=(\bar{a}_{ij})_{n\times n}$ 具有满意一致性,若区间数互补判断矩阵 $\bar{C}=(\bar{c}_{ij})_{n\times n}(\bar{c}_{ij}=[l_{ij}-p_{ij},u_{ij}+p_{ij}])$ 具有一致性,其中 p_{ij} 为决策的容许偏差.

此定义涉及到 p_{ij} 的设置问题. 若 p_{ij} 较大,则使得原有区间数判断矩阵所表达的优先信息变得更加模糊;较小又可能使得扩大后的区间数判断矩阵不具有一致性信息. 所以不妨考虑在区间数互补判断矩阵中是否具有满意一致性的实数互补判断矩阵.

定义 9 称区间数互补判断矩阵 $\bar{A}=(\bar{a}_{ij})_{n\times n}$ 具有满意一致性,如果存在实数判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}(a_{ij}\in[l_{ij},u_{ij}],\ i,j\in N)$ 具有满意一致性.

为了给出区间数互补判断矩阵的满意一致性判别方法,下面首先给出实数互补判断矩阵的一致性指标.

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是一个一致性实数互补判断矩阵,则根据引理 1,存在向量 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$ 使得对于任意的 $i,j\in N$,有 $a_{ij}=0.5(1+w_i-w_j)$. 根据引理 3 和引理 4,通过式(1) 实数判断矩阵 $\bar{A}$ 转换为一致性实数互反判断矩阵 $\bar{B}=(\bar{b}_{ij})_{n\times n}$,其中 $\bar{b}_{ij}=9^{2\bar{a}_{ij}-1}=q^{\bar{w}_i-\bar{w}_j}$. 由引理 2,存在向量 $\bar{v}=(\bar{v}_1,\bar{v}_2,\cdots,\bar{v}_n)^{\mathrm{T}}$ 使得 $\bar{b}_{ij}=\bar{v}_i/\bar{v}_j$, $i,j\in N$. 所以 $\bar{v}_i/\bar{v}_j=9^{\bar{w}_i-\bar{w}_j}$. 故

$$\begin{aligned}
&\mathrm{GCI}=\\
&\frac{2}{(n-1)(n-2)}\sum_{i<j}(\log\bar{b}_{ij}-\log\bar{v}_i/\bar{v}_j)^2=\\
&\frac{2}{(n-1)(n-2)}\sum_{i<j}(\log 9^{2\bar{a}_{ij}-1}-\log 9^{\bar{w}_i-\bar{w}_j})^2=\\
&\frac{2}{(n-1)(n-2)}\sum_{i<j}[\log 9\cdot(2\bar{a}_{ij}-1)-\\
&\log 9\cdot(\bar{w}_i-\bar{w}_j)]^2=\\
&\frac{2\log^2 9}{(n-1)(n-2)}\sum_{i<j}(2\bar{a}_{ij}-\bar{w}_i+\bar{w}_j-1)^2.
\end{aligned}$$

因此,可以定义实数互补判断矩阵的一致性指标为

$$\mathrm{CGCI}=\frac{2}{(n-1)(n-2)}\sum_{i<j}(2\bar{a}_{ij}-\bar{w}_i+\bar{w}_j-1)^2.$$

根据实数互反判断矩阵一致性指标 GCI 的临界值,可以求得实数互补判断矩阵的一致性指标 CGCI 的临界值,如表 2 所示.

表 2 互补判断矩阵的一致性指标 CGCI 的临界值

CR	0.01	0.05	0.1	0.15
CGCI$(n=3)$	0.0345	0.1727	0.3486	0.5184
CGCI$(n=4)$	0.0387	0.1936	0.3872	0.5808
CGCI$(n>4)$	~0.0345	~0.2032	~0.4063	~0.6095

根据实数互补判断矩阵的一致性指标,有下面的定理:

定理 6 区间数互补判断矩阵 $\bar{A}=(\bar{a}_{ij})_{n\times n}$ 具有满意一致性的充要条件集合 T_w 非空,其中

$$T_w=\Big\{w\,\Big|\,\frac{2}{(n-1)(n-2)}\sum_{i<j}(2a_{ij}-w_i+w_j-1)^2\leq\delta\Big\}.$$

式中: $l_{ij}\leq a_{ij}\leq u_{ij}$, $i<j$; $\sum_{i=1}^{n}w_i=1$; $w_i\geq 0$, $i,j\in N$; δ 为互补判断矩阵一致性指标 CGCI 的临界值.

证明过程类似于定理 3,不再赘述.

定理 7 对于区间数互补判断矩阵 $\bar{A}=(\bar{a}_{ij})_{n\times n}$,设

$$T_w^{*}=\Big\{w\,\Big|\,\frac{2}{(n-1)(n-2)}\sum_{i<j}(2a_{ij}-w_i+w_j-1)^2\leq\delta\Big\}.$$

其中: $l_{ij}\leq w_{ij}\leq u_{ij}$, $i<j$; $\sum_{i=1}^{n}w_i=1$; $w_i\geq 0$, $i,j\in N$. 则有 $T_w^{*}=T_w$.

证明 若 T_w 非空,则存在 $a_{ij}(i<j)$ 和 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$ 满足

$$l_{ij}\leq a_{ij}\leq u_{ij};\ \sum_{i=1}^{n}w_i=1,\ w_i\geq 0,\ i\in N.$$

并使得如下不等式成立:

$$\frac{2}{(n-1)(n-2)}\sum_{i<j}(2a_{ij}-w_i+w_j-1)^2\leq\delta.$$

令 $a_{ji}=1-a_{ij}$,则由区间数互补判断矩阵的定义知, $l_{ji}\leq a_{ji}\leq u_{ji}$. 所以有

$$\frac{2}{(n-1)(n-2)}\sum_{i<j}(2a_{ij}-w_i+w_j-1)^2=$$

$$\frac{2}{(n-1)(n-2)}\sum_{i<j}(2a_{ji}-w_j+w_i-1)^2=$$
$$\frac{2}{(n-1)(n-2)}\sum_{i<j}(-2a_{ji}+w_j-w_i+1)^2=$$
$$\frac{2}{(n-1)(n-2)}\sum_{i<j}(2a_{ij}-w_i+w_j-1)^2\le\delta,$$

即 $w\in T_w^*$. 因此,若 T_w 非空,则 $T_w\subset T_w^*$. 同理可证若 T_w^* 非空,则 $T_w^*\subset T_w$.

如果 T_w(或 T_w^*) 是空集,那么 T_w^*(或 T_w) 也是空集;否则,与上面的结论矛盾. 因此, $T_w^*=T_w$. □

定理 7 表明,判别区间数互补判断矩阵是否具有满意一致性,只需对判断矩阵的上三角或下三角进行判断就可以了.

对于区间数互补判断矩阵 $\overline{A}=(\overline{a}_{ij})_{n\times n}$,要检验其是否具有满意一致性,可根据定理 6,需判断集合 T_w 是否非空,即可以建立下面的规划(QP) 模型:

$$\min \mathrm{CGCI}=\frac{2}{(n-1)(n-2)}\sum_{i<j}(2a_{ij}-w_i+w_j-1)^2.$$
$$\text{s.t. } l_{ij}\le a_{ij}\le u_{ij},\ i<j,\ i,j\in N;$$
$$\sum_{i=1}^{n}w_i=1;$$
$$w_i\ge 0,\ i\in N.$$

定理 8　设区间数互补判断矩阵 $\overline{A}=(\overline{a}_{ij})_{n\times n}$, QP 模型的目标函数的最优值是 CGCI*,则:

1) $\overline{A}$ 具有一致性的充要条件是 CGCI$^*=0$;

2) $\overline{A}$ 具有满意一致性的充要条件是 CGCI$^*\le\delta$.

证明　根据定理6易证2) 成立. 下面只证明1) 成立.

若 CGCI$^*=0$,则存在 $a_{ij}=0.5(1+w_i-w_j)$, $i<j$, $i,j\in N$. 并满足: $l_{ij}\le a_{ij}\le u_{ij}$, $i<j$, $i,j\in N$; $\sum_{i=1}^{n}w_i=1$; $w_i\ge 0$, $i\in N$. 当 $i>j$ 时,令 $a_{ij}=1-a_{ji}=1-0.5(1+w_j-w_i)=0.5(1+w_i-w_j)$,则由区间数判断矩阵的定义知, $l_{ij}\le a_{ij}\le u_{ij}$. 显然,当 $i=j$ 时 $a_{ij}=0.5$. 因此,区间数互补判断矩阵 $\overline{A}$ 具有一致性.

若 $\overline{A}$ 具有一致性,则存在向量 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$,使得 $a_{ij}=0.5(1+w_i-w_j)$, $i,j\in N$,其中 $w_i\ge 0$, $i\in N$,且 $\sum_{i=1}^{n}w_i=1$. 即存在满足 QP 模型约束条件的 a_{ij}, w_i, $i,j\in N$,使得 CGCI$^*=0$. □

定理 8 表明,QP 模型不但可以用来判别区间数互补判断矩阵是否具有满意一致性,而且还可以判别是否具有一致性.

4　算例分析

文献[9]求解出了区间数互补判断矩阵 $\overline{A}$ 的排序向量,但没有进行一致性检验,无法衡量决策者给出的判断矩阵是否合理. 下面首先验证其是否具有一致性.

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}0.5 & [0.2,0.4] & [0.3,0.6] & [0.5,0.7]\\ [0.6,0.8] & 0.5 & [0.7,0.9] & [0.7,0.9]\\ [0.4,0.7] & [0.1,0.3] & 0.5 & [0.7,0.8]\\ [0.3,0.5] & [0.2,0.4] & [0.2,0.3] & 0.5\end{bmatrix}.$$

方法 1　利用式(2) 进行验证,结果见表 3.

方法 2　利用式(4) 进行验证,结果如下:

$$\bigcap_{k=1}^{4}\overline{a}_{1k}+\overline{a}_{k2}-0.5=[0.2,0.4]\cap[0.2,0.4]\cap[-0.1,0.4]\cap[0.2,0.6]=[0.2,0.4],$$
$$\bigcap_{k=1}^{4}\overline{a}_{1k}+\overline{a}_{k3}-0.5=[0.3,0.6]\cap[0.4,0.8]\cap[0.3,0.6]\cap[0.2,0.5]=[0.4,0.5],$$
$$\bigcap_{k=1}^{4}\overline{a}_{1k}+\overline{a}_{k4}-0.5=[0.5,0.7]\cap[0.3,0.7]\cap[0.5,0.9]\cap[0.5,0.7]=[0.5,0.7],$$
$$\bigcap_{k=1}^{4}\overline{a}_{2k}+\overline{a}_{k3}-0.5=[0.4,0.9]\cap[0.7,0.9]\cap[0.7,0.9]\cap[0.3,0.6]=\Phi,$$
$$\bigcap_{k=1}^{4}\overline{a}_{2k}+\overline{a}_{k4}-0.5=[0.6,1.0]\cap[0.6,0.8]\cap[0.9,1.2]\cap[0.6,0.8]=\Phi,$$
$$\bigcap_{k=1}^{4}\overline{a}_{3k}+\overline{a}_{k4}-0.5=[0.4,0.9]\cap[0.2,0.6]\cap[0.7,0.8]\cap[0.7,0.8]=\Phi.$$

从上面的式子可以看出,区间数互补判断矩阵 $\overline{A}$ 不满足式(5),因而 $\overline{A}$ 不具有一致性.

方法3　设区间数互补判断矩阵一致性指标 CGCI 的临界值 $\delta=0.038657$. 将数据代入 QP 模型,解得 CGCI$^*=0.004706<0.038657$,也说明区间数互补判断矩阵 $\overline{A}$ 不具有一致性,但具有满意一致性.

表3 一致性检验

判别元素	i	j	k	$l_{ik} + l_{kj} - 0.5$	$u_{ik} + u_{kj} - 0.5$	Consistency test
	1	2	1	0.2	0.4	$\max l_{ik} + l_{kj} - 0.5 = 0.2$
a_{12}	1	2	3	-0.1	0.4	$\min u_{ik} + u_{kj} - 0.5 = 0.4$
	1	2	4	0.2	0.6	passed
	1	3	1	0.3	0.6	$\max l_{ik} + l_{kj} - 0.5 = 0.4$
a_{13}	1	3	2	0.4	0.8	$\min u_{ik} + u_{kj} - 0.5 = 0.5$
	1	3	4	0.2	0.5	passed
	1	4	1	0.5	0.7	$\max l_{ik} + l_{kj} - 0.5 = 0.5$
a_{14}	1	4	2	0.3	0.7	$\min u_{ik} + u_{kj} - 0.5 = 0.7$
	1	4	3	0.5	0.9	passed
	2	3	1	0.4	0.9	$\max l_{ik} + l_{kj} - 0.5 = 0.7$
a_{23}	2	3	2	0.7	0.9	$\min u_{ik} + u_{kj} - 0.5 = 0.6$
	2	3	4	0.3	0.6	failed
	2	4	1	0.6	1.0	$\max l_{ik} + l_{kj} - 0.5 = 0.9$
a_{24}	2	4	2	0.6	0.8	$\min u_{ik} + u_{kj} - 0.5 = 0.8$
	2	4	3	0.9	1.2	failed
	3	4	1	0.4	0.9	$\max l_{ik} + l_{kj} - 0.5 = 0.7$
a_{34}	3	4	2	0.2	0.6	$\min u_{ik} + u_{kj} - 0.5 = 0.5$
	3	4	3	0.7	0.5	failed

注 当 $k = i$ 和 $k = j$ 时,结果是相同的,所以在表中只列出了 $k = i$ 的情况.

5 结 论

在利用判断矩阵进行求解排序向量前,应首先进行一致性检验,判别其是否合理.目前国内外学者关于区间数互补判断矩阵的一致性问题的研究较少.为此,本文对其进行了深入研究,提出了区间数互补判断矩阵的完全一致性、强一致性、一致性以及满意一致性定义,并讨论了它们之间的关系,具有一定的理论意义.所给出的区间数互补判断矩阵强一致、一致和满意一致的判别方法,为判定决策者给出的偏好信息是否合理提供了解决途径.对于满足不同一致性的区间数互补判断矩阵,如何选用合理的排序方法,还有待于进一步研究.

参考文献(References)

[1] Satty T L. The analysis hierarchy process[M]. New York: McGraw-Hill, 1980.

[2] Satty T L, Vargas L. Uncertainty and rank order in the analytic hierarchy process[J]. European J of Operational Research, 1987, 32(1): 107-117.

[3] Salo A, Hamalainen R P. Preference programming through approximate ratio comparisons[J]. European J of Operational Research, 1995, 82(3): 458-475.

[4] Wang Y M, Elhag Taha M S. A goal programming method for obtaining interval weights from an interval comparison matrix[J]. European J of Operational Research, 2007, 177(1): 458-471.

[5] Wang Y M, Yang J B, Xu D L. Interval weight generation approaches based on consistency test and interval comparison matrices[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 167(1): 252-273.

[6] Mikhailov L. A fuzzy approach to deriving priorities from interval pairwise comparison judgments[J]. European J of Operational Research, 2004, 159(3): 687-704.

[7] 周礼刚, 陈华友. 两类区间数判断矩阵的一致性研究[J]. 运筹与管理, 2005, 14(4): 47-51.
(Zhou L G, Chen H Y. Research on consistency of two interval judgment matrices[J]. Operation and Management, 2005, 14(4): 47-51.)

[8] 侯福均, 吴祈宗. I型不确定数互补判断矩阵的一致性和排序研究[J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(10): 60-66.
(Hou F J, Wu Q Z. Consistency and ranking method for I type uncertain number complementary judgment matrix[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2005, 25(10): 60-66.)

[9] 巩在武, 刘思峰. 区间数互补判断矩阵的一致性及其排序研究[J]. 中国管理科学, 2006, 14(4): 64-68.
(Gong Z W, Liu S F. Research on consistency and priority of interval number complementary judgment matrix[J]. Chinese J of Management Science, 2006, 14(4): 64-68.)

[10] Xu Z S, Chen J. Some models for deriving the priority weights from interval fuzzy preference relations[J]. European J of Operational Research, 2008, 184(1): 266-280.

(下转第 733 页)

Research, 2004, 155(9): 1-21.

[2] Akbar M M, Manning E G, Shoja G C, et al. Heuristic solutions for the multiple-choice multi-dimension knapsack problem [J]. Lecture Notes in Computer Science, 2001, 2074(2): 659-668.

[3] Chu P C, Beasley J E. A genetic algorithm for the multidimensional knapsack problem[J]. J of Heuristics, 1998, 4(1): 63-86.

[4] 贺毅朝, 寇应展, 陈致明. 求解多选择背包问题的改进差分演化算法[J]. 小型微型计算机系统, 2007, 28(9): 1682-1685.
(He Y C, Kou Y Z, Chen Z M. A modified differential evolution algorithm for multiple-choice knapsack problem[J]. J of Chinese Computer Systems, 2007, 28(9): 1682-1685.)

[5] Dyer M E, Riha W O, Walker J. A hybrid dynamic programming/branch-and-bound algorithm for the multiple-choice knapsack problem [J]. J of Computational and Applied Mathematics, 1995, 58(11): 43-54.

[6] Sbihi A. A best first search exact algorithm for the multiple-choice multidimensional knapsack problem[J]. J Combinatorial Optimization, 2007, 13(4): 337-351.

[7] Hernandez R P, Dimopoulos N J. A new heuristic for solving the multichoice multidimensional knapsack problem [J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics — Part A: Systems and Humans, 2005, 35(5): 708-717.

[8] Hifi M, Michrafy M, Sbihi A. Heuristic algorithms for the multiple-choice multidimensional knapsack problem [J]. J of the Operational Research Society, 2004, 55(12): 1323-1332.

[9] Dorigo M, Maniezzo V, Colorni A. The ant system: Optimization by a colony of cooperating agents [J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics — Part B, 1996, 26(1): 1-13.

[10] Dorigo M, Gambardella L M. Ant colonies for the traveling salesman problem[J]. BioSystems, 1997, 43(2): 73-81.

[11] Glover F, Laguna M. Modern heuristic techniques for combinatorial problems [M]. Oxford: Blackwell Scientific Publishing, 1993: 70-150.

[12] Glover F, Laguna M, Marti R. Fundamentals of scatter search and path relinking [J]. Control and Cybernetics, 2000, 39(3): 653-684.

[13] Ho S C, Gendreau M. Path relinking for the vehicle routing problem[J]. J of Heuristics, 2006, 12(1/2): 55-72.

[14] Moser M, Jokanovic D P, Shiratori N. An algorithm for the multidimesional multiple-choice knapsack problem[J]. IEICE Trans on Fundamentals Electron, 1997, 80(3): 582-589.

[15] Khan S, Li K F, Manning E G, et al. Solving the knapsack problem for adaptive multimedia systems[J]. Stud Inform, 2002, 2(1): 154-174.

(上接第 728 页)

[11] 朱建军. 群决策中两类不确定偏好信息的集结方法研究[J]. 控制与决策, 2006, 21(8): 889-892.
(Zhu J J. Group aggregation approach of two kinds of uncertain preference information [J]. Control and Decision, 2006, 21(8): 889-892.)

[12] 肖四汉, 樊治平, 王梦光. Fuzzy 判断矩阵的一致性研究[J]. 系统工程学报, 2001, 16(2): 142-145.
(Xiao S H, Fan Z P, Wang M G. Study on consistency of fuzzy judgement matrix [J]. J of Systems Engineering, 2001, 16(2): 142-145.)

[13] Chiclana F, Herrera F, Herrera-Viedma E. Integrating three representation models in fuzzy multipurpose decision making based on fuzzy preference relations[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 97(1): 33-48.

[14] 徐泽水. 互反和互补判断矩阵的转换关系及其集成排序[J]. 系统工程与电子技术, 2002, 24(10): 60-63.
(Xu Z S. Transformation relations between reciprocal and complementary judgement matrices and their integrated prioritization approaches [J]. Systems Engineering and Electronics, 2002, 24(10): 60-63.)

[15] Aguarón J, Moreno-Jiménez J M. The geometric consistency index: Approximated thresholds [J]. European J of Operational Research 2003, 147(1): 137-145.

[16] Grawford G, Williams C. A note on the analysis of subjective judgments matrices[J]. J of Mathematical Psychology, 1985, 29(4): 387-405.

[17] 徐泽水. 区间数互补判断矩阵排序的一种实用发方法[J]. 运筹与管理, 2001, 10(1): 16-19.
(Xu Z S. A practical method for priority of interval number complementary judgement matrix [J]. Operations Research and Management Science, 2001, 10(1): 16-19.)