第 24 卷 第 4 期 控 制 与 决 策 2009 年 4 月
Vol. 24 No. 4 Control and Decision Apr. 2009

文章编号: 1001-0920(2009)04-0637-04

# 基于投影技术的三角模糊数型多属性决策方法研究

杨 静, 邱菀华
(北京航空航天大学 经济管理学院, 北京 100083)

**摘 要**: 针对属性权重完全未知且属性值为三角模糊数的多属性决策问题,提出一种基于线性规划和模糊向量投影的决策方法. 该方法基于加权属性值离差最大化建立一个线性规划模型,通过求解此模型得到属性的权重,计算各方案的加权属性值在模糊正理想点和负理想点上的投影,进而计算相对贴近度,并据此对方案进行排序. 最后,通过算例说明了模型及方法的可行性和有效性.

**关键词**: 模糊多属性决策; 投影; 离差; 权重
**中图分类号**: C934 **文献标识码**: A

# Method for multi-attribute decision-making based on projection

*YANG Jing, QIU Wan-hua*
(School of Economics and Management, Beihang University, Beijing 100083, China. Correspondent: YANG Jing, E-mail: yjing@cueb.edu.cn)

**Abstract**: For the fuzzy multi-attribute decision making (FMADM) problems, in which the informations about attribute weights are unknown completely and the attribute values are in the form triangular fuzzy numbers, a method based on the linear programming model and the projection of fuzzy numbers vectors is proposed. A linear programming model based on the maximal deviation of weighted attribute values is established. Then the attribute weights are obtained by solving the model. Furthermore, the alternatives are ranked by using the projection of the weighted attribute values of every alternatives on the fuzzy positive negative ideal point of alternatives. Finally, a numerical example shows the feasibility and effectiveness of the developed model and method.

**Key words**: Fuzzy multi-attribute decision-making; Projection; Deviation; Weight

## 1 引 言

模糊多属性决策(FMADM)是一种考虑模糊信息和决策空间离散的多准则决策问题,目前已成为国内外的热点研究课题,对属性值为三角模糊数的 FMADM 问题的研究已引起人们的重视[1-6]. 目前,有关属性权重信息确知或部分确知的模糊多属性决策问题已经取得了丰富的成果,但众多文献在决策过程中仍存在模糊数比较这一困难. 同时,对于属性权重未知且属性值为三角模糊数的 FMADM 问题的研究报道尚不多见. 文献[7]研究了属性权重未知、属性值和模糊效用偏好信息以三角模糊数形式给出的 FMADM 问题,基于期望值建立二次规划模型确定属性权重并对方案进行排序. 这种方法将模糊决策信息转化为精确值,容易造成决策信息的丢失. 鉴于此,本文进一步研究了属性权重完全未知且属性值为模糊语言的多属性决策问题.

## 2 模糊数基础知识

### 2.1 模 糊 数

**定义 1** $\mu_{\widetilde{M}}(x)$ 中称 $\widetilde{M}$ 为模糊数,如果 $\widetilde{M}$ 是定义在实数域 $R$ 上的模糊集,并满足以下条件:1) 存在唯一的点 $x_0 \in R$,使得 $\mu_{\widetilde{M}}(x_0) = 1$,此时 $x_0$ 称为 $\widetilde{M}$ 的平均值;2) $\mu_{\widetilde{M}}(x)$ 是左、右连续的;3) $\mu_{\widetilde{M}}(x)$ 是上凸的. 模糊数 $\widetilde{M}$ 的含义是"近似于 $x_0$ 的实数".

模糊数 $\widetilde{M}$ 的一般表达式为

$$\mu_{\widetilde{M}}(x_0) = \begin{cases} L(x), a \le x \le b; \\ R(x), b \le x \le c. \end{cases} \quad (1)$$

其中:$L(x)$ 为增函数且右连续,$R(x)$ 为减函数且左连续,$0 \le L(x), R(x) \le 1$. 如果函数 $L(x)$ 和 $R(x)$ 均为线性函数,则 $\widetilde{M}$ 称为三角模糊数,简记为 $\widetilde{M} = (a, b, c)$.

**收稿日期**: 2008-04-25; **修回日期**: 2008-10-06.
**基金项目**: 教育部人文社会科学规划研究基金项目(07JA630004).
**作者简介**: 杨静(1977—),女,山东成武人,讲师,博士生,从事模糊多属性决策的研究; 邱菀华(1946—),女,江西临川人,教授,博士生导师,从事决策分析、项目管理等研究.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

三角模糊数是一类特殊的模糊数,其隶属函数为

$$\mu_{\tilde{M}}(x)=\begin{cases}0, & x<a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leq x\leq b;\\ 1, & x=b;\\ \dfrac{c-x}{c-b}, & b<x\leq c;\\ 0, & x>c.\end{cases} \quad (2)$$

**定义 2** 设 $\tilde{M}=(a_1,b_1,c_1)$ 和 $\tilde{N}=(a_2,b_2,c_2)$ 为两个任意三角模糊数,则称

$$d(\tilde{M},\tilde{N})=\sqrt{\frac{1}{3}[(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2+(c_1-c_2)^2]} \quad (3)$$

为 $\tilde{M}$ 与 $\tilde{N}$ 的距离,且

$$\tilde{M}\odot\tilde{N}=\frac{1}{3}(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2) \quad (4)$$

为 $\tilde{a}$ 与 $\tilde{b}$ 的积.

**定义 3** 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_m)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$ 为两个任意 $m$ 维列向量,则称

$$\mathrm{Pr}_{\beta}^{\alpha}=\|\boldsymbol{\alpha}\|\times\frac{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\,\|\boldsymbol{\beta}\|}=\frac{\sum_{i=1}^{m}a_ib_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}b_i^2}} \quad (5)$$

为向量 $\alpha$ 在 $\beta$ 上的投影.

**定义 4** 设 $\boldsymbol{\beta}=(\tilde{b}_1,\tilde{b}_2,\cdots,\tilde{b}_m)^{\mathrm{T}}$ 为任意 $m$ 维三角模糊列向量,其中 $\tilde{b}_i=(b_i^L,b_i^M,b_i^R)$, $i=1,2,\cdots,m$,则称

$$\|\boldsymbol{\beta}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(\|\tilde{b}_i\|)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{3}[(b_i^L)^2+(b_i^M)^2+(b_i^R)^2]}$$

为 $m$ 维三角模糊列向量 $\beta$ 的模.

**定义 5** 设 $\tilde{\alpha}=(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_m)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\beta}=(\tilde{b}_1,\tilde{b}_2,\cdots,\tilde{b}_m)^{\mathrm{T}}$ 为两个任意 $m$ 维三角模糊列向量,其中 $\tilde{a}_i=(a_i^L,a_i^M,a_i^R)$, $\tilde{b}_i=(b_i^L,b_i^M,b_i^R)$, $i=1,2,\cdots,m$,则称

$$\mathrm{Pr}_{\beta}^{\tilde{\alpha}}=\frac{\sum_{i=1}^{m}\tilde{a}_i\odot\tilde{b}_i}{\|\boldsymbol{\beta}\|}=\frac{\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{3}(a_i^Lb_i^L+a_i^Mb_i^M+a_i^Rb_i^R)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(\|\tilde{b}_i\|)^2}}=\frac{\sum_{i=1}^{m}(a_i^Lb_i^L+a_i^Mb_i^M+a_i^Rb_i^R)}{\sqrt{3\sum_{i=1}^{m}[(b_i^L)^2+(b_i^M)^2+(b_i^R)^2]}} \quad (6)$$

为模糊向量 $\tilde{\alpha}$ 在 $\beta$ 上的投影. 显然, $\mathrm{Pr}_{\beta}^{\tilde{\alpha}}$ 越大, $\tilde{\alpha}$ 与 $\beta$ 越接近.

语言变量是自然语言中的词组,而不是以数作为值的变量. 对指标值的语言评价可用三角模糊数来表示,见表 1.

**表 1 语言变量评价与三角模糊数的转换关系**

| 语言变量评价 | 三角模糊数 |
|---|---|
| 很高(优) | (0.8,0.9,1) |
| 高(良) | (0.6,0.7,0.8) |
| 一般(中) | (0.4,0.5,0.6) |
| 低(及格) | (0.2,0.3,0.4) |
| 差(不及格) | (0,0.1,0.3) |

### 2.2 模糊指标的转换

由于不同的评价属性通常具有不同的物理量纲和量纲单位,且不同量纲和量纲单位会带来不可公度性,为此,决策之前应将属性进行无量纲和规范化处理. 可按 $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{m\times n}$ 进行归一化处理,将模糊矩阵转化为规范化决策矩阵.

对于效益型模糊指标,设有 $m$ 个模糊指标值 $\tilde{x}_i(i=1,2,\cdots,m)$. 如果 $\tilde{x}_i$ 是三角模糊数,记为 $\tilde{x}_i=(a_i,b_i,c_i)$,则经归一化的模糊指标值 $\tilde{r}_i(i\in 1,2,\cdots,m)$ 为

$$\tilde{r}_i=\Big(\frac{a_i}{c_i^{\max}},\frac{b_i}{b_i^{\max}},\frac{c_i}{a_i^{\max}}\wedge 1\Big). \quad (7)$$

对于成本型模糊指标值, 经归一化的模糊指标值 $\tilde{r}_i(i\in 1,2,\cdots,m)$ 为

$$\tilde{r}_i=\Big(\frac{a_i^{\min}}{c_i},\frac{b_i^{\min}}{b_i},\frac{c_i^{\min}}{a_i}\wedge 1\Big). \quad (8)$$

其中

$$a^{\max}=\max_i\{a_i,i=1,2,\cdots,m\},$$
$$a^{\min}=\min_i\{a_i,i=1,2,\cdots,m\}.$$

同样可求出 $b^{\max}, b^{\min}, c^{\max}, c^{\min}$, $\wedge$ 表示取小运算,加权规范化决策矩阵为

$$\tilde{Z}=(\tilde{z}_{ij})_{m\times n}=(w_i\tilde{r}_{ij})_{m\times n}.$$

## 3 决策方法

因为属性权重未知,而属性权重的不确定性会引起决策方案排序的不确定性. 一般地,若所有决策方案在属性 $X_i$ 下的属性值 $\tilde{a}_{ij}(j=1,2,\cdots,n)$ 差异越小,则说明该属性权重对方案决策的作用越小;反之,如果属性 $X_i$ 能使所有决策方案的属性值 $\tilde{a}_{ij}$ 有较大的离差, 则说明该属性对方案决策将起重要作用. 所以, 从对决策方案进行排序或择优的角度考虑,无论方案属性值本身重要程度如何,方案属性值离差越大则应该赋予越大的权重,离差越小则应该赋予越小的权重. 特别地, 若所有决策方案在属性 $X_i$ 下的属性值 $\tilde{a}_{ij}$ 无差异, 则此属性对方案的决策

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

将不起作用,可令权重为零.

基于上述思想,在加权规范化矩阵 $\tilde{Z}$ 中,对第 $i$ 个属性 $X_i$,方案 $A_j$ 的加权属性值 $\tilde{z}_{ij}$ 与其他方案属性值的离差定义为

$$d_j(w_i) = \sum_{k=1}^{n} d(\tilde{z}_{ij}, \tilde{z}_{ik}) = \sum_{k=1}^{n} d(\tilde{r}_{ij}, \tilde{r}_{ik})\, w_i,$$

则对第 $i$ 个属性 $X_i$,所有决策方案与其他决策方案的总离差为 $d(w_i) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d(\tilde{r}_{ij}, \tilde{r}_{ik})\, w_i$. 从而,权重向量 $w$ 的选择应使所有属性对所有决策方案的总离差最大. 为此,建立下列线性规划模型:

$$\max\ d(w) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d(\tilde{r}_{ij}, \tilde{r}_{ik})\, w_i,$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{m} w_i^2 = 1,\ w_i \geq 0.$$

构造 Lagrange 乘子函数

$$L(w,\lambda) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d(\tilde{r}_{ij}, \tilde{r}_{ik})\, w_i + \lambda\left(\sum_{i=1}^{m} w_i^2 - 1\right).$$

令

$$\frac{\partial L}{\partial w_i} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d(\tilde{r}_{ij}, \tilde{r}_{ik}) + 2\lambda w_i = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{m} w_i^2 - 1 = 0,$$

解得

$$w_i = \frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d(\tilde{r}_{ij}, \tilde{r}_{ik})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d(\tilde{r}_{ij}, \tilde{r}_{ik})\right)^2}},$$

$$i = 1,2,\cdots,m.$$

对上述权重向量进行归一化处理得

$$w_i = \frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d(\tilde{r}_{ij}, \tilde{r}_{ik})}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d(\tilde{r}_{ij}, \tilde{r}_{ik})},$$

$$i = 1,2,\cdots,m, \tag{9}$$

将 $w_i$ 代入 $\tilde{Z} = (\tilde{z}_{ij})_{m\times n} = (w_i \tilde{r}_{ij})_{m\times n}$,可得加权规范化矩阵 $\tilde{Z} = (\tilde{z}_{ij})_{m\times n}$.

**定义 6**　称 $\tilde{z}^{+} = [\tilde{z}_1^{+}, \tilde{z}_2^{+}, \cdots, \tilde{z}_m^{+}]^{\mathrm{T}}$ 为决策方案的模糊正理想点,且

$$\tilde{z}_i^{+} = (z_i^{+L}, z_i^{+M}, z_i^{+R}) = \left(\max_j z_{ij}^{L}, \max_j z_{ij}^{M}, \max_j z_{ij}^{R}\right). \tag{10}$$

**定义 7**　称 $\tilde{z}^{-} = [\tilde{z}_1^{-}, \tilde{z}_2^{-}, \cdots, \tilde{z}_m^{-}]^{\mathrm{T}}$ 为决策方案的模糊负理想点,且

$$\tilde{z}_i^{-} = (z_i^{-L}, z_i^{-M}, z_i^{-R}) = \left(\min_j z_{ij}^{L}, \min_j z_{ij}^{M}, \min_j z_{ij}^{R}\right). \tag{11}$$

首先,计算各方案加权属性值向量 $\tilde{z}_j = [\tilde{z}_{1j}, \tilde{z}_{2j}, \cdots, \tilde{z}_{mj}]^{\mathrm{T}}(j \in N)$ 在 $\tilde{z}^{+}$ 上的投影

$$\mathrm{Pr}_{\tilde{z}^{+}}^{\tilde{z}_j} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\left(z_{ij}^{L}\max_j z_{ij}^{L} + z_{ij}^{M}\max_j z_{ij}^{M} + z_{ij}^{R}\max_j z_{ij}^{R}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left[\left(\max_j z_{ij}^{L}\right)^2 + \left(\max_j z_{ij}^{M}\right)^2 + \left(\max_j z_{ij}^{R}\right)^2\right]}}; \tag{12}$$

然后,计算各方案加权属性值向量 $\tilde{z}_j = [\tilde{z}_{1j}, \tilde{z}_{2j}, \cdots, \tilde{z}_{mj}]^{\mathrm{T}}(j \in N)$ 在 $\tilde{z}^{-}$ 上的投影

$$\mathrm{Pr}_{\tilde{z}^{-}}^{\tilde{z}_j} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\left(z_{ij}^{L}\min_j z_{ij}^{L} + z_{ij}^{M}\min_j z_{ij}^{M} + z_{ij}^{R}\min_j z_{ij}^{R}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left[\left(\min_j z_{ij}^{L}\right)^2 + \left(\min_j z_{ij}^{M}\right)^2 + \left(\min_j z_{ij}^{R}\right)^2\right]}}; \tag{13}$$

计算各方案的相对贴近度

$$C_j = \frac{\mathrm{Pr}_{\tilde{z}^{+}}^{\tilde{z}_j}}{\mathrm{Pr}_{\tilde{z}^{-}}^{\tilde{z}_j} + \mathrm{Pr}_{\tilde{z}^{+}}^{\tilde{z}_j}}; \tag{14}$$

最后,根据 $C_j$ 大小对方案进行排序或择优,$C_j$ 越大,对应的方案 $A_j$ 越优.

## 4　应用实例

考核、选拔干部是一个多因素的决策问题. 某单位在对干部进行考核选拔时,首先制定了 5 项考核指标(属性):思想品德($X_1$),工作作风($X_2$),文化水平和知识结构($X_3$),领导能力($X_4$),开拓能力($X_5$),有 4 位候选人 $A_1, A_2, A_3, A_4$ 参与考核. 决策者对每个候选人的各项指标进行评估,结果如表 2 所示,试确定最佳候选人.

**表 2　决策矩阵**

| $X_j$ | 思想品德 | 工作作风 | 文化知识 | 领导能力 | 开拓能力 |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 优 | 良 | 优 | 中 | 良 |
| $A_2$ | 良 | 中 | 中 | 优 | 优 |
| $A_3$ | 良 | 良 | 良 | 优 | 良 |
| $A_4$ | 良 | 优 | 差 | 优 | 中 |

Step1:将上述决策矩阵转化为以三角模糊数表示的决策矩阵 $\tilde{R}$,然后再转换为规范化决策矩阵 $R$,有

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} (0.8,0.9,1) & (0.6,0.7,0.8) & (0.8,0.9,1) & (0.4,0.5,0.6) & (0.6,0.7,0.8) \\ (0.6,0.7,0.8) & (0.4,0.5,0.6) & (0.4,0.5,0.6) & (0.8,0.9,1) & (0.8,0.9,1) \\ (0.6,0.7,0.8) & (0.6,0.7,0.8) & (0.6,0.7,0.8) & (0.8,0.9,1) & (0.6,0.7,0.8) \\ (0.6,0.7,0.8) & (0.8,0.9,1) & (0,0.1,0.3) & (0.8,0.9,1) & (0.4,0.5,0.6) \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} (0.8,1.1) & (0.6,0.78,1) & (0.8,1,1) & \rightarrow \\ (0.6,0.78,1) & (0.4,0.56,1) & (0.4,0.56,0.75) & \\ (0.6,0.78,1) & (0.6,0.78,1) & (0.6,0.78,1) & \\ (0.6,0.78,1) & (0.8,1,1) & (0,0.11,0.375) & \end{bmatrix}$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\leftarrow \begin{matrix} (0.4,0.56,0.75) & (0.6,0.78,1) \\ (0.8,1,1) & (0.8,1,1) \\ (0.8,1,1) & (0.6,0.78,1) \\ (0.8,1,1) & (0.4,0.56,0.75) \end{matrix} \Bigg] .$$

Step2: 利用公式求得权重向量为

$$w = (0.187, 0.091, 0.208, 0.319, 0.195)^{\mathrm{T}}.$$

Step3: 对矩阵 $R$ 加权重进行规格化,得到属性矩阵

$$\widetilde{B} =$$

$$\Bigg[ \begin{matrix} (0.1496,0.187,0.187) & (0.0546,0.071,0.091) \\ (0.1122,0.1459,0.187) & (0.0363,0.051,0.091) \\ (0.1122,0.1459,0.187) & (0.0546,0.071,0.091) \\ (0.1122,0.1458,0.187) & (0.0728,0.091,0.091) \end{matrix} \rightarrow$$

$$\leftarrow \begin{matrix} (0.1664,0.208,0.208) & (0.1276,0.1786,0.2393) \\ (0.0832,0.1165,0.156) & (0.2552,0.319,0.319) \\ (0.1248,0.1622,0.208) & (0.2552,0.319,0.319) \\ (0,0.02289,0.078) & (0.2552,0.319,0.319) \end{matrix} \rightarrow$$

$$\leftarrow \begin{matrix} (0.117,0.1521,0.195) \\ (0.156,0.195,0.195) \\ (0.117,0.1521,0.195) \\ (0.078,0.1092,0.1463) \end{matrix} \Bigg] .$$

Step4: 求正理想点和负理想点分别为

$$p^{*} =$$

$$((0.1496, 0.187, 0.187), (0.0728, 0.091, 0.091)$$
$$(0.1664, 0.208, 0.208) (0.2552, 0.319, 0.319)$$
$$(0.156, 0.195, 0.195)),$$

$$P^{-} =$$

$$((0.1122, 0.1459, 0.187) (0.0363, 0.051, 0.091)$$
$$(0, 0.02289, 0.078) (0.1276, 0.1786, 0.2393)$$
$$(0.078, 0.1092, 0.1463)).$$

Step5: 计算方案 $A_1, A_2, A_3, A_4$ 在正理想点和负理想点上的投影,分别为

$$\mathrm{Pr}_{\tilde{z}^{+}}^{\tilde{z}_1} = 0.6172,\ \mathrm{Pr}_{\tilde{z}^{+}}^{\tilde{z}_2} = 0.6911,$$

$$\mathrm{Pr}_{\tilde{z}^{+}}^{\tilde{z}_3} = 0.7117,\ \mathrm{Pr}_{\tilde{z}^{+}}^{\tilde{z}_4} = 0.5855,$$

$$\mathrm{Pr}_{\tilde{z}^{-}}^{\tilde{z}_1} = 0.5674,\ \mathrm{Pr}_{\tilde{z}^{-}}^{\tilde{z}_2} = 0.6714,$$

$$\mathrm{Pr}_{\tilde{z}^{-}}^{\tilde{z}_3} = 0.6694,\ \mathrm{Pr}_{\tilde{z}^{-}}^{\tilde{z}_4} = 0.6145.$$

Step6: 计算各方案的相对贴近度

$$C_j = \frac{\mathrm{Pr}_{\tilde{z}^{+}}^{\tilde{z}_j}}{\mathrm{Pr}_{\tilde{z}^{-}}^{\tilde{z}_j} + \mathrm{Pr}_{\tilde{z}^{+}}^{\tilde{z}_j}},\ C_1 = 0.521,$$

$$C_2 = 0.507,\ C_3 = 0.515,\ C_4 = 0.488.$$

可以看出, $C_1 > C_3 > C_2 > C_4$,因此,方案排序为 $A_1 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_4$,即 $A_1$ 为最优方案.

## 5 结 论

本文针对属性权重完全未知且属性值为三角模糊数的多属性决策问题,提出了一种基于线性规划和模糊向量投影的决策方法. 该方法基于加权属性值离差最大化建立一个线性规划模型,通过求解此模型得到属性的权重. 然后通过计算各方案的加权属性值在模糊正理想点和负理想解上的投影,计算相对贴近度,并据此对方案进行排序. 算例的结果也表明了方法是行之有效的.

## 参考文献( References)


[1] Dong W M, Wong F S. Fuzzy weighted averages and implementation of the extension principle[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1987, 21(1): 183-199.

[2] Liou T S, Wang M J. Fuzzy weighted average: An improved algorithm[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 49(1): 307-315.

[3] Liou T S, Wang M J. Ranking fuzzy numbers with integral value[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 50(3): 247-255.

[4] Guh Y Y, Hong C C, Wang K M, et al. Fuzzy weighted average: A max-min paired elimination method[J]. Computer Mathmatic Application, 1996, 32(2): 115-123.

[5] Lee D H, Park D. An efficient algorithm for fuzzy weighted average[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 87(1): 39-45.

[6] Kao C, Liu S T. Fractional programming approach to fuzzy weighted average[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 120(2): 435-444.

[7] 徐泽水. 基于期望值的模糊多属性决策法及其研究[J]. 系统工程理论与实践, 2004, 24(1): 109-113.
(Xu Z S. Method based on expected values for fuzzy multiple attribute decision making problems with preference information on alternatives[J]. Systems Engineering-theory and Practice, 2004, 24(1): 109-113.)

[8] 周宏安, 刘三阳. 基于离差最大化模型的模糊多属性决策投影法[J]. 系统工程与电子技术, 2007, 29(5): 741-744.
(Zhou H A, Liu S Y. Projection method of fuzzy multi-attribute decision-making based on the maximal deviation model[J]. Systems Engineering and Electronics, 2007, 29(5): 741-744.)


© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net