

金属材料表面静摩擦学特性的预测研究——实验佐证

田红亮¹, 刘芙蓉¹, 赵春华¹, 方子帆¹, 朱大林¹, 陈保家², 秦红玲¹, 张发军¹

(1. 三峡大学 机械与材料学院, 湖北 宜昌 443002;

2. 三峡大学 水电机械设备设计与维护湖北省重点实验室, 湖北 宜昌 443002)

摘要: 给出有关粗糙表面单个微凸体接触点面积的概率分布密度的推导过程。该概率分布密度适用于机械加工粗糙表面, 不管磨削、铣削、车削表面都满足此概率分布密度的关系式。按照整体柔性结合面的结构函数, 提出具体计算分形维数、分形粗糙度的方法。对文献[1]的理论计算和分析进行定量实验佐证。实验佐证显示: 在一定法向加载重物的条件下, 理论静摩擦系数和实验的绝对误差在 $-0.033\ 02 \sim 0.019\ 26$ 之间, 理论静摩擦系数和实验的相对误差在 $-8.323\% \sim 5.512\%$ 之间。

关键词: 金属材料表面; 静摩擦系数; 概率分布密度; 结构函数

中图分类号: TH113.1 **文献标识码:** A

Prediction of static friction performance of metallic material surfaces with experimental proof

TIAN Hong-liang¹, LIU Fu-rong¹, ZHAO Chun-hua¹, FANG Zi-fan¹,

ZHU Da-lin¹, CHEN Bao-jia², QIN Hong-ling¹, ZHANG Fa-jun¹

(1. College of Mechanical and Material Engineering, China Three Gorges University, Yichang 443002, China;

2. Hubei Provincial Key Laboratory of Hydroelectric Machinery Design and Maintenance, China Three Gorges University, Yichang 443002, China)

Abstract: The probability distribution density associated with an individual asperity contact spot area on a certain rough surface was derived in detail. The probability distribution density was applicable for mechanical processing of rough surfaces in spite of grinding, milling and turning. The approach of computing fractal dimension and fractal roughness was proposed according to the structure function of a whole flexible joint surface. The theoretical computation and analysis in reference [1] were validated quantitatively and experimentally. The experimental proof showed that under the condition of a certain normal loading, the absolute error between the theoretical static friction coefficients and experimental ones varies from -0.03302 to 0.01926 , and the relative error between them fluctuates from -8.323% to 5.512% .

Key words: metallic material surface; static friction coefficient; probability distribution density; structure function

一个零件各处的截面特性(包括截面形状、大小及材质)可以是相同的,如等截面轴;各部分截面的特性也可能不同,如台阶轴。等截面轴的零件由一个元件组成。台阶轴零件由多个元件组成,各个元件的连接部位称为刚性结合面,两相邻元件在刚性结合面无相对位移。一台机器由众多零件组成,零件与零件之间的连接部位称为柔性结合面。

摩擦学的研究对于国民经济具有重要意义,摩擦导致的磨损是机械设备失效的主要原因,大约有 80% 的损坏零件是由于各种形式的磨损引起的。所以在机

械结构中,研究和预测柔性结合面静摩擦学特性是非常重要的。传统的 Coulomb 摩擦第一定律^[1-3]认为,摩擦力和法向载荷成正比,静摩擦系数和所施加的法向载荷无关,亦不依赖于切向载荷,只随接触材料的不同而变化。但是随着现代摩擦学的发展,发现 Coulomb 摩擦第一定律中摩擦力和法向载荷不成正比;静摩擦系数对于同种材料不变的结论不适合实际工程;静摩擦系数随着接触正压力的增大而增大等。

1882 年 Hertz 发表经典论文《论弹性固体的接触》,但 Hertz 理论不考虑接触面的介质(如润滑油),不计动摩擦影响。此后,在接触力学方面的进展主要与消除这些限制有关。Chang 等^[4]采用古典的 Greenwood-Williamson 基本弹性接触模型(塑性接触面积与弹性接触面积之比为 0.02)^[5],顾及粘着力的作用,构建金属粗糙表面间的静摩擦系数计算模型。尤晋闽等^[6-7]综合运用微凸体的完全弹性、弹-塑性及完全

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51275273; 51075234; 51205230); 水电机械设备设计与维护湖北省重点实验室开放基金资助项目(2012KJX05); 三峡大学博士科研启动基金资助项目(KJ2012B013; KJ2012B014)

收稿日期: 2013-04-16 修改稿收到日期: 2013-08-06

第一作者 田红亮 男, 博士, 副教授, 1973 年 6 月生

塑性等不同变形机制,建立干摩擦柔性结合面的静摩擦系数的统计计算模型,此模型考虑完全弹性区、弹-塑性 I 区的接触点承担切向载荷的能力,获得随着法向载荷的增加静摩擦系数逐渐减小的结论,支持经典摩擦学观点^[8]。盛选禹等^[9]应用 Majumdar 等^[10]提出的分形几何理论,预测静摩擦系数。Sui 等^[11]对文献[9]的静摩擦系数进行改进。但文献[10]在分析峰顶曲率半径 R 时具有计算原理性缺陷^[12-13],另外文献[9,11]在算法上皆具有四个共性瑕疵:①法向总载荷、总摩擦力都应是条件等式,反之就会出现文献[10]中的 2 个不足(图 10(b)、11(b)的纵坐标弹性接触面积与实际接触面积之比 A_{re}/A_r 在 0 刻度以下均有坐标)、文献[14]中的 3 个弊端(图 3、4、6 的纵坐标接触率 A_r^* 在 0 刻度以下皆有坐标)、文献[15]中的 2 个缺点(图 3(b)、3(c)的纵坐标弹性接触面积与实际接触面积之比 A_{re}/A_r 在 0 刻度以下均有坐标);②沿袭文献[10]的计算原理,带来很多计算错误;③文献[9]给出“ f 随 ϕ 的增加而降低”、文献[11]给出“The static friction coefficient decreases with the increase of material property ϕ ”的结论错误;④静摩擦系数的模拟数字最大值是 1 000(文献[9]的图 3),与实际机械工程粗糙表面静摩擦系数的分布范围 0~1 迥异。

文献[1]改进分形几何理论,探究金属材料表面最大静摩擦力的来源机理,建立法向总载荷、最大静摩擦力、静摩擦系数的改进分形模型,经过数值模拟,预测静摩擦学特性,其结论和一些传统摩擦学观点迥然不同,分析产生不同的原因。但文献[1]给出的接触面积分别与分形维数及载荷的关系等,都还缺少足够的实验佐证。本文根据整个柔性结合面的结构函数,给出识别柔性结合面分形维数、分形粗糙度的理论及实验方法,对文献[1]静摩擦系数的理论解进行定量实验佐证。

1 采用修正分形理论的金属表面静摩擦模型

1.1 分形几何理论的修正

处处连续、统计学自仿射特性、点点不可微的 Weierstrass-Mandelbrot 函数为:

$$z(x) = G^{D-1} \sum_{n=n_1}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi\gamma^n x)}{\gamma^{(2-D)n}} \quad (1)$$

式中: G 为分形粗糙度; D 为分形维数; n_1 为最低频率的初始项,且 $\gamma^{n_1} = 1/L$ 不同于文献[15]的 $\gamma^{n_1} = 11L$ (L 为取样长度); γ 为谱密度的尺度参数; x 为表面的取样长度坐标。

应当指出式(1)截然不同于文献[15]的式(5)。

自然海岸线的特点是将小尺度下的粗糙度在所有方向上放大相同倍数后,其概率分布与大尺度下的一

致,这种曲线具有统计自相似特性。但是,绝大多数实际曲线并不具有统计自相似特性,而是具有统计自仿射特性,即要使较小尺度下的概率分布与较大尺度下的一致,就必须在不同方向上放大不同的倍数,典型的例子是分子的布朗运动曲线。因此,要方便地计算统计自仿射曲线的分形维数 D 、分形粗糙度 G ,就必须采用特殊方法。

Mandelbrot 发现海洋面岛屿的面积分布有幂函数规律:

$$Nr(A > a) = \frac{F'}{a^{0.5D}} \quad (2)$$

式中: Nr 为面积 A 大于面积 a 的岛屿之总数; F' 为待定未知数; a 为一个岛屿的面积。

应当指出式(2)不同于文献[15]的式(19)。

许多工程表面形貌的轮廓线都具有统计自仿射分形特性。若将粗糙表面(如金属加工表面)放大到适当尺寸,就会发现类似于地球表面的高山峡谷,用一理想平面水平切取该表面形成的接触点,也类似于海岸面的岛屿。因此,假设平面与粗糙表面接触时接触点面积的分布规律与海洋面岛屿面积的分布规律相同,即接触点的数目见式(2)。但工程表面形貌的轮廓线与岛屿的海洋线不同的是,前者接触点的轮廓曲线不是统计自相似曲线,而是统计自仿射曲线。

假设最大的微凸体接触点面积为 a_L , 数量为 1 个,将此假设条件代入式(2)得:

$$Nr(A = a_L) = \frac{F'}{a_L^{0.5D}} = 1 \quad (3)$$

$$F' = a_L^{0.5D} \quad (4)$$

将式(4)代入式(2)可得连续随机变量 a 的概率分布函数为:

$$Nr(a < A \leq a_L) = \left(\frac{a_L}{a}\right)^{0.5D} \quad (5)$$

连续随机变量 a 的概率分布密度为:

$$n(a) = -\frac{dNr(a < A \leq a_L)}{da} = 0.5Da_L^{0.5D} a^{-1-0.5D}, \quad 0 < a \leq a_L \quad (6)$$

应当指出式(6)相异于文献[11]的式(6)。式(6)的单位是 m^{-2} ,由式(5)可以看出,当微凸体接触点的面积 $a \rightarrow 0$ 时, $\lim_{a \rightarrow 0} Nr(a < A \leq a_L) = \left(\frac{a_L}{a}\right)^{0.5D} = +\infty$,即接触点的数量趋于无穷;由式(6)可以看出, $\lim_{a \rightarrow 0} n(a) = 0.5Da_L^{0.5D} a^{-1-0.5D} = +\infty$ 。这 2 种情况符合表面粗糙度具有多重尺度(毫米、微米和纳米级甚至更小)的分形特性。如同牛顿第二定律 $F = ma$ (运动的改变与所加的动力成正比,并发生在所加的力的那个直线方向上)只适用于与光速比低速运动、宏观(不适用于微观原

子)、参照系为惯性系的物体,也与我们日常生活中常见的不管磨削、铣削、车削物体的运动规律非常符合一样,分形学的创始人 Mandelbrot^[16-17],生前试图通过一种方法来描述自然界的不规则现象,将工程表面形貌的轮廓线和岛屿的海洋线类比,提出粗糙表面微凸体接触点面积 a 的概率分布密度,见式(6),该式适用于机械加工粗糙表面,不管磨削、铣削、车削表面都满足关系式(6)。数学家、分形几何之父、描述自然界粗糙度^[17]的 Mandelbrot 认为式(6)具有普适性在分形理论的定量计算方面翻开了新的篇章,特别具有里程碑意义。

按照核心关系式(6)可得柔性结合面无量纲法向总载荷^[1]为:

$$P^*(A_r^* > A_{rc}^*) = \frac{P(A_r > A_{rc})}{E'A_a} = \left\{ \begin{aligned} &\frac{4D}{3\sqrt{\pi}(3-2D)}G^{*D-1}\left(\frac{2-D}{D}A_r^*\right)^{0.5D} \times \\ &\left[\left(\frac{2-D}{D}A_r^*\right)^{1.5-D} - a_c^{*1.5-D}\right] + \\ &K\phi A_r^{*0.5D}\left(\frac{D}{2-D}a_c^*\right)^{1-0.5D}, D \neq 1.5 \\ &\sqrt{\frac{G^*}{\pi}}\left(\frac{A_r^*}{3}\right)^{0.75} \ln \frac{A_r^*}{3a_c^*} + K\phi A_r^{*0.75}(3a_c^*)^{0.25}, D = 1.5 \end{aligned} \right. \quad (7)$$

式中: $A_r^* = \frac{A_r}{A_a}$, A_a 为表观接触面积; $G^* = \frac{G}{\sqrt{A_a}}$; $a_c^* = \frac{a_c}{A_a}$
 $= (0.5\sqrt{\pi}K\phi)^{\frac{2}{1-D}}G^{*2}$ 不同于文献[11]的式(12); $A_{rc}^* = \frac{A_{rc}}{A_a} = \frac{D}{2-D}a_c^*$ 。

1.2 金属表面的静摩擦系数

在两接触体中存在组合法向和切向力,无文献记载应力场与实际接触面积的完全解。1983 年 Hamilton

设想:两接触体承担法向弹性载荷 P_e ,由赫兹解得到的接触区域形状不受追加实用切向力 Q 的影响;假如比值 $Q/P_e < 0.3$,于是失效将首先发生在表面下,稍许远离当 $Q=0$ 时赫兹解对应的失效点;一经当比值 $Q/P_e > 0.3$ 以后,失效点跃迁到表面,失效发生在接触边界的边远边缘上^[4]。

现假如 $Q/P_e > 0.3$,接触边界边远边缘的表面应力场分别为:

$$\sigma_1 = \frac{(1-2\nu)P_e}{2\pi r^2} + \frac{3Q}{4r^2}\left(\frac{\nu}{4} + 1\right) \quad (8)$$

$$\sigma_2 = 0 \quad (9)$$

$$\sigma_3 = \frac{9\nu Q}{16r^2} - \frac{(1-2\nu)P_e}{2\pi r^2} \quad (10)$$

式中: ν 为较软材料的泊松比。

需要一提的是式(8)不同于文献[7]的式(2),式(10)不同于文献[11]的式(1)。

按照式(8)、(10)可得柔性结合面无量纲最大静摩擦力^[1]为:

$$F^*(A_r^* > A_{rc}^*) = \frac{F(A_r > A_{rc})}{E'A_a} = \left\{ \begin{aligned} &\frac{8\phi}{\pi(6-3\nu)}\left[A_r^* - A_r^{*0.5D}\left(\frac{D}{2-D}a_c^*\right)^{1-0.5D}\right] + \\ &\frac{32(2\nu-1)D}{3\pi^{1.5}(6-3\nu)(3-2D)}G^{*D-1}\left(\frac{2-D}{D}A_r^*\right)^{0.5D} \times \\ &\left[\left(\frac{2-D}{D}A_r^*\right)^{1.5-D} - a_c^{*1.5-D}\right], D \neq 1.5 \\ &\frac{8\phi}{\pi(6-3\nu)}\left[A_r^* - A_r^{*0.75}(3a_c^*)^{0.25}\right] + \\ &\frac{8(2\nu-1)}{\pi^{1.5}(6-3\nu)}\sqrt{G^*}\left(\frac{A_r^*}{3}\right)^{0.75} \ln \frac{A_r^*}{3a_c^*}, D = 1.5 \end{aligned} \right. \quad (11)$$

需要一提的是式(11)不同于文献[11]的式(22)、(23)。

根据式(7)暨式(11)可得柔性结合面的静摩擦系数为:

$$f = \frac{F^*(A_r^* > A_{rc}^*)}{P^*(A_r^* > A_{rc}^*)} = \left\{ \begin{aligned} &\frac{\frac{8\phi}{\pi(6-3\nu)}\left[A_r^* - A_r^{*0.5D}\left(\frac{D}{2-D}a_c^*\right)^{1-0.5D}\right] + \frac{32(2\nu-1)D}{3\pi^{1.5}(6-3\nu)(3-2D)}G^{*D-1}\left(\frac{2-D}{D}A_r^*\right)^{0.5D}\left[\left(\frac{2-D}{D}A_r^*\right)^{1.5-D} - a_c^{*1.5-D}\right]}{\frac{4D}{3\sqrt{\pi}(3-2D)}G^{*D-1}\left(\frac{2-D}{D}A_r^*\right)^{0.5D}\left[\left(\frac{2-D}{D}A_r^*\right)^{1.5-D} - a_c^{*1.5-D}\right] + K\phi A_r^{*0.5D}\left(\frac{D}{2-D}a_c^*\right)^{1-0.5D}}, \\ &D \neq 1.5 \\ &\frac{\frac{8\phi}{\pi(6-3\nu)}\left[A_r^* - A_r^{*0.75}(3a_c^*)^{0.25}\right] + \frac{8(2\nu-1)}{\pi^{1.5}(6-3\nu)}\sqrt{G^*}\left(\frac{A_r^*}{3}\right)^{0.75} \ln \frac{A_r^*}{3a_c^*}}{\sqrt{\frac{G^*}{\pi}}\left(\frac{A_r^*}{3}\right)^{0.75} \ln \frac{A_r^*}{3a_c^*} + K\phi A_r^{*0.75}(3a_c^*)^{0.25}}, \\ &D = 1.5 \end{aligned} \right. \quad (12)$$

根据式(7)、(11)、(12),柔性结合面无量纲法向总载荷 P^* 、无量纲最大静摩擦力 F^* 、静摩擦系数 f 皆为接触率 A_r^* 的显函数。所以使用中间自变量 A_r^* ,可

构建 P^* 、 F^* 、 f 中任意二者之间的隐函数。如上所述,式(7)、(11)、(12)为金属材料柔性结合面静摩擦学特性的完全解^[18-19]。

2 辨识两个分形参数的结构函数方法

功率信号式(1)的自相关函数^[20]为:

$$R_z(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} z(x)z(x - \tau) dx \quad (13)$$

将式(1)代入式(13)得:

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= G^{2D-2} \times \\ \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{n=n_1}^{+\infty} \frac{\cos 2\pi\gamma^n x}{\gamma^{(2-D)n}} \sum_{m=n_1}^{+\infty} \frac{\cos 2\pi\gamma^m (x - \tau)}{\gamma^{(2-D)m}} dx &= \\ \frac{1}{2} G^{2D-2} \sum_{m=n_1}^{+\infty} \sum_{n=n_1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma^{(2-D)(m+n)}} \times \\ \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sin \pi(\gamma^m + \gamma^n) T}{\pi(\gamma^m + \gamma^n) T} \cos 2\pi\gamma^m \tau + \right. \\ \left. \frac{\sin \pi(\gamma^m - \gamma^n) T}{\pi(\gamma^m - \gamma^n) T} \cos 2\pi\gamma^n \tau \right] &= \frac{1}{2} G^{2D-2} \times \\ \sum_{m=n_1}^{+\infty} \sum_{n=n_1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma^{(2-D)(m+n)}} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\sin \pi(\gamma^m - \gamma^n) T}{\pi(\gamma^m - \gamma^n) T} \cos 2\pi\gamma^m \tau &= \\ \frac{1}{2} G^{2D-2} \sum_{n=n_1}^{+\infty} \frac{\cos 2\pi\gamma^n \tau}{\gamma^{(4-2D)n}} \end{aligned} \quad (14)$$

需要指出的是,从式(14)的倒数第二式可知:若 $m \neq n$ 时,各项都是零,则只剩下 $m = n$ 时的一项。

象函数 $2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ 的傅里叶逆变换^[20]为:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{i\omega t} d\omega = e^{i\omega_0 t} \quad (15)$$

式中: ω 为无阻尼自然角频率。

则象原函数 $e^{i\omega_0 t}$ 的傅里叶变换为:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (16)$$

式中: $\delta(\omega)$ 为 Dirac delta 脉冲偶函数,单位是 ω 的倒数,且:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(cx) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(|c|x) dx = \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(y)}{|c|} dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(x)}{|c|} dx \end{aligned} \quad (17)$$

式中: c 为非零实常数; $y = |c|x$ 为积分新变量。

因而有:

$$\delta(cx) = \frac{\delta(x)}{|c|} \quad (18)$$

利用 Euler 公式,式(14)中通项象原函数 $\cos 2\pi\gamma^n \tau$ 的傅里叶变换^[20]为:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi\gamma^n \tau e^{-i2\pi f \tau} d\tau &= \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i2\pi(f-\gamma^n)\tau} + e^{-i2\pi(f+\gamma^n)\tau}}{2} d\tau \end{aligned} \quad (19)$$

式中: f 为无阻尼自然频率,不同于无阻尼自然角频率 $\omega, \omega = 2\pi f$ 。

将式(16)代入式(19)得:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi\gamma^n \tau e^{-i2\pi f \tau} d\tau =$$

$$\pi \{ \delta[2\pi(f - \gamma^n)] + \delta[2\pi(f + \gamma^n)] \} \quad (20)$$

将式(18)代入式(20)得:

$$\begin{aligned} F(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi\gamma^n \tau e^{-i2\pi f \tau} d\tau = \\ \frac{\delta(f - \gamma^n) + \delta(f + \gamma^n)}{2} \end{aligned} \quad (21)$$

振幅频谱式(21)的图形见图1。考虑粗糙表面微观几何形貌的随机分布特点,如仅计及无阻尼自然频率 $f > 0$ 单边振幅频谱,将 $-\gamma^n$ 相应的振幅 0.5 叠加在 γ^n 相应的振幅 0.5 上,合成可得总振幅为 1。故可将式(21)近似改写成实际粗糙表面形貌的振幅频谱:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi\gamma^n \tau e^{-i2\pi f \tau} d\tau \approx \delta(f - \gamma^n) \quad (22)$$

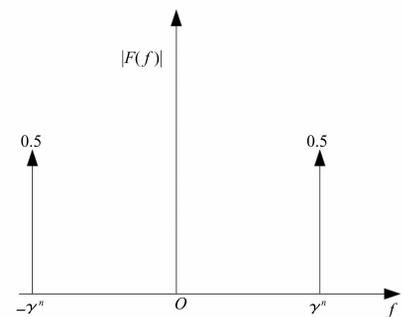


图1 式(14)中通项的振幅频谱
Fig. 1 Altitude frequency spectrum of general item in equation (14)

根据维纳-辛钦关系式^[20]可得离散自相关函数式(14)的离散功率谱密度函数为:

$$\begin{aligned} \tilde{P}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_z(\tau) e^{-i2\pi f \tau} d\tau = \\ \frac{1}{2} G^{2D-2} \sum_{n=n_1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma^{(4-2D)n}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi\gamma^n \tau e^{-i2\pi f \tau} d\tau \end{aligned} \quad (23)$$

将式(22)代入式(23)得:

$$\tilde{P}(f) \approx \frac{1}{2} G^{2D-2} \sum_{n=n_1}^{+\infty} \frac{\delta(f - \gamma^n)}{\gamma^{(4-2D)n}} \quad (24)$$

将离散功率谱密度函数式(24)转化为连续功率谱密度函数^[21]:

$$\begin{aligned} P(f) &\equiv \frac{1}{\Delta f} \int_{-\frac{1}{2}\Delta f}^{\frac{1}{2}\Delta f} \tilde{P}(f + f') df' = \frac{1}{2} G^{2D-2} \times \\ \sum_{n=n_1}^{+\infty} \int_{-\frac{1}{2}\Delta f}^{\frac{1}{2}\Delta f} \frac{\delta(f + f' - \gamma^n)}{\gamma^{(4-2D)n} \Delta f} df' &\approx \frac{1}{2} G^{2D-2} \frac{\Delta n}{\gamma^{(4-2D)n(f)}} \Delta f \end{aligned} \quad (25)$$

式中: Δf 为无阻尼自然频率的增量; Δn 为无阻尼自然频率指数的增量; $n(f)$ 为无阻尼自然频率零点指数,且:

$$n(f) = \log_{\gamma} f \quad (26)$$

将式(26)代入式(25)得:

$$P(f) \approx \frac{1}{2} G^{2D-2} f^{-(4-2D)} \frac{dn(f)}{df} = \frac{1}{2 \ln \gamma} G^{2D-2} f^{-(5-2D)} \quad (27)$$

需要注意,式(27)和文献[15]的式(6)、文献[22]的式(2)、文献[23]的式(2a)、文献[24]的式(10)均相异。

按照定积分的换元法得:

$$\int_0^{+\infty} t^{\beta-1} e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{z^{\beta-1}}{x^\beta} e^{-z} dz = x^{-\beta} \Gamma(\beta) \quad (28)$$

式中: $x > 0; \beta > 0; z = xt$ 为定积分新变量; $\Gamma(\beta)$ 为 gamma 函数。

由式(28)得:

$$x^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{+\infty} t^{\beta-1} e^{-xt} dt \quad (29)$$

随便查高等数学不定积分表得:

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos x dx = \left[\frac{1}{t^2 + 1} e^{-tx} (\sin x - t \cos x) \right]_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{t}{1 + t^2} \quad (30)$$

利用变量代换,下述定积分为:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^g}{(d + et^h)^i} dt = \frac{1}{hd^i} \left(\frac{d}{e} \right)^{\frac{1+g}{h}} \int_0^1 x^{\frac{1+g}{h}-1} (1-x)^{i-\frac{1+g}{h}-1} dx = \frac{1}{hd^i} \left(\frac{d}{e} \right)^{\frac{1+g}{h}} B\left(\frac{1+g}{h}, i - \frac{1+g}{h}\right) \quad (31)$$

式中: $d > 0; e > 0; h > 0; x = \frac{et^h}{d + et^h}$ 为定积分新

变量; $B(j, k) = \frac{\Gamma(j)\Gamma(k)}{\Gamma(j+k)} = \int_0^1 x^{j-1} (1-x)^{k-1} dx$ 为 beta 函数^[25]。

令 $d = e = i = 1, h = 2$, 由式(31)得:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^g}{1 + t^2} dt = \frac{1}{2} B(0.5 + 0.5g, 0.5 - 0.5g) \quad (32)$$

用 $\beta - 2$ 代换式(32)中的 g 且使用余元公式得:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\beta-2}}{1 + t^2} dt = \frac{1}{2} B(0.5\beta - 0.5, 1.5 - 0.5\beta) =$$

$$\frac{1}{2} \frac{\Gamma(0.5\beta - 0.5)\Gamma(1.5 - 0.5\beta)}{\Gamma(0.5\beta - 0.5 + 1.5 - 0.5\beta)} = \frac{\pi}{2 \sin[\pi(0.5\beta - 0.5)]} \quad (33)$$

使用式(29)可将下列单重定积分化为二重定积分:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (1 - \cos x) x^{-(5-2D)} dx &= \int_0^{+\infty} (1 - \cos x) x^{-\beta} dx = \\ \int_0^{+\infty} (1 - \cos x) \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{+\infty} t^{\beta-1} e^{-xt} dt dx &= \\ \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{+\infty} t^{\beta-1} \left(\int_0^{+\infty} e^{-tx} dx - \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos x dx \right) dt &\quad (34) \end{aligned}$$

式中: $\beta = 5 - 2D \in (1, 3)$ 。

由式(28)可得 $t > 0$, 将式(30)代入式(34)得:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (1 - \cos x) x^{-(5-2D)} dx &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{+\infty} t^{\beta-1} \left(\frac{1}{t} - \right. \\ &\left. \frac{t}{1 + t^2} \right) dt = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\beta-2}}{1 + t^2} dt \quad (35) \end{aligned}$$

将式(33)代入式(35)得:

$$\int_0^{+\infty} (1 - \cos x) x^{-(5-2D)} dx = \frac{\pi}{2\Gamma(\beta) \sin[\pi(0.5\beta - 0.5)]} \quad (36)$$

将式(34)中的注释 $\beta = 5 - 2D$ 代入式(36)得:

$$\int_0^{+\infty} (1 - \cos x) x^{-(5-2D)} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4 \times 0^+}, D \rightarrow 1^+ \\ \frac{\pi}{2\Gamma(5 - 2D) \cos[(D - 1.5)\pi]}, D \neq 1.5 \\ \frac{\pi}{2}, D = 1.5 \\ \frac{\pi}{2 \times 0^+}, D \rightarrow 2^- \end{cases} \quad (37)$$

重点说明,式(37)亦皆相异于文献[23]的式(14)、文献[26]第215页的式(2)。

由 Γ 函数的递推公式及余元公式,式(37)可变形为:

$$\int_0^{+\infty} (1 - \cos x) x^{-(5-2D)} dx = \begin{cases} \frac{\Gamma(0^+)}{2}, D \rightarrow 1^+ \\ \frac{\Gamma(2D - 2) \sin[(D - 1.5)\pi]}{(4 - 2D)(2D - 3)}, D \neq 1.5 \\ \frac{\pi}{2}, D = 1.5 \\ \frac{1}{0^+}, D \rightarrow 2^- \end{cases} \quad (38)$$

式(1)派生出函数 $z(x_1)$ 及 $z(x_2)$ 之间的结构函数为:

$$\begin{aligned} \langle [z(x_1) - z(x_2)]^2 \rangle &= \\ \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - e^{j(x_1-x_2)f}] P(f) df &\quad (39) \end{aligned}$$

式中: $\langle \rangle$ 为无阻尼自然频率平均符号。

特别强调的是,式(39)亦全不同于文献[15]的式(8)、文献[27]的式(11)、文献[28]的式(2.3)。

根据式(27)可得双边连续功率谱密度函数为:

$$P(f) = \frac{1}{2 \ln y} G^{2D-2} |f|^{-(5-2D)}, -\infty < f < +\infty \quad (40)$$

奇函数 $\sin(x_1 - x_2)f$ 在对称区间 $(-\infty, +\infty)$ 上对 f 的定积分是零,根据 Euler 公式,将式(40)代入式(39)得:

$$\begin{aligned} \langle [z(x_1) - z(x_2)]^2 \rangle &= \\ \frac{1}{2 \ln y} G^{2D-2} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos |x_1 - x_2| |f|) |f|^{-(5-2D)} df &= \\ \int_0^{+\infty} (1 - \cos x) x^{-(5-2D)} dx G^{2D-2} |x_1 - x_2|^{4-2D} &\quad (41) \end{aligned}$$

式中: $x = |x_1 - x_2|$ 为定积分新变量。

将式(38)代入式(41)得:

$$\langle [z(x_1) - z(x_2)]^2 \rangle =$$

$$\begin{cases} \frac{\Gamma(0^+)}{2\ln\gamma} |x_1 - x_2|^2, D \rightarrow 1^+ \\ \frac{\Gamma(2D-2)\sin[(D-1.5)\pi]}{(4-2D)(2D-3)\ln\gamma} G^{2D-2} |x_1 - x_2|^{4-2D}, \\ D \neq 1.5 \\ \frac{\pi}{2\ln\gamma} G |x_1 - x_2|, D = 1.5 \\ \frac{1}{0^+ \ln\gamma} G^2, D \rightarrow 2^- \end{cases} \quad (42)$$

令 $x_1 = x, x_2 = x - \tau$ (τ 为尺度滞后), 可得整体柔性结合面的结构函数为:

$$S(\tau) = \langle [z(x) - z(x - \tau)]^2 \rangle =$$

$$\begin{cases} \frac{\Gamma(0^+)}{2\ln\gamma} \tau^2 = +\infty, D \rightarrow 1^+ \\ \frac{\Gamma(2D-2)\sin[(D-1.5)\pi]}{(4-2D)(2D-3)\ln\gamma} G^{2D-2} \tau^{4-2D}, \\ D \neq 1.5 \\ \frac{\pi}{2\ln\gamma} G \tau, D = 1.5 \\ \frac{1}{0^+ \ln\gamma} G^2 = +\infty, D \rightarrow 2^- \end{cases} \quad (43)$$

当量表面高度式(1)和两个粗糙表面 1、2 高度之间的关系为:

$$z(x) = z_1(x) - z_2(x) \quad (44)$$

式中: $z_j(x)$ 为粗糙表面 j 的高度, $j = 1, 2$ 。

参考式(39)中“ $\langle \rangle$ ”符号的运算规则, 将式(44)代入式(43)得:

$$\begin{aligned} S(\tau) &= \langle [z_1(x) - z_2(x) - z_1(x - \tau) + z_2(x - \tau)]^2 \rangle = \\ &\langle [z_1(x) - z_1(x - \tau)]^2 \rangle - \\ &2\langle [z_1(x) - z_1(x - \tau)][z_2(x) - z_2(x - \tau)] \rangle + \\ &\langle [z_2(x) - z_2(x - \tau)]^2 \rangle \end{aligned} \quad (45)$$

由于两粗糙表面在传统统计学上互不相关, 则下列交叉乘积项为零:

$$\langle [z_1(x) - z_1(x - \tau)] \times [z_2(x) - z_2(x - \tau)] \rangle = 0 \quad (46)$$

仿照式(43), 因此式(45)可变形为:

$$S(\tau) = S_1(\tau) + S_2(\tau) \quad (47)$$

式中: $S_j(\tau)$ 为粗糙表面 j 的结构函数, $j = 1, 2$ 。

令 $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$, 不失去普遍性, 将式(47)展开得:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(2D-2)\sin[(D-1.5)\pi]}{(2-D)(D-1.5)} G^{2D-2} \tau^{4-2D} = \\ \frac{\Gamma(2D_1-2)\sin[(D_1-1.5)\pi]}{(2-D_1)(D_1-1.5)} G_1^{2D_1-2} \tau^{4-2D_1} + \end{aligned}$$

$$\frac{\Gamma(2D_2-2)\sin[(D_2-1.5)\pi]}{(2-D_2)(D_2-1.5)} G_2^{2D_2-2} \tau^{4-2D_2} \quad (48)$$

式中: γ 为整体柔性结合面非整数相位随机参数; γ_j 为表面 j 的相位随机参数, $j = 1, 2$; D 为整体柔性结合面的分形维数; D_j 为表面 j 的分形维数, $j = 1, 2$; G 为整体柔性结合面的分形粗糙度; G_j 为表面 j 的分形粗糙度, $j = 1, 2$ 。

文中大量涉及 gamma 函数, 文献[29]仅提供 gamma 函数在闭区间 $1 \leq x \leq 2$ 的以下近似解:

$$\begin{aligned} \Gamma(x) \approx 1 - 0.5748646(x-1) + 0.9512363(x-1)^2 - \\ 0.6998588(x-1)^3 + 0.4245549(x-1)^4 - \\ 0.1010678(x-1)^5, 1 \leq x \leq 2 \end{aligned} \quad (49)$$

但式(49)不能解决 $0 < x < 1$ 和 $x > 2$ 更广大开区间对应的 gamma 函数 $\Gamma(x)$ 具体值。为彻底得到 gamma 函数在 $0 < x < +\infty$ 所有开区间的精准值, 可在 Matlab® R2009b 软件语言 Command Window 窗口的命令行输入两行代码:

```
x=0.01:0.1:2.004;% 2.004 可取适当较大值
plot(x, gamma(x))
```

文献[29]近似解与文中解的比较见图 2, 可见采用文中解可获取 gamma 函数。

若 $G_1 = 3.6 \times 10^{-10} \text{ m}$, $G_2 = 2.4 \times 10^{-10} \text{ m}$, $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = 1.5$ 时, 粗糙表面 1、2 与整体柔性结合面的结构函数见图 3。

2.1 两粗糙表面分形维数相等

此刻式(48)可简化为:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(2D-2)\sin[(D-1.5)\pi]}{(2-D)(D-1.5)} G^{2D-2} \tau^{4-2D} = \\ \frac{\Gamma(2D_1-2)\sin[(D_1-1.5)\pi]}{(2-D_1)(D_1-1.5)} (G_1^{2D_1-2} + \\ G_2^{2D_1-2}) \tau^{4-2D_1} \end{aligned} \quad (50)$$

为使关于自变量尺度滞后 τ 的恒等式(50)成立, 可得要辨识整体柔性结合面的分形维数、分形粗糙度为:

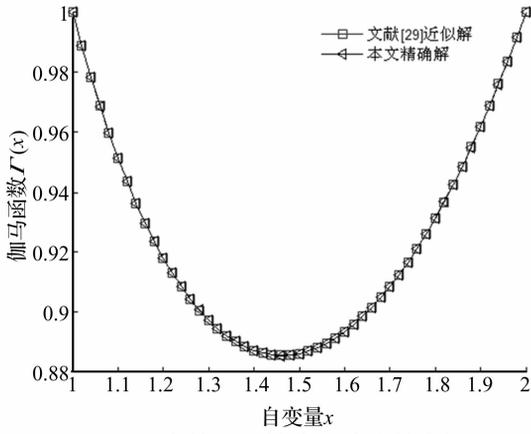
$$D = D_1 = D_2 \quad (51)$$

$$G = (G_1^{2D_1-2} + G_2^{2D_1-2})^{\frac{1}{2D_1-2}} \quad (52)$$

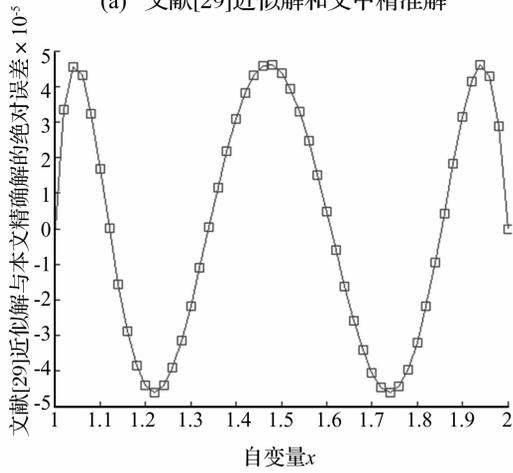
图 3(a) 结果说明, 在双对数坐标系下, 整体柔性结合面的结构函数 $S(\tau)$ 和 τ 是线性关系, 且和 $S_1(\tau)$ 、 $S_2(\tau)$ 均平行, 整体柔性结合面在 $S(\tau)$ 轴上的纵截距都分别大于粗糙表面 1 在 $S_1(\tau)$ 轴上的纵截距、粗糙表面 2 在 $S_2(\tau)$ 轴上的纵截距, 整体柔性结合面具有单重分形特性, 整体柔性结合面的分形维数 D 和两粗糙表面的分形维数 D_1 、 D_2 相等(式(51)), 整体柔性结合面的分形粗糙度 G 更大, 即整体柔性结合面比互相接触两个粗糙表面更粗糙(式(52))。

2.2 两粗糙表面分形维数不相等

图 3(b) 显示, 在双对数坐标系下, 整体柔性结合



(a) 文献[29]近似解和文中精准解



(b) 文献[29]近似解和文中精准解之间的绝对误差

图 2 文献[29]解和文中解的比较

Fig. 2 Comparison between reference [29] expression and the present paper's one

面的结构函数 $S(\tau)$ 和 τ 不再为线性关系,而表现为 1 条向上凹的曲线弧,且两粗糙表面的分形维数 D_1 与 D_2 偏离越悬殊,此曲线弧的弯曲程度越明显,曲线弧的第一段主要表示粗糙表面 2 的 $S_2(\tau)$ 的分形性质,第二段主要表示粗糙表面 1 的 $S_1(\tau)$ 的分形性质,说明整体柔性结合面具有双重分形性质,继而增加了求解非线性方程式(48)的难度。

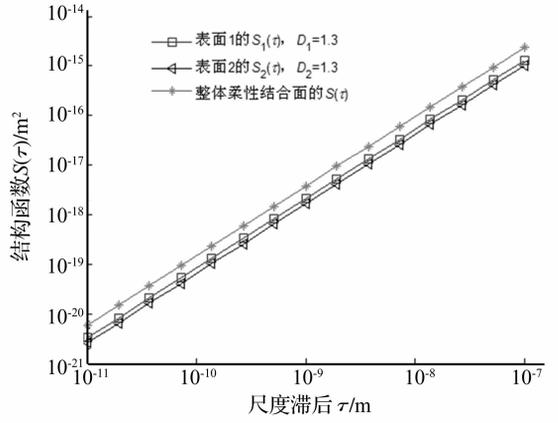
严格站在高等数学的立场上,无条件能使关于自变量 τ 的方程式(48)恒成立。为求解此方程,首先按照两粗糙表面 1、2 的结构函数与式(47),得到整体柔性结合面的结构函数,该结构函数在双对数坐标系下虽不是 1 条直线,但利用最小二乘法可近似回归其为 1 条直线,然后可辨识整体柔性结合面的分形维数 D 、分形粗糙度 G 。

不失去普适性,根据式(43)可得一条直线方程:

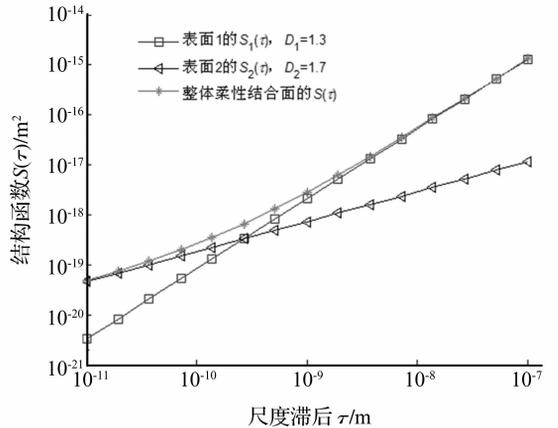
$$\lg S(\tau) = 2(2 - D)\lg\tau + 2(D - 1)\lg G + \lg \frac{\Gamma(2D - 2)}{2(2 - D)\ln\gamma} + \lg \frac{\sin[(D - 1.5)\pi]}{2(D - 1.5)} \quad (53)$$

假定:

$$k = 2(2 - D) \quad (54)$$



(a) 两粗糙表面分形维数相等时的结构函数



(b) 两粗糙表面分形维数不相等时的结构函数

图 3 三种结构函数

Fig. 3 Three types of structure functions

$$g = -\lg G \quad (55)$$

将式(54)、(55)代入式(53)得:

$$\lg S(\tau) = k\lg\tau + 2(1 - D)g + \lg \frac{\Gamma(2D - 2)}{2(2 - D)\ln\gamma} + \lg \frac{\sin[(D - 1.5)\pi]}{2(D - 1.5)} \quad (56)$$

再假定:

$$b = 2(1 - D)g + \lg \frac{\Gamma(2D - 2)}{2(2 - D)\ln\gamma} + \lg \frac{\sin[(D - 1.5)\pi]}{2(D - 1.5)} \quad (57)$$

将式(57)代入式(56)得:

$$\lg S(\tau) = k\lg\tau + b \quad (58)$$

直线方程式(58)见图 4。

由式(54), $D = 2 - 0.5k$ 依赖 k 。由式(57), g 依赖 b, D , 因 D 依赖 k , 故 g 依赖 b, k 。由式(55), $G = 10^{-g}$ 依赖 g , 故 G 依赖 b, k 。

3 静摩擦系数理论解的实验佐证

3.1 实验方案

电动机在时间 t 秒钟内提供的额定功为:

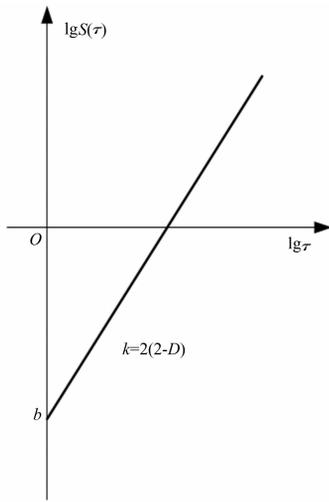


图4 整体柔性结合面的常用对数结构函数
Fig. 4 Logarithm structure function of whole flexible joint surface

$$W = T_N \times 2\pi \times \frac{n_1}{60} \times t = \frac{\pi}{30} T_N n_1 t \quad (59)$$

式中： T_N 为电动机额定转矩， $N \cdot m$ ； n_1 为电动机实际转速， r/min 。

电动机在时间 t 秒钟内提供的平均额定功率为：

$$P_N = \frac{W}{t} = \frac{\pi}{30} T_N n_1 \quad (60)$$

执行装置旋转工作台消耗的功率为：

$$P_2 = \frac{\pi}{30} T_2 n_2 = \frac{\pi}{30} F \frac{r}{1\ 000} n_2 = \frac{\pi}{30\ 000} f P r n_2 \quad (61)$$

式中： T_2 为旋转工作台转矩， $N \cdot m$ ； n_2 为旋转工作台转速， r/min ； F 为两静压导轨表面间最大静摩擦力^[1]， N ； r 为最大静摩擦力作用的当量半径， mm ； f 为两静压导轨表面间的静摩擦系数； P 为加载重物的重量，即法向总载荷^[1]， N 。

电动机的额定功率是相应于额定环境温度 $40\ ^\circ C$ 时的允许输出功率，故当环境温度高于或低于 $40\ ^\circ C$ 时，电动机允许输出的功率可适当减小或增加。根据式(60)，增减后的允许输出功率为：

$$P_1 = \sqrt{1 + (1 + \alpha) \frac{40 - \theta}{\theta_N}} P_N = \xi P_N = \frac{\pi}{30} \xi T_N n_1 \quad (62)$$

式中： α 为满载时的不变损耗(包括铁损耗、机械损耗与附加损耗)和可变损耗(铜损耗)的比值； θ 为实际环境温度； θ_N 为额定温升； ξ 为电动机负载率。

在电动机低转速情况下，使旋转工作台刚刚开始运动，得到静摩擦系数。工作台旋转消耗的功率等于驱动电机的输出功率，根据传递过程中的机械损失，可以得到功率平衡关系：

$$P_2 = \eta P_1 \quad (63)$$

将式(61)、(62)代入式(63)得：

$$f = \frac{1\ 000 \xi \eta T_N n_1}{P r n_2} \quad (64)$$

式中： η 为普通圆柱蜗杆传动的总效率，且：

$$\eta = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \quad (65)$$

式中： η_1 为啮合摩擦损耗效率； η_2 为轴承摩擦损耗效率； η_3 为溅油损耗效率，且：

$$\eta_1 = \frac{\tan \gamma}{\tan(\gamma + \varphi_v)} \quad (66)$$

式中： γ 为普通圆柱蜗杆分度圆柱上的导程角； φ_v 为当量摩擦角。

按照式(64)，如果获得电动机在线运行时的 n_1 、 ξ ，则能得到不同法向总载荷 P 时的静摩擦系数。结合面接触模型是描述两粗糙表面相接触表面微凸体的接触特性，本文的理论部分^[1]并没有分析液体与粗糙表面接触的接触特性。实验是液体静压导轨接触表面，两静压导轨通过油膜(通常油膜厚度为 $5、7、9、14\ \mu m$ 等)而相互分开，静压导轨的两金属表面在微观状态下是不直接接触的，是液体与金属粗糙表面接触(否则就不是静压导轨)，若考虑液体、油膜等非直接接触特性而求解的摩擦系数是微观摩擦系数。为使实验与两金属粗糙表面相接触的理论较好地吻合，获得能应用于实际工程的整个结合面的宏观摩擦系数，一方面，在实验前，先将两个静压导轨1、静压导轨2从机床部件中相互分离，然后将两个静压导轨1、静压导轨2的结合表面在丙酮中通过超声波清洗 $50\ min$ ，最后在去离子水中冲洗后，用流动的氮气吹干，即让两个静压导轨成为两干接触表面，也即两个静压导轨在短时间内处于非正常工作状态，使用环境愈加恶劣；另一方面，在实验的过程中在满足工况的前提下，装配两个静压导轨1、静压导轨2时，尽可能使油膜厚度小，如取 $1\ m$ ，使静压导轨的两金属表面逼近接触。如上所述，实验方案见图5， h 为公称油膜厚度。

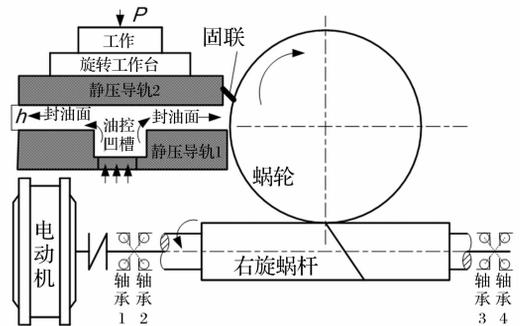


图5 实验方案

Fig. 5 Experimental scenario

3.2 实验过程

在武汉重型机床集团有限公司 YK31320 型普通滚齿机上进行实验，见图6。实验时的面板数据见图7。

3.3 分形参数实验辨识与静摩擦系数的求解

研磨方式加工两液体静压导轨接触表面。采用英国 Micro Materials Ltd 制造的 NanoTest[®] 600 型纳米压

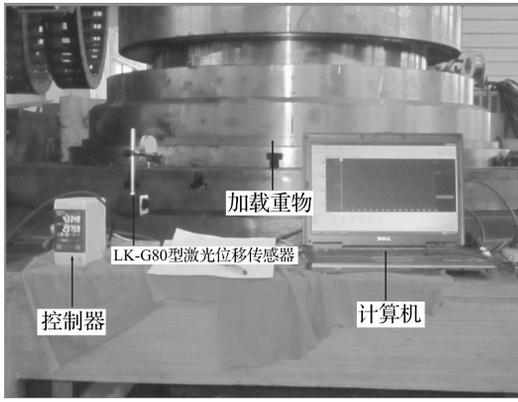


图 6 YK31320 型普通滚齿机

Fig. 6 YK31320 common gear-hobbing machine

痕仪测定粗糙表面薄膜的硬度 H , 为了减少基体对薄膜硬度测量的影响, 选择压入深度为 100 nm , 每个样品取 5 个点进行测量, 取平均值。液体静压导轨的参数见表 1。

表 1 两液体静压导轨表面的参数

Tab.1 Parameters of two hydrostatic guideway surfaces

参数	数值	
	35#钢表面 1	45#钢表面 2
E/GPa	197	205
μ	0.31	0.3
$\rho/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	7 826	7 833
$\sigma/\mu\text{m}$	0.132	0.125
σ_y/MPa	346	353
H/MPa	478	500
γ	1.5	1.5

使用英国公司 Charlotte Research Institute 的 Taylor-Hobson Form TalySurf 5-120 型表面轮廓仪, 放大倍率为 $\times 1\ 000$, 采样长度为 15 mm , 采样间距为 $1\ \mu\text{m}$, 采样段数为 5, 最小二乘滤波, 离散化采样点数为 $15\ 000$ 。测试环境温度为 $23.5\text{ }^\circ\text{C}$, 空气相对湿度为 58% 。

设采样长度 $T = 15\text{ mm}$; 无阻尼自然频率间隔为 $\Delta f = 1/T$; 采样表面轮廓高度的离散数据点数为 l , 取 $l = 15\ 000$; 采样间隔为 Δx , 取 $\Delta x = 1\ \mu\text{m}$; 空间采样点数为 $N_s = T/\Delta x = 15\ 000$, 将数据补齐为大于 l 且为 2 的整数幂次方的数, 选择 $N_s = 2^{14} > l$; 采样频率为 $f_s = 1/\Delta x$; 最高频率为 f_{max} , 取 $f_{\text{max}} = 0.5f_s$; 设定无阻尼自然频率变化范围为 $f = f_{\text{max}}(0:0.5N_s - 1)/N_s$; 对表面轮廓信号表达式(1)的 $z(x)$ 进行补零的 Fourier 变换, 把 $z(x)$ 的尾部补零使 $z(x)$ 的长度达到 N_s , 可得补零的 Fourier 变换 $Y = \text{fft}(z, N_s)$; 按照 Y 获得功率谱密度函数 $P(f) = |Y|^2/N_s$, 根据式(39)得到柔性结合面的结构函数 $S(\tau)$, 然后使用最小二乘法的一次多项式拟合实测数据 ($\lg\tau, \lg S(\tau)$), 可获取常用对数结构函数(图 4)。

表 2 整体柔性结合面研磨时的编程情况

Tab.2 Compiling conditions of grinding ensemble flexible joint surface

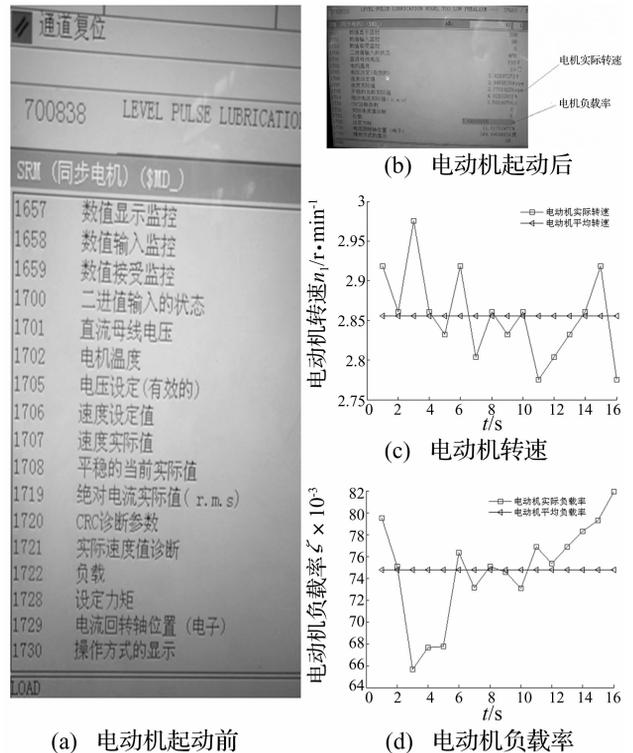
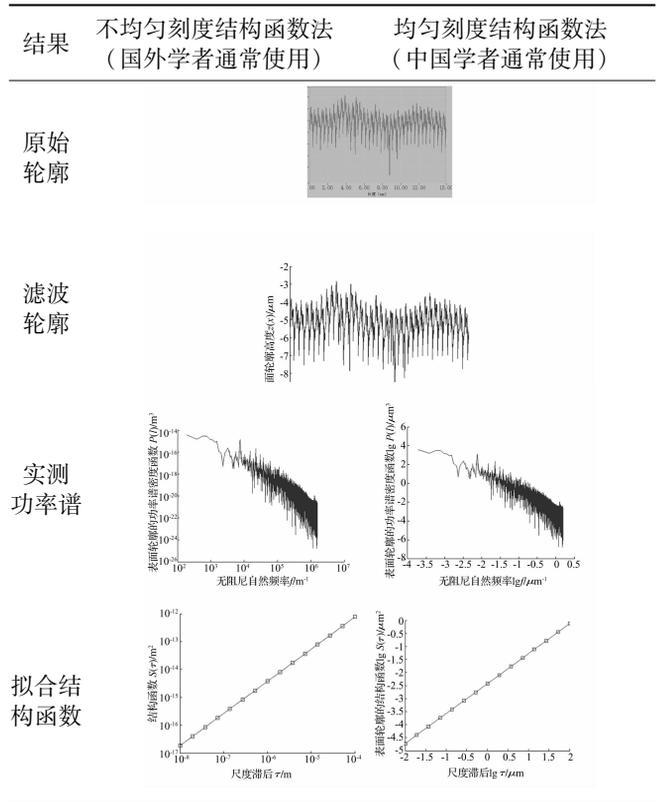


图 7 实验面板数据

Fig. 7 Experimental panel data

整体柔性结合面研磨时的情形见表 2, 不均匀刻度结构函数方法应用的是国际单位, 使用的符号是斜率 k_1 、纵截距 b_1 、分形粗糙度的指数 g_1 、分形维数 D_1 、分形

粗糙度 G_1 , 国外研究人员习惯使用; 均匀刻度结构函数方法以长度单位微米为出发点, 应用的符号是斜率 k_2 、纵截距 b_2 、分形粗糙度的指数 g_2 、分形维数 D_2 、分形粗糙度 G_2 , 中国研究人员习惯使用。这二种方法辨识的五个参数分别为 $k_1 = 0.993\ 4$, $b_1 = -8.165\ 2$, $D_1 = 1.503\ 3$, $g_1 = 8.697\ 5$, $G_1 = 2.006\ 6 \times 10^{-9}\ \text{m}$; $k_2 = 0.993\ 4$, $b_2 = -2.125\ 8$, $D_2 = 1.503\ 3$, $g_2 = 2.697\ 5$, $G_2 = 2.006\ 6 \times 10^{-9}\ \text{m}$ 。则整体柔性结合面的两个重要表征参数为 $D = 1.503\ 3$, $G = 2.006\ 6 \times 10^{-9}\ \text{m}$ 。

将辨识的整体柔性结合面参数 D 、 G 代入式(1), 可得二维表面轮廓高度的仿真线, 二维表面轮廓高度的实测线、仿真线见图 8(a)。二维表面轮廓高度的模拟函数式(1)可由下面三维表面轮廓高度的 Ausloos - Berman 函数简化而得:

$$z(x, y) = L \left(\frac{G}{L} \right)^{D-1} \sqrt{\frac{\ln y}{M}} \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^{n_{\max}} \gamma^{(D-2)n} \left\{ \cos \phi_{m,n} - \right.$$

$$\left. \cos \left[\frac{2\pi\gamma^n \sqrt{x^2 + y^2}}{L} \cos \left(\arctan \frac{y}{x} - \frac{\pi m}{M} \right) + \phi_{m,n} \right] \right\} \quad (67)$$

式中: x, y 为粗糙表面轮廓的位移坐标; L 为取样长度; M 为曲面褶皱的重叠数; γ 为大于 1 的常数, 通常取 $\gamma = 1.5$; n 为无阻尼自然频率序数; n_{\max} 为最高频率序数, $n_{\max} = \text{int}[\ln(L/L_s)/\ln\gamma]$, L_s 为截止长度, 通常近似为材料的原子间距离; $\phi_{m,n}$ 为随机相位, 取值范围为 $[0, 2\pi]$ 。

将辨识的整体柔性结合面参数 D 、 G 代入式(67), 可得三维表面轮廓高度的仿真线, 三维表面轮廓高度的实测线见图 8(b)、仿真线见图 8(c)、两者之间的相对误差见图 8(d)。根据图 8(d), 仿真线和实测线之间的相对误差较小, 说明辨识的整体柔性结合面参数实用有效。

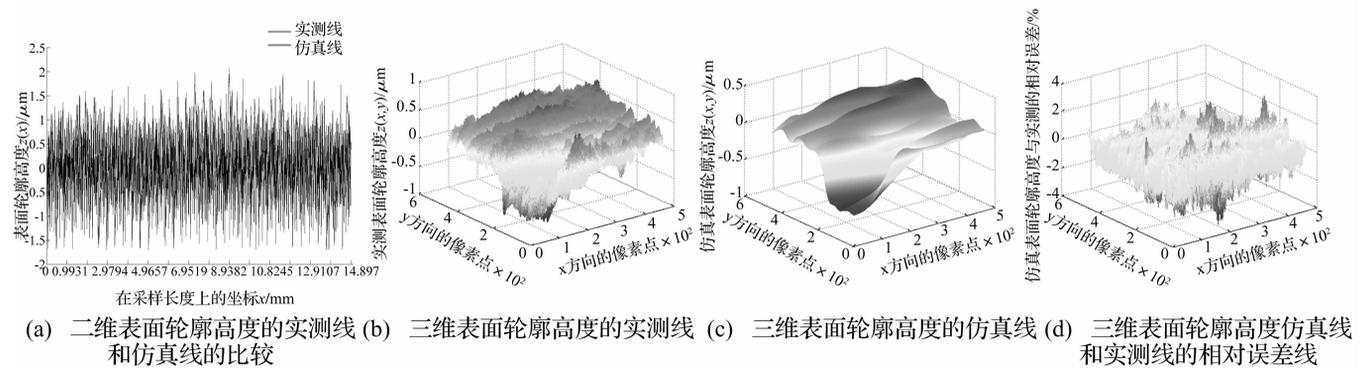


图 8 表面轮廓高度的实测线和仿真线的比较

Fig. 8 Comparison between surface profile height's measuring line and its simulating line

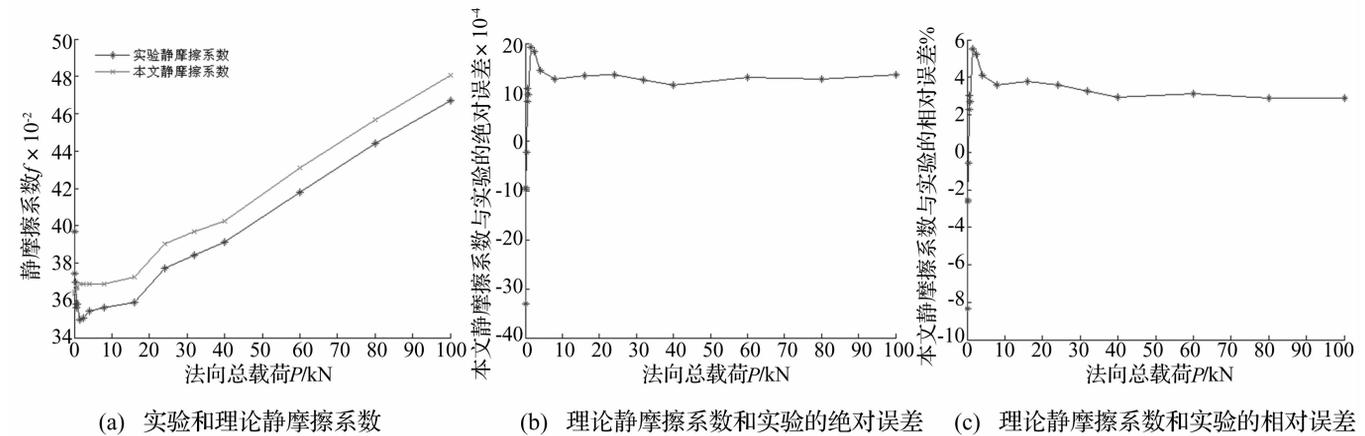


图 9 理论静摩擦系数和实验的比较

Fig. 9 Comparison between theoretical static friction coefficients and experimental ones

例如在加载重物的重量 $P = 100\ \text{kN}$ 时, 将表 1 中的数据与 $D = 1.503\ 3$, $G = 2.006\ 6 \times 10^{-9}\ \text{m}$ 代入式(12)、(64), 分别可得整体柔性结合面的理论静摩擦系

数为 $f = 0.480\ 51$, 实验静摩擦系数为 $f = 0.466\ 93$ 。

3.4 理论静摩擦系数和实验的误差

在加载不同质量的重物情况下, 理论静摩擦系数

和实验的比较见图9。观察图9(a),在狭窄的小载荷 $0 \sim 1.6$ kN范围内,即电动机在低转速工况下,实验静摩擦系数随法向总载荷的增大而变小(由于使旋转工作台开始旋转,施加在旋转工作台上的切向总载荷愈来愈大),且实验静摩擦系数会呈现忽高忽低的突变波动情况(由于电动机的低转速迫使机床静压导轨的动态性能处于不稳定的爬行,强烈影响静压导轨的表面粗糙度,引起摩擦副的剧烈磨损);在宽广的中等载荷 $1.6 \sim 100$ kN范围内,即电动机在近似稳定中等转速工况下,实验静摩擦系数随法向总载荷的增大而增大,且理论静摩擦系数比实验大(由于实际两静压导轨表面之间存在最小公称油膜厚度的流体膜,常使一个静压导轨处于似浮非浮状态)。根据图9(b),理论静摩擦系数和实验的绝对误差在 $-0.033\ 02 \sim 0.019\ 26$ 之间。根据图9(c),理论静摩擦系数和实验的相对误差在 $-8.323\% \sim 5.512\%$ 之间。值得提醒:由于实际静摩擦系数的变化范围狭窄,所以给出绝对误差比提供相对误差更有说服力。

4 结 论

(1) 给出关于粗糙表面微凸体接触点面积 a 的概率分布密度 $n(a)$ 的推导过程。该概率分布密度适用于机械加工粗糙表面,不管磨削、铣削、车削表面都满足此概率分布密度的关系式。

(2) 给出计算整体柔性结合面两个分形参数的结构函数方法。该结构函数方法可以从测量的实际数据入手,能求解特定整体柔性结合面分形维数、分形粗糙度的具体数字。本文严格区分无阻尼自然频率 f 和无阻尼自然角频率 ω , $\omega = 2\pi f$,本文求解的是以 f 为自变量的功率谱密度函数和结构函数。文献[30]将 f 和 ω 都当作 ω ,不合理。对于以 ω 为自变量的功率谱密度函数和结构函数的修正计算是后续重点研究的内容。

(3) 对文献[1]的理论计算和分析进行实验佐证。在一定加载重物的范围内,理论静摩擦系数和实验的绝对误差在 $-0.033\ 02 \sim 0.019\ 26$ 之间,理论静摩擦系数和实验的相对误差在 $-8.323\% \sim 5.512\%$ 之间。

参 考 文 献

[1] 田红亮,赵春华,方子帆,等.金属材料表面静摩擦学特性的预测研究——理论模型[J].振动与冲击,2013,32(12):40-44,66.
TIAN Hong-liang, ZHAO Chun-hua, FANG Zi-fan, et al. Predication investigation on static tribological performance of metallic material surfaces- theoretical model [J]. Journal of Vibration and Shock, 2013, 32(12): 40-44, 66.

[2] 赵 飞,逢显娟,杜三明,等. MoS_x掺杂 DLC 薄膜的摩擦磨损行为 I: 载荷的影响[J]. 摩擦学学报, 2012, 32(5): 516-523.
ZHAO Fei, PANG Xian-juan, DU San-ming, et al. Friction

and wear behaviors of MoS_x-doped DLC films I: effect of normal load [J]. Tribology, 2012, 32(5): 516-523.

[3] 赵 飞,逢显娟,杜三明,等. MoS_x掺杂 DLC 薄膜的摩擦磨损行为 II: 速度的影响[J]. 摩擦学学报, 2012, 32(5): 524-530.
ZHAO Fei, PANG Xian-juan, DU San-ming, et al. Friction and wear behaviors of MoS_x-doped DLC films II: effect of sliding speed [J]. Tribology, 2012, 32(5): 524-530.

[4] Chang W R, Etsion I, Bogy D B. Static friction coefficient model for metallic rough surfaces [J]. Transactions of the ASME Journal of Tribology, 1988, 110(1): 57-63.

[5] Greenwood J A, Williamson J B P. Contact of nominally flat surfaces [J]. Proceedings of the Royal Society of London: Series A Mathematical and Physical Sciences, 1966, 295(1442): 300-319.

[6] You J M, Chen T N. A static friction model for the contact of fractal surfaces [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology, 2010, 224(5): 513-518.

[7] 尤晋闽,陈天宁. 结合面静摩擦系数的统计模型[J]. 振动与冲击, 2010, 29(12): 26-29.
YOU Jin-min, CHEN Tian-ning. Statistical model of static friction coefficient between joint surfaces [J]. Journal of Vibration and Shock, 2010, 29(12): 26-29.

[8] 吕振林,刘晶歌,肖琪琳,等. Ti₃AlC₂陶瓷的制备及其摩擦磨损性能[J]. 硅酸盐学报, 2012, 40(4): 503-506.
LÜ Zhen-lin, LIU Jing-ge, XIAO Qi-dan, et al. Fabrication of Ti₃AlC₂ by reactive sintering and its friction and wear behavior [J]. Journal of the Chinese Ceramic Society, 2012, 40(4): 503-506.

[9] 盛选禹,雒建斌,温诗铸. 基于分形接触的静摩擦系数预测[J]. 中国机械工程, 1998, 9(7): 16-18.
SHENG Xuan-yu, LUO Jian-bin, WEN Shi-zhu. Static friction coefficient model based on fractal contact [J]. China Mechanical Engineering, 1998, 9(7): 16-18.

[10] Majumdar A, Bhushan B. Fractal model of elastic-plastic contact between rough surfaces [J]. Transactions of the ASME Journal of Tribology, 1991, 113(1): 1-11.

[11] Sui C F, Sheng X Y. Fractal transition model in predicting static friction coefficient [J]. Multidiscipline Modeling in Materials and Structures, 2009, 5(4): 345-348.

[12] 田红亮,赵春华,朱大林,等. 弹塑性三维各向异性分形表面的接触分析[J]. 三峡大学学报(自然科学版), 2012, 34(1): 69-73.
TIAN Hong-liang, ZHAO Chun-hua, ZHU Da-lin, et al. Contact analysis of elastoplastic three-dimensional anisotropic fractal surfaces [J]. Journal of China Three Gorges University (Natural Sciences), 2012, 34(1): 69-73.

[13] 田红亮,朱大林,秦红玲. 固定接触界面法向静弹性刚度的改进弹簧分形模型[J]. 三峡大学学报(自然科学版), 2012, 34(6): 83-88.
TIAN Hong-liang, ZHU Da-lin, QIN Hong-ling. Improved spring fractal model for normal static elastic stiffness of stationary contact interface [J]. Journal of China Three Gorges University (Natural Sciences), 2012, 34(6): 83-88.

- [14] 魏 龙,刘其和,张鹏高. 基于分形理论的滑动摩擦表面接触力学模型[J]. 机械工程学报,2012,48(17):106-113.
WEI Long, LIU Qi-he, ZHANG Peng-gao. Sliding friction surface contact mechanics model based on fractal theory [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48 (17): 106 - 113.
- [15] 贺 林,朱 均. 粗糙表面接触分形模型的提出与发展[J]. 摩擦学学报,1996,16(4):375-384.
HE Lin, ZHU Jun. Fractal model for contact of rough surfaces [J]. Tribology,1996,16(4):375-384.
- [16] Peitgen H O. Benoît B. Mandelbrot (1924—2010) [J]. Science,2010,330:926.
- [17] Gomory R. Benoît Mandelbrot (1924—2010). mathematician, and father of fractal geometry, who described the roughness of nature [J]. Nature,2010,468:378.
- [18] 田红亮,刘芙蓉,朱大林. 4种NET欧拉-伯努利直梁的动力学特性[J]. 三峡大学学报(自然科学版),2013,35(4):85-93.
TIAN Hong-liang, LIU Fu-rong, ZHU Da-lin. Dynamic properties of four NET Euler-Bernoulli straight beam [J]. Journal of China Three Gorges University (Natural Sciences),2013,35(4):85-93.
- [19] 李彦青,殷德顺,吴 浩. 变分数阶微积分在描述材料力学性质演变方面的应用[J]. 三峡大学学报(自然科学版),2012,34(6):63-67,76.
LI Yan-qing, YIN De-shun, WU Hao. Application of variable-order fractional calculus to description of evolution of mechanical properties of materials [J]. Journal of China Three Gorges University (Natural Sciences),2012,34(6):63-67,76.
- [20] 卢文祥,杜润生. 机械工程测试·信息·信号分析[M]. 2版. 武昌:华中科技大学出版社,2004.
- [21] Berry M V, Lewis Z V. On the Weierstrass-Mandelbrot fractal function [J]. Proceedings of the Royal Society of London: Series A Mathematical and Physical Sciences, 1980, 370(1743):459-484.
- [22] Bhushan B, Majumdar A. Elastic-plastic contact model for bifractal surfaces [J]. Wear,1992,153(1):53-64.
- [23] Ganti S, Bhushan B. Generalized fractal analysis and its applications to engineering surfaces [J]. Wear,1995,180(1-2):17-34.
- [24] Majumdar A, Tien C L. Fractal network model for contact conductance [J]. Transactions of the ASME Journal of Heat Transfer,1991,113(3):516-525.
- [25] 《数学手册》编写组. 数学手册[M]. 北京:高等教育出版社,2008:590.
- [26] Wang S, Komvopoulos K. A fractal theory of the temperature distribution at elastic contacts of fast sliding surfaces [J]. Transactions of the ASME Journal of Tribology, 1995, 117 (2): 203 - 215.
- [27] Majumdar A, Bhushan B. Role of fractal geometry in roughness characterization and contact mechanics of surfaces [J]. Transactions of the ASME Journal of Tribology, 1990, 112(2):205-216.
- [28] Berry M V. Diffractals [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General,1979,12(6):781-797.
- [29] 郭建英,孙永全,王铭义,等. 基于计算机仿真的风电机组系统可靠性综合[J]. 机械工程学报,2012,48(2):2-8.
GUO Jian-ying, SUN Yong-quan, WANG Ming-yi, et al. System reliability synthesis of wind turbine based on computer simulation [J]. Journal of Mechanical Engineering,2012,48(2):2-8.
- [30] 田红亮,刘芙蓉,方子帆,等. 结合部静摩擦因数修正与定量实验验证[J]. 农业机械学报,2013,44(10):282-293.
TIAN Hong-liang, LIU Fu-rong, FANG Zi-fan, et al. Correction of static friction coefficient for joint interface and quantitative test confirmation [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44 (10): 282 - 293.