

文章编号: 1000-4750(2014)07-0008-07

# 往复荷载作用下的改进动接触力方法

张立红, 刘天云, 李庆斌, 陈 滔

(清华大学水沙科学与水利水电工程国家重点实验室, 北京 100084)

**摘 要:** 该文基于与中心差分显式时间积分法相结合的动接触力方法, 引入主、从节点的相对速度作为判断接触状态转变的标准, 提出了一种能够适用于求解往复荷载作用的改进动接触力方法。改进方法能够准确地模拟分离、静接触、滑动接触以及反向滑动四种不同接触状态间的转变, 为地震等往复荷载作用下结构动力分析提供了有力工具。数值算例验证了该文方法的正确性。

**关键词:** 动接触力方法; 显式积分法; 往复荷载; 接触状态; 非线性动力学

**中图分类号:** O343.3 **文献标志码:** A **doi:** 10.6052/j.issn.1000-4750.2013.01.0082

## MODIFIED DYNAMIC CONTACT FORCE METHOD UNDER RECIPROCATING LOAD

ZHANG Li-hong, LIU Tian-yun, LI Qing-bin, CHEN Tao

(State Key Laboratory of Hydrosience and Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** This paper presents a modified reciprocating contact force method for solving earthquake engineering problems. The proposed method employs the criteria of the relative velocity between master and slave nodes, together with a central difference time-integration scheme. This method is a powerful tool to conduct a structural dynamic analysis with the possible transitions of four contact statuses, i.e., separation, stick contact, sliding contact and reverse sliding contact. Numerical examples illustrate the efficiency of the proposed method.

**Key words:** dynamic contact force method; explicit integration method; reciprocating load; contact status; nonlinear dynamics

近些年来, 强震频发, 结构的动力安全性分析引起人们广泛的关注。在对结构进行动力分析时, 往往需要考虑结构与周围围岩(土)之间以及整体结构中不同构件间的相互作用, 接触是模拟这一非连续现象的有力手段。鉴于接触非线性现象在固体力学和结构力学中的普遍存在性, 许多学者对其进行了研究。由于各种工程设计的需要以及随着人们研究的不断深入, 数值解法成为人们研究接触问题的重要手段和必不可少的工具。尤其对于大型结构的动接触问题, 因其非线性因素复杂、计算量大, 是

目前工程界中的热点与难点, 因此迫切需要发展更加简便高效的动接触模型及解法<sup>[1-3]</sup>。

接触问题属于典型的非线性问题, 其不等式约束条件(即单向性)是使其在数学上难处理的根本原因。动接触还需考虑变形和波的传播问题。对于接触问题主要有直接迭代求解和转化成数学极值问题求解两种思路。直接迭代求解首先根据假设的初始接触状态形成系统刚度矩阵, 求得位移和接触力后, 根据接触条件不断修改接触状态, 重新形成刚度阵, 反复迭代直至收敛。比如赵兰浩等<sup>[4]</sup>的有限

收稿日期: 2013-01-24; 修改日期: 2013-06-19

基金项目: 国家自然科学基金项目(90715041, 11372156); 十一五支撑计划项目(2008BAB29B05); 国家重点基础研究发展计划(973)项目(2013CB035902)

通讯作者: 李庆斌(1964—), 男, 河南周口人, 教授, 博士, 博导, 从事混凝土材料与结构基本理论的研究(E-mail: qingbinli@tsinghua.edu.cn).

作者简介: 张立红(1984—), 女, 河北保定人, 博士生, 从事水工结构动力分析方面的研究(E-mail: lh-zhang08@mails.tsinghua.edu.cn);

刘天云(1968—), 男, 河北唐山人, 副研究员, 博士, 从事计算力学方面的研究(E-mail: liuty@tsinghua.edu.cn);

陈滔(1985—), 男, 四川南充人, 博士生, 从事混凝土动态力学性能的研究(E-mail: ct04@mails.tsinghua.edu.cn).

元混合直接迭代法，这类方法的优点是无需引入额外的人工变量、存储量小，比较容易理解和实现，但是缺乏收敛的数学基础，实际计算中容易出现不收敛的情况。接触问题可以看作是求解带约束条件的极值问题，常用求解方法有 Lagrange 乘子法<sup>[5]</sup>、罚函数方法<sup>[6]</sup>以及两者的各种变式方法<sup>[7-9]</sup>、数学规划法<sup>[10-12]</sup>等。Lagrange 乘子法中的接触约束条件可以得到精确的满足，不足之处是由于其引入的 Lagrange 乘子，增加了系统的求解规模，同时使得控制矩阵中出现了零对角元素，增加求解难度；罚函数方法虽不增加求解规模，但是罚因子会导致接触条件不能精确满足，可能引起方程的病态，因此如何选取罚因子成为新的问题。数学规划法在理论上比较严格和直观，无需判断接触状态，但是可能会引入物理意义不明的量，需对整体刚度阵求逆，应用较少。此外，还有冲量模型<sup>[13]</sup>、初始位移法<sup>[14]</sup>等，这些方法均研究带裂缝结构在动荷载作用下的响应，因此在大规模结构的动接触问题中应用有限。

与隐式算法相结合的接触解法通常在每个迭代步修改总体刚度阵直至收敛，这需要大量的计算时间和存储空间，而显式算法可以避免这一缺点。钟志华、王福军等基于显式积分方法采用接触力方法来分析机械工程中的碰撞问题<sup>[2,9,15]</sup>。刘晶波等<sup>[16-19]</sup>提出的动接触力方法将动接触约束条件与中心差分显式算法相结合，利用预测修正的思路，能够精确满足接触约束条件，且无需迭代求解，在实际工程中得到广泛的应用，比如用于分析拱坝、碾压混凝土重力坝中横缝的开合模拟和地质节理面的不连续行为<sup>[20-22]</sup>，以及带裂缝平板的非线性动力特性和波动问题等<sup>[16,23]</sup>。但是上述动接触力法均未考虑滑动到反向滑动之间接触状态的转变。本文以刘晶波等提出的动接触力法为基础，引入主从节点相对速度作为判断接触状态的标准，得到改进的动接触力算法，使之能够有效处理分离、静接触、滑动接触、反向滑动接触四种接触状态之间的转变。

## 1 接触状态分类

### 1.1 接触约束条件

典型的接触问题如图 1 所示。

其非线性来源主要有两种：一是法向非嵌入条件；二是当考虑摩擦时，滑动摩擦与静摩擦转变时切向物理量的突变。根据接触体所受力和位移约束

条件的不同，通常可分为静接触和动接触两大类接触状态，具体接触约束条件见表 1 所示。

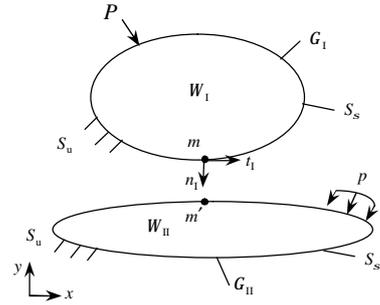


图 1 两物体接触示意图

Fig.1 Sketch of two contact bodies

表 1 接触约束条件

Table 1 Conditions of contact constraint

接触状态	力		位移	
	法向	切向	法向	切向
静接触	$R_I = -R_{II}$	$t_I = -t_{II}$ $ t  \leq m_s R$	$n_I(u_{II} - u_I) + D_0 \geq 0$	$t_I(u_{II} - u_I) = 0$
动接触	$R_I = -R_{II}$	$t_I = -t_{II}$ $t = \pm m_d R$	$n_I(u_{II} - u_I) + D_0 \geq 0$	无

表中变量  $t$  和  $R$  代表切向、法向接触力，其中下标 I、II 分别表示主、从接触体； $m_s$  和  $m_d$  分别为静、动摩擦系数； $n_I$  和  $t_I$  表示主接触体的外法向和接触面的切向方向； $D_0$  代表两个接触体之间的初始间隙。为了更明确地表征接触体之间的相互关系，后文将采用进一步细化的接触状态。

### 1.2 接触状态分类

本文参考有关文献[24-25]，将接触状态细分为分离、静接触、正向滑动接触、反向滑动接触四种状态，所有可能的接触状态转变关系如图 2 所示，其中虚线框的内容均处于接触状态。

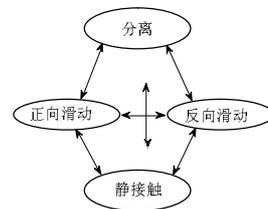


图 2 接触状态转换关系图

Fig.2 Transition relationship between contact statuses

不同接触状态间转变的判断条件为：

#### 1) 分离与接触

判断依据是主、从接触体在法向方向的相对位移，即如果满足式(1)则两接触体为接触状态，否则为分离状态。

$$n_I^T(u_{II} - u_I) + D_0 \leq 0 \quad (1)$$

式中变量的意义同表 1。

### 2) 静接触到滑动

判断依据为主、从节点在  $p$  时刻相对速度  $\bar{\boldsymbol{v}}^{p+1}$  为零, 且  $p+1$  时刻预测的主从节点相对速度不为零, 即同时满足式(1)和式(2)。

$$\bar{\boldsymbol{v}}^p - \bar{\boldsymbol{v}}_1^p = 0 \quad \text{且} \quad \bar{\boldsymbol{v}}^{p+1} = \bar{\boldsymbol{v}}_1^{p+1} - \bar{\boldsymbol{v}}_2^{p+1} \neq 0 \quad (2)$$

### 3) 滑动到静接触

判断依据是主、从节点  $p$  时刻相对速度不为 0, 预测得到的  $p+1$  时刻的相对速度与上一个时刻的相对速度异号, 且计算得到的不平衡力不大于最大静摩擦力, 即同时满足式(1)和式(3)。

$$\bar{\boldsymbol{v}}^p \cdot \bar{\boldsymbol{v}}^{p+1} < 0 \quad \text{且} \quad \sqrt{(t_{11}^p)^2 + (t_{12}^p)^2} \leq m |R_{(1)}^p| \quad (3)$$

式中,  $t_{11}$  和  $t_{12}$  表示切向接触力在切平面内的两个分量, 简便起见取动、静摩擦系数相同。

### 4) 滑动到反向滑动

判断依据是主从节点  $p$  时刻相对速度不为零, 预测得到的  $p+1$  时刻的相对速度与上一个时刻的相对速度异号, 且计算得到的不平衡力大于最大静摩擦力, 即同时满足式(1)和式(4)。

$$\bar{\boldsymbol{v}}^p \cdot \bar{\boldsymbol{v}}^{p+1} < 0 \quad \text{且} \quad \sqrt{(t_{11}^p)^2 + (t_{12}^p)^2} > m |R_{(1)}^p| \quad (4)$$

## 2 改进动接触力算法基本原理

### 2.1 运动方程

接触体的运动方程为:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_c \quad (5)$$

式中:  $\boldsymbol{M}$ 、 $\boldsymbol{C}$ 、 $\boldsymbol{K}$  分别为质量阵、阻尼阵和刚度阵;  $\boldsymbol{u}$ 、 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 、 $\ddot{\boldsymbol{x}}$  分别为位移、速度和加速度;  $\boldsymbol{F}$  为外荷载;  $\boldsymbol{F}_c$  为接触力。

在求解上述运动方程的众多时域求解方法中, 中心差分显式算法因其计算量小, 对内存要求低, 最适宜求解大规模动力问题。利用式(6)~式(8)对运动方程进行时域离散, 可得  $p+1$  时刻的位移, 如式(9)所示, 该式可以理解为  $p+1$  时刻的位移由两部分组成: 一部分是由不考虑接触力作用得到的预测位移, 另一部分是由接触力引起的修正位移。

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{\Delta t^2} (u^{p-1} - 2u^p + u^{p+1}) \quad (6)$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}^p = \frac{1}{2\Delta t} (u^{p+1} - u^{p-1}) \quad (7)$$

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{2\Delta t} (\dot{\boldsymbol{x}}^{p+1} - \dot{\boldsymbol{x}}^{p-1}) \quad (8)$$

$$u^{p+1} = \bar{u}^{p+1} + \frac{(\Delta t)^2}{M} (F_c^p),$$

$$\bar{u}^{p+1} = 2u^p - u^{p-1} + \frac{(\Delta t)^2}{M} (\hat{F}^p). \quad (9)$$

式中:  $\bar{u}^{p+1}$  为  $p+1$  时刻不考虑接触力的预测位移;  $\hat{F}^p = F^p - (C\dot{\boldsymbol{x}} + K\boldsymbol{u})$  为对应的等效荷载。考虑到主、从接触体的接触力满足相互作用力的关系, 即  $F_{c(1)}^p + F_{c(2)}^p = 0$ , 故可利用式(9)分别写出主、从接触体位移的表达式:

$$\begin{aligned} u_{(1)}^{p+1} &= \bar{u}_{(1)}^{p+1} + \frac{(\Delta t)^2}{M_{(1)}} (F_{c(1)}^p), \\ u_{(2)}^{p+1} &= \bar{u}_{(2)}^{p+1} + \frac{(\Delta t)^2}{M_{(2)}} (-F_{c(1)}^p). \end{aligned} \quad (10)$$

### 2.2 接触力的求解

由 2.1 节分析可知, 动接触力算法的关键是求解接触力, 而接触力与接触状态密切相关, 本文借鉴文献[17]中有关接触力的求解方法, 即: 当接触体处于静接触时, 由表 1 的位移约束条件, 可得:

$$\begin{cases} u_{1(1)}^{p+1} - u_{1(2)}^{p+1} = u_{1(1)}^p - u_{1(2)}^p \\ u_{2(1)}^{p+1} - u_{2(2)}^{p+1} = u_{2(1)}^p - u_{2(2)}^p \\ u_{3(1)}^{p+1} - u_{3(2)}^{p+1} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

式中,  $u$  的右下角标 1、2、3 分别表示两个切向和法向的三个分量。将式(10)代入式(11)可得:

$$\begin{cases} t_{1(1)}^p = [(\bar{u}_{1(2)}^{p+1} - \bar{u}_{1(1)}^{p+1}) - (u_{1(2)}^p - u_{1(1)}^p)] \cdot \frac{M_{(1)}M_{(2)}}{(M_{(1)} + M_{(2)})(\Delta t)^2} \\ t_{2(1)}^p = [(\bar{u}_{2(2)}^{p+1} - \bar{u}_{2(1)}^{p+1}) - (u_{2(2)}^p - u_{2(1)}^p)] \cdot \frac{M_{(1)}M_{(2)}}{(M_{(1)} + M_{(2)})(\Delta t)^2} \\ R_{(1)}^p = (\bar{u}_{3(2)}^{p+1} - \bar{u}_{3(1)}^{p+1}) \frac{M_{(1)}M_{(2)}}{(M_{(1)} + M_{(2)})(\Delta t)^2} \end{cases} \quad (12)$$

切向滑动接触力由式(13)确定, 其大小由库伦摩擦准则确定, 方向与相对运动方向相反, 故引入主、从节点相对速度的方向来判定接触力方向, 其中当接触体由静接触转换为滑动时接触力方向的确定借鉴文献[17]中所用方法, 即式(14)。

$$\begin{cases} t_{1(1)}^p = t_1 \cdot n_t \cdot m |R_{(1)}^p| \\ t_{2(1)}^p = t_2 \cdot n_t \cdot m |R_{(1)}^p| \end{cases} \quad (13)$$

式中, 三维问题的接触力沿切面的方向:

$$n_t = \frac{t_1(t_{1(1)}^p) + t_2(t_{2(1)}^p)}{|t_1(t_{1(1)}^p) + t_2(t_{2(1)}^p)|} \quad (14)$$

### 2.3 对现有动接触力模型的改进

文献[16-17]中在求解接触力时,将接触状态考虑为仅有动接触和静接触之间的转换,动接触的充分必要条件为:

$$t_a(u_1^{p+1} - u_{II}^{p+1}) > t_a(u_1^p - u_{II}^p), \text{sgn}(\Delta) = 1,$$

$$t_a(u_1^{p+1} - u_{II}^{p+1}) < t_a(u_1^p - u_{II}^p), \text{sgn}(\Delta) = -1. \quad (15)$$

式中,  $\Delta = t_a[(\bar{u}_1^{p+1} - \bar{u}_{II}^{p+1}) - (u_1^p - u_{II}^p)]$ ,  $t_a$  ( $a=1,2$ )为接触面上的两个切向量。这一充要条件无法模拟从滑动直接到反向滑动的状态转变,比如对于一个质量为1kg的质点,受法向压力为2.5N,切向力2.0N(不计重力),与地面之间的摩擦系数为0.4,假设  $p$  时刻沿与切向力相反的方向以1.0m/s的速度运动,取计算时步1.0s,可知对于该问题  $p$  时刻主、从节点相对位移差为零,1s后不考虑接触力的预测主、从位移差也为零,显然不满足文献[16]中的滑动摩擦的充要条件,可判定为静摩擦,而实际上该质点一直处于滑动状态,只是在某个时刻相对速度为零,但并没有处于静接触而是立即反向滑动。为了能够处理上述这种情形以及更清晰地判断接触状态的转变,本文提出增加相对速度作为判断接触体状态的标准。具体判断方法如1.2节和图3中的流程图所示,图3中  $\bar{u}_{(r)}^{p+1}$  表示考虑滑动接触力时主、从接触点的初步校核相对速度。

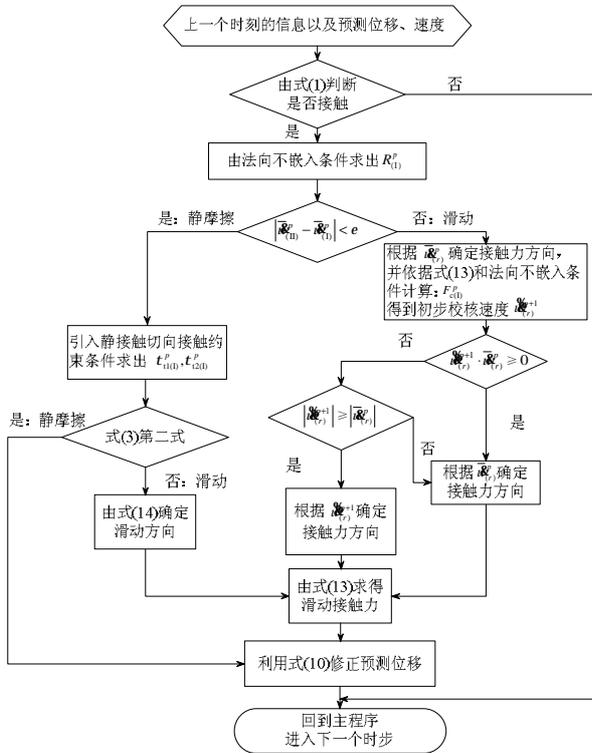


图3 改进动接触力算法流程图

Fig.3 Flowchart of the modified contact force method

## 3 算例验证

### 3.1 两杆对心碰撞算例<sup>[17]</sup>

本小节采用图4所示的两杆对心碰撞算例来验证改进动接触力算法求解分离与静接触之间的状态转变。单杆大小为10m×0.5m×0.5m,单元均为0.25m×0.25m×0.25m,线弹性材料,弹性模量100Pa,泊松比0,密度0.01kg/m<sup>3</sup>,易知弹性波速为100m/s。无外力作用,两杆均以0.05m/s的初速度相向运动,考查两杆碰撞前后位移、速度的响应。计算步长取 $\Delta t = 0.1\text{ms}$ ,接触面上任意接触点对的计算结果如图5和图6所示,从中可以看出:0~0.1s,两杆未发生碰撞,各自以初速度相向运动;0.1~0.3s,两杆碰撞,接触产生的冲击波从接触面传播到杆的另一端再传回接触面总历时需 $2 \times (\text{杆长}/\text{波速}) = 0.2\text{s}$ ,这也是0.3s之后速度响应图中每隔0.2s有峰值出现的原因;0.3s之后两杆正碰完成,各自反向匀速运动。

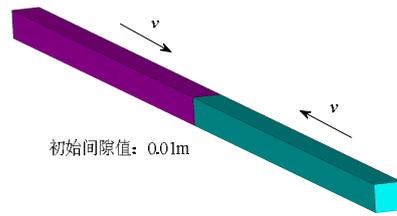


图4 两杆对心碰撞模型

Fig.4 Two-bar system

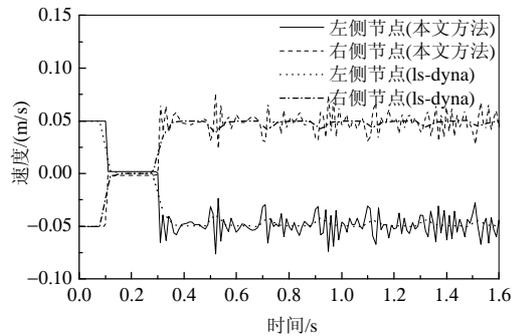


图5 对心碰撞模型速度时程响应

Fig.5 Velocity history of the two-bar system

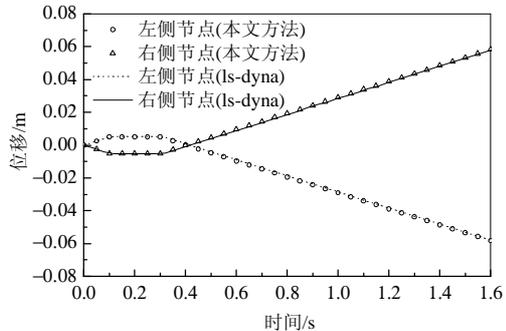


图6 对心碰撞模型位移时程响应

Fig.6 Displacement history of the two-bar system

### 3.2 质点滑块算例

在对具有一定体积的滑块与底面进行动接触分析时，由于滑块底面摩擦的影响会引起接触面受力不均匀，从而导致接触状态不均一的情况<sup>[25]</sup>，本节为了考查改进的动接触算法模拟各接触状态间转换的准确性，选择不计体积的理想质点与平面沿单一直线方向接触为例，如图 7 所示  $x$  向，共计算静接触转变为滑动接触、滑动接触转变为静接触以及滑动接触转变为反向滑动接触三种情形，计算条件见表 2(a、b、c 依次表示上述三种情形，时间步长均取  $50\mu\text{s}$ )。从图 8 所示的质点速度时程图可见改进动接触力算法的结果与解析解吻合良好，说明本文算法能够准确模拟各接触状态间的转变。

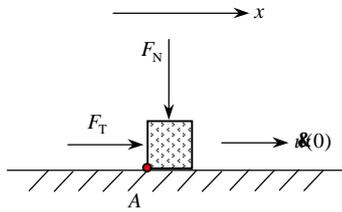


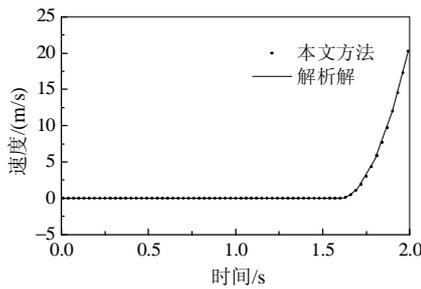
图 7 质点接触模型示意图

Fig.7 Sketch of the mass contact problem

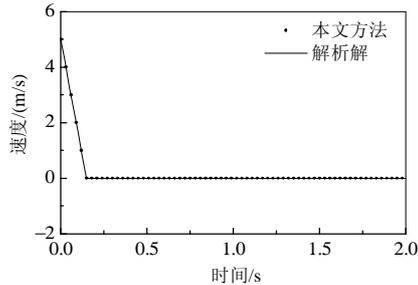
表 2 质点算例计算条件

Table 2 Conditions of the mass contact model

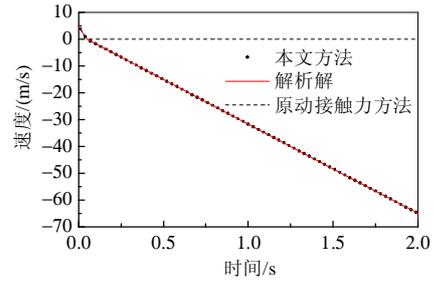
算例	初位移/m	初速度/(m/s)	荷载/kN	质点质量/(kg/m <sup>3</sup> )	摩擦系数
a	0	0	$F_N=30$ $F_T=80t$	300	0.4
b	0	0	$F_N=25$ $F_T=0$	300	0.4
c	0	5	$F_N=25$ $F_T=-20$	300	0.4



(a) 静接触到滑动



(b) 滑动到静接触



(c) 滑动到反向滑动

图 8 质点接触算例速度响应结果及与解析解对比

Fig.8 Velocity history of the mass comparing to analytical solutions

### 3.3 弹性体有限元算例

本小节选择文献[26]中的算例，结合有限元方法模拟滑块在图 9 所示的斜面上的运动规律。滑块和斜坡均为线弹性材料。假设滑块正以  $12\text{m/s}$  的初速度沿斜面向上滑动，此时滑块与斜面之间为滑动接触，考虑滑块自重，则其运动速度逐渐减小并直至为零，之后滑块与斜面的接触状态发生改变。所设摩擦系数的不同，滑块可能沿斜面向下滑动，也可能变为静接触。分别取摩擦系数  $0.4$  和  $0.8$ ，时间步长取  $10\mu\text{s}$ ，滑块左下角处接触节点对的速度、位移计算结果(如图 10~图 11 所示)与文献[26]中罚函数法的计算结果基本一致，说明改进动接触力算法能够很好地模拟弹性体之间接触状态的转变。

滑块材料:

$E=1.0\text{kPa}$   
 $n=0.3$   
 $r=2\text{kg/m}^3$   
 $V=0.2\text{m}\times 0.2\text{m}\times 0.1\text{m}$

斜坡材料:

$E=30\text{MPa}$   
 $n=0.3$   
 $r=2.0\times 10^4\text{kg/m}^3$

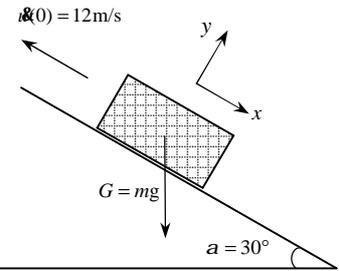


图 9 斜坡弹性滑块示意图及计算条件

Fig.9 Elastic block on the slop and the corresponding conditions

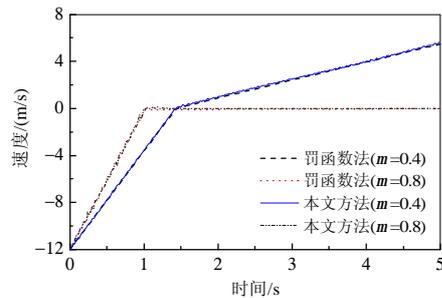


图 10 斜坡弹性滑块速度时程响应结果

Fig.10 Velocity history of the elastic block

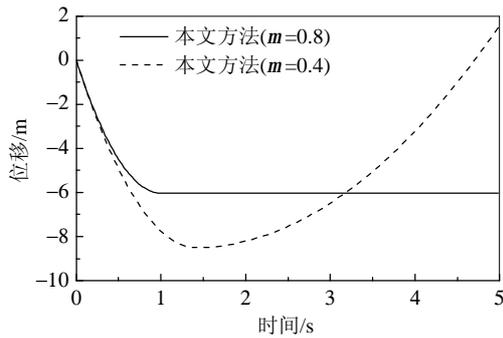


图 11 斜坡弹性滑块位移时程响应结果

Fig.11 Displacement history of the elastic block

### 3.4 往复荷载有限元算例

为了进一步验证本文算法的有效性, 考查图 7 所示的弹性体在往复荷载作用下的运动响应情况, 滑块设计为一棱长 1.0m 的立方体, 底面足够大, 滑块和底面均采用线弹性材料, 具体参数为弹性模量  $E$  为 0.3GPa, 泊松比 0.3, 密度  $2400\text{kg/m}^3$ 。有限元网格均为  $1.0\text{m}\times 1.0\text{m}\times 1.0\text{m}$  的六面体单元, 初始速度和初始位移均为零。滑块 8 个节点均受如下式所示的集中力:

$$F_N = \begin{cases} -50t \text{ kN}, & 0 \leq t < 0.5 \\ -25\text{kN}, & 0.5 \leq t \leq 1.0 \end{cases}$$

$$F_T = \begin{cases} 0, & 0.0 \leq t \leq 1.0 \\ 48\sin(10\pi t) \text{ kN}, & 1.0 \leq t \leq 2.0 \end{cases} \quad (16)$$

易知无摩擦时刚性滑块的位移解析解为:

$$u(t) = \frac{A}{Mw} \left[ \frac{-1}{w} \sin(w(t-1)) + C_1(t-1) + C_2 \right] \quad (17)$$

式中:  $A = 38.4 \times 10^4$ ;  $M = 2400$ ;  $w = 10\pi$ ;  $C_1 = 1$ ;  $C_2 = 0$ 。选取不同摩擦系数, 有限元弹性体的计算结果(考察图 7 中 A 点位置的节点对)见图 12 所示。从中可以看出: 摩擦系数为 0 时, 弹性体的位移响应比相同条件下质点的解析解略小, 这是由弹性变形引起的; 当摩擦系数越大, 位移的整体响应越小。

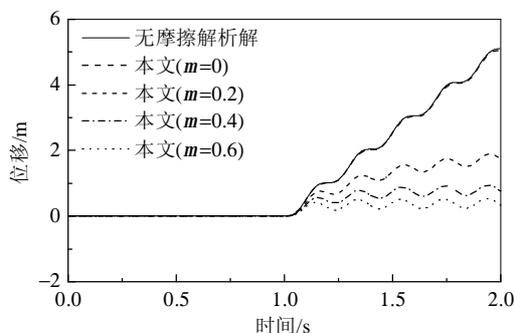


图 12 往复荷载下弹性体的位移时程响应

Fig.12 Displacement history of the elastic block under reciprocating load for various friction coefficients

## 4 结论

本文提出了往复荷载作用下的改进动接触力方法, 为往复复杂荷载作用下考虑接触的结构动力分析提供了一个有力数值求解工具。通过引入主、从节点相对速度作为判断接触状态改变的标准, 使之能够准确处理不同接触状态之间的转变。该方法的主要优点如下:

(1) 本文算法能够模拟分离与接触、静接触与滑动接触、正向滑动接触与反向滑动接触几种不同接触状态之间的转变。

(2) 与中心显式算法相结合, 具有计算量和存储量均较小的特点, 计算效率高, 为实现大规模结构动接触问题的求解奠定了基础。

需要说明的是, 本文方法的动接触力计算仅针对指定的接触节点对进行, 未考虑接触面法向的改变, 因此仅适用接触关系明确的节点对节点形式的小变形情形的接触问题。

### 参考文献:

- [1] Wriggers P. Computational contact mechanics [M]. Hoboken, NJ: Wiley and Sons, 2002: 109-156.
- [2] 钟阳, 钟志华, 李光耀, 等. 机械系统接触碰撞界面显式计算的算法综述[J]. 机械工程学报, 2011, 47(13): 44-58.  
Zhong Yang, Zhong Zhihua, Li Guangyao, et al. Review on contact algorithm calculating the contact-impact interface in mechanical system with explicit FEM [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(13): 44-58. (in Chinese)
- [3] 刘书, 刘晶波, 方鄂华. 动接触问题及其数值模拟的研究进展[J]. 工程力学, 1999, 16(6): 14-28.  
Liu Shu, Liu Jingbo, Fang Ehua. The advances of studies on the dynamic contact problem and its numerical methods [J]. Engineering Mechanics, 1999, 16(6): 14-28. (in Chinese)
- [4] 赵兰浩, 李同春, 颜天佑. 虚拟裂缝模型的接触有限元法实现[J]. 工程力学, 2010, 27(5): 60-67.  
Zhao Lanhao, Li Tongchun, Yan Tianyou. Implementation of fictitious crack model using contact finite element method [J]. Engineering Mechanics, 2010, 27(5): 60-67. (in Chinese)
- [5] Bathe K J, Chaudhary A. A solution method for planar and axisymmetric contact problems [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1985, 21(1): 65-88.
- [6] Perić D, Owen D. Computational model for 3D contact problems with friction based on the penalty method [J]. International Journal for Numerical Methods in

- Engineering, 1992, 35(6): 1289—1309.
- [7] Simo J C, Laursen T A. An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction [J]. Computers and Structures, 1992, 42(1): 97—116.
- [8] Zavarise G, De Lorenzis L. An augmented Lagrangian algorithm for contact mechanics based on linear regression [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2012, 91(8): 825—842.
- [9] Wang F J, Wang L P, Cheng J G, et al. Contact force algorithm in explicit transient analysis using finite-element method [J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2007, 43(6/7): 580—587.
- [10] 钟万勰. 弹性接触问题的变分原理及参数二次规划求解[J]. 计算结构力学及其应用, 1985, 2(2): 1—10.  
Zhong Wanxie. On variational principles of elastic contact problems and parametric quadratic programming solution [J]. Computational Structural Mechanics and Applications, 1985, 2(2): 1—10. (in Chinese)
- [11] Kwak B M, Lee S S. A complementarity-problem formulation for two-dimensional frictional contact problems [J]. Computers and Structures, 1988, 28(4): 469—480.
- [12] Tangaramvong S, Tin-Loi F. An FE-MPEC approach for limit load evaluation in the presence of contact and displacement constraints [J]. International Journal of Solids and Structures, 2012, 49(13): 1753—1763.
- [13] 周晶, 倪汉根. 裂缝结构在地面运动作用下的反应分析[J]. 地震工程与工程振动, 1986, 6(2): 52—58.  
Zhou Jing, Ni Han'gen. Response of cracked structures during earthquake [J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 1986, 6(2): 52—58. (in Chinese)
- [14] 李庆斌, 周鸿钧, 林皋. 异弹模界面裂缝的动断裂分析[J]. 地震工程与工程振动, 1990, 10(4): 63—72.  
Li Qingbin, Zhou Hongjun, Lin Gao. Dynamic fracture analysis of crack at bimaterial interface [J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 1990, 10(4): 63—72. (in Chinese)
- [15] 王福军, 程建钢, 姚振汉, 等. 结构碰撞数值模拟的一类接触算法[J]. 工程力学, 2002, 19(1): 130—134.  
Wang Fujun, Cheng Jiangang, Yao Zhenhan, et al. A New contact algorithm for numerical simulation of structure crashworthiness [J]. Engineering Mechanics, 2002, 19(1): 130—134. (in Chinese)
- [16] Liu J B, Sharan S K, Wang D, et al. A dynamic contact force model for contactable cracks with static and kinetic friction [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1995, 123(1/2/3/4): 287—298.
- [17] Liu S, Liu J B, Sun J G, et al. A method for analyzing three-dimensional dynamic contact problems in visco-elastic media with kinetic and static friction [J]. Computers and Structures, 2003, 81(24/25): 2383—2394.
- [18] 刘晶波, 王铎, 姚玲. 动、静摩擦对可接触型裂纹动态影响的一种算法[J]. 力学学报, 1994, 26(4): 494—502.  
Liu Jingbo, Wang Duo, Yao Ling. A method for calculation the dynamic effect of dynamic and static friction on a contactable crack [J]. ACTA Mechanica Sinica, 1994, 26(4): 494—502. (in Chinese)
- [19] Liu J B, Sharan S K. Analysis of dynamic contact of cracks in viscoelastic media [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1995, 121(1/2/3/4): 187—200.
- [20] 张伯艳, 陈厚群. LDDA 动接触力的迭代算法[J]. 工程力学, 2007, 24(6): 1—6.  
Zhang Boyan, Chen Houqun. A new LDDA iterative algorithm for dynamic contact forces [J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(6): 1—6. (in Chinese)
- [21] 李小军, 卢滔. 水电站地下厂房洞室群地震反应显式有限元分析[J]. 水力发电学报, 2009, 28(5): 41—46.  
Li Xiaojun, Lu Tao. Explicit finite element analysis of earthquake response for underground cavern of hydropower stations [J]. Journal of Hydroelectric Engineering, 2009, 28(5): 41—46. (in Chinese)
- [22] 李德玉, 叶建群, 涂劲, 等. 碾压混凝土重力坝整体三维非线性有限元地震反应分析[J]. 水力发电学报, 2009, 28(5): 78—82.  
Li Deyu, Ye Jianqun, Tu Jin, et al. 3D nonlinear seismic analysis of full-monolith RCC gravity dam [J]. Journal of Hydroelectric Engineering, 2009, 28(5): 78—82. (in Chinese)
- [23] Liu H, Liao Z P. An explicit method for numerical simulation of wave equations: 3D wave motion [J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2011, 10(1): 13—20.
- [24] Yang B D, Chu M L, Menq C H. Stick-slip-separation analysis and non-linear stiffness and damping characterization of friction contacts having variable normal load [J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 210(4): 461—481.
- [25] Ahn Y J, Barber J R. Response of frictional receding contact problems to cyclic loading [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2008, 50(10/11): 1519—1525.
- [26] 彼得·艾伯哈特, 胡斌. 现代接触动力学[M]. 胡斌, 译. 南京: 东南大学出版社, 2003: 134—139.  
Eberhard Peter, Hu Bin. Advanced contact dynamics [M]. Translated by Hu Bin. Nan Jing: Southeast University Press, 2003: 134—139. (in Chinese)