一元函数的连续性

一、　连续性的证明

例 1：考虑 Riemann 函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q},(\text{当}x=\dfrac{p}{q}\text{为既约分数},q>0)\\ 0,(\text{当}x\text{为无理数})\end{cases}$$ 的连续性。

（在无理点上连续，在有理点上间断）

例 2：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明函数

$$M(x)=\sup\{f(t)\,|\,t\in[a,x]\}，\quad m(x)=\inf\{f(t)\,|\,t\in[a,x]\}$$

在 $[a,b]$ 上连续。

二、　连续性的应用

例 1：设 $f(x)$ 对 $(-\infty,+\infty)$ 内一切 x 有 $f(x^2)=f(x)$，且 $f(x)$ 在 $x=0$，$x=1$ 连续，证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内为常数。

例 2：平面上，沿任一方向作平行直线，总存在一条直线，将给定的三角形剖分成面积相等的两部分。

三、　一致连续性

例 1：证明：$f(x)$ 在区间 I 上一致连续的充要条件是：对 I 上任意二数列 $\{x_n\},\{x'_n\}$ 只要 $x_n-x'_n\to 0$，就有 $f(x_n)-f(x'_n)\to 0$（当 $n\to\infty$ 时）。

例 2：设 I 为有限区间，$f(x)$ 在 I 上有定义，试证：$f(x)$ 在 I 上一致连续充要条件是 f 把 Cauchy 序列映射为 Cauchy 序列。

例 3：设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续，且 $\forall x>0$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x+n)=0$（$n$ 为整数）。试证：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$。

定义：若 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，则

$$\omega_f(\delta)=\sup\{\left|f(x')-f(x'')\right|:x',x''\in I,\left|x'-x''\right|<\delta\}$$

例 4：若 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，则 $f(x)$ 在 I 上一致连续的充要条件是 $\lim\limits_{\delta\to 0^+}\omega_f(\delta)=0$。

四、 上、下半连续（左、右连续）

例 1：Dirichlet 函数

$D(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbb{Q}\\ 0, x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ 在有理点处上半连续，但不下半连续。在无理点的情况相反。

例 2：Riemann 函数

$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q},（当x=\dfrac{p}{q}为既约分数,q>0）\\ 0,（当x为无理数）\end{cases}$ 在无理点处既上半连续又下半连续。在有理点处上半连续，但不下半连续。

定理 4 有界闭区间上半连续函数，必有上界，且达到上确界。

定理 5 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内半连续，则必存在内闭区间 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，使得 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上保持有界。

五、 函数方程

例 1：函数方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)\quad(\forall x,y\in\mathbb{R})$ 在 $x=0$ 处连续的唯一解为 $f(x)=ax$ （其中 a 是常数）。

例 2：函数方程

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)\quad(\forall x,y\in\mathbb{R})$$

在实轴$\mathbb{R}$上不恒为零的连续解为$f(x)=\cos ax$或$f(x)=chax$（其中a是常数）。

作业：P.93 ex8　P.107 ex2　P.119 ex4　P.126 ex3