一致连续性

例 1：证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义并且是连续的，而且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上是一致连续的。

证：$\forall\varepsilon>0$，由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，故 $\exists X>a$，使得当 $x'>X, x''>X$ 时，恒有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。由于 $f(x)$ 在 $[a,X+1]$ 上连续，故一致连续，从而必有正数 δ' 存在，使得当 $x',x''\in[a,X+1], |x'-x''|<\delta'$ 时，恒有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$，令 $\delta=\min\{\delta',1\}$。$\forall x',x''\in[a,+\infty), |x'-x''|<\delta$，则 x' 与 x'' 同时属于 $[a,X+1]$ 或同时满足 $x'>X, x''>X$。因此有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。故 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上是一致连续的。

例 2：无界函数 $f(x)=x+\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续。

证：
$$\begin{aligned}|f(x')-f(x'')| &= | \;|(x'-x'')+(\sin x'-\sin x'')| \le |x'-x''| \\ &+|\sin x'-\sin x''| \le 2|x'-x''|\end{aligned}$$

取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$ 即可。

例 3：在区间 (a,b) 上有限个一致连续函数的和与它们的乘积在此区间上是一致连续的。

证：只需证两个函数的情景。

(1) 和略.

(2) 积：先证区间 (a,b) 上的一致连续函数必定是有界的。

例 4：若单调有界的函数 $f(x)$ 在有限或无限的区间 (a,b) 上是连续的，则此函数在区间 (a,b) 上是一致连续的。

证：分三种情况：

(1) 设 (a,b) 是有限区间。由于 $f(x)$ 在 (a,b) 单调有界，故 $f(a+0)$

与 $f(b-0)$ 都存在。定义 $g(x)=\begin{cases} f(x), a<x<b \\ f(a+0), x=a \\ f(b-0), x=b \end{cases}$。显然 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，从而一致连续，故 $f(x)$ 在 (a,b) 上是一致连续的。

(2) a 为有限数，$b=+\infty$。此时令 $g(x)=\begin{cases} f(x), a<x<+\infty \\ f(a+0), x=a \end{cases}$，则 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在（有限），根据例 1 知 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，从而 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上一致连续。

若 $a=-\infty$， b 为有限数。考虑函数 $g(x)=f(-x)$ 转化成了(2)的情况。

(3) $a=-\infty$，$b=+\infty$。$\forall\varepsilon>0$，利用(2)已证的结果，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续，故 $\exists\delta_1>0$，使得当 x' 与 x'' 都属于 $(0,+\infty)$ 且 $|x'-x''|<\delta_1$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$；同样 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 一致连续，$\exists\delta_2>0$，使得当 x' 与 x'' 都属于 $(-\infty,1)$ 且 $|x'-x''|<\delta_2$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。令 $\delta=\min\{1,\delta_1,\delta_2\}$，则当 $|x'-x''|<\delta$ 时，必有 x' 和 x'' 同时属于 $(0,+\infty)$ 或同时属于 $(-\infty,1)$。因此，恒有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。由此可知，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是一致连续的。

例 5：在有限区间 (a,b) 上有定义而且是连续的函数 $f(x)$，可用连续的方法延拓到 $[a,b]$ 上，其充要条件是 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上是一致连续的。

例 6：设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，$\varphi(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\varphi(x)]=0$。证明：$\varphi(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续。

证：因 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\varphi(x)]=0$，故 $\forall\varepsilon>0,\exists M>0$，当 $x>M$ 时，$|f(x)-\varphi(x)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$。又 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，对上述 ε，$\exists\delta>0$，当 $x_1,x_2\in(a,+\infty)$，且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$。当 $x_1,x_2>M$，$|x_1-x_2|<\delta$ 时，有

$$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|=|\varphi(x_1)-f(x_1)+f(x_1)-f(x_2)+f(x_2)-\varphi(x_2)|$$

$\le|\varphi(x_1)-f(x_1)|+|f(x_1)-f(x_2)|+|f(x_2)-\varphi(x_2)|<\dfrac{\varepsilon}{3}+\dfrac{\varepsilon}{3}+\dfrac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$。由柯西准则，$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=l$（有限）。由例 1 知，$\varphi(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续。

例 7：函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 有连续的导函数，且 $\lim\limits_{x\to a+}f'(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b-}f'(x)$ 均存在有限。试证：

(1) $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续；

(2) $\lim\limits_{x\to a+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b-}f(x)$ 均存在。