# 第七讲　　多元函数微积分

**例1．** 求函数 $f\left(x,y\right)=x^2+4y^2+15y$ 在

$\Omega=\left\{\left(x,y\right)\middle|4x^2+y^2\le 1\right\}$ 上的最大、小值。

**解** 令 $x=\frac{1}{2}r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$（$0\le r\le 1$，$0\le\theta\le 2\pi$），则

$$f\left(x,y\right)=x^2+4y^2+15y=\frac{1}{4}r^2\cos^2\theta+4r^2\sin^2\theta+15r\sin\theta$$

$$=\frac{r^2}{4}+\frac{15}{4}r^2\sin^2\theta+15r\sin\theta=\frac{r^2}{4}+\frac{15}{4}(2+r\sin\theta)^2-15\text{。}$$

因 $r\ge 0$，故当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时取最大值，$\theta=-\frac{\pi}{2}$ 时取最小值，

易见，当 $r=1,\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x,y)$ 取最大值 $19$；

当 $r=1,\theta=-\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x,y)$ 取最小值 $-11$。

**例 2．** 设椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 在 $A\left(1,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ 点的切线交 $y$ 轴于 $B$ 点，

设 $l$ 为从 $A$ 到 $B$ 的直线段，试计算

$$\int_l\left(\frac{\sin y}{x+1}-\sqrt{3}y\right)dx+\left[\cos y\ln\left(x+1\right)+2\sqrt{3}x-\sqrt{3}\right]dy\text{。}$$

**解** 将 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 的两边对 x 求导，得 $\frac{x}{2}+\frac{2yy'}{9}=0$

即 $y'=-\frac{9x}{4y}$，$y'(1)=-\frac{9}{4}\frac{2\sqrt{3}}{9}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$在$A\left(1,\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$点的切线方程为

$$y-\frac{3\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}(x-1),$$

即$\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+y=2\sqrt{3}$， 令$x=0$，得$y=2\sqrt{3}$，

即 B 的坐标为$(0,2\sqrt{3})$.

$$\int_l\left(\frac{\sin y}{x+1}-\sqrt{3}y\right)dx+\left[\cos y\ln\left(x+1\right)+2\sqrt{3}x-\sqrt{3}\right]dy$$

$$=\int_l\frac{\sin y}{x+1}dx+\cos y\ln\left(x+1\right)dy-\sqrt{3}\int_l ydx-(2x-1)dy$$

$$=\left[\sin y\ln\left(x+1\right)\right]_{(1,\frac{3\sqrt{3}}{2})}^{(0,2\sqrt{3})}=-\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\ln 2$$

$$-\sqrt{3}\int_l ydx-(2x-1)dy$$

因线段 AB 的方程为$y=2\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$，

$$-\sqrt{3}\int_l ydx-(2x-1)dy$$

$$=-\sqrt{3}\int_1^0(2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}x)dx-(2x-1)d(2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^1(3+x)dx=\frac{21}{4}$$

故 原式$=\frac{21}{4}-\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\ln 2$。

**例 3．** 计算曲面积分 $\iint\limits_S (2x+z)dydz+zdxdy$，其中 S 为曲面 $z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$，且法向量与 z 轴的正向成锐角。

**解** （同合一投影法）即利用

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{z_x}{-1} \text{和} dydz=\cos\alpha dS=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}dxdy$$

原式$=\iint\limits_S [(2x+z)(-2x)+z]dxdy$

$$=\iint\limits_S (z-2xz-4x^2)dxdy$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}[x^2+y^2-2x(x^2+y^2)-4x^2]dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 p^2-2p^3\cos\theta-4p^2\cos^2\theta)\rho d\rho=-\frac{\pi}{2}$$

**例 4．** 设函数 Q(x,y)在 xOy 平面上具有一阶连续偏导数，

$\int_L 2xydx+Q(x,y)dy$

与路径无关，且对于任意 t 有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xydx+Q(x,y)dy$$

求 Q(w，y).

**解** 因 $P(x,y)=2xy$，由题意知

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=2x\text{，从而}Q(x,y)=x^2+c(y)$$

而

$$\text{等式左边}=\int_0^1[t^2+c(y)]dy=t^2+\int_0^1 c(y)dy$$

$$\text{等式右边}=\int_0^t[1^2+c(y)]dy=t+\int_0^t c(y)dy$$

故

$$t+\int_0^t c(y)dy=t^2+\int_0^1 c(y)dy$$

两边对 t 求导，得$1+c(t)=2t$，即$c(t)=2t-1$，　因此

$$Q(x,y)=x^2+2y-1$$

**例 5**．求曲线积分 $I=\int_L(e^x\sin y-b(x+y))dx+(e^x\cos y-ax)dy$，其中 a 与 b 为正常数，L 为从点 A（2a，0）沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 O（0,0）的弧。

解　因$e^x\sin ydx+e^x\cos ydy=d(e^x\sin y)$ 故

$$\int_L e^x\sin ydx+e^x\cos ydy=e^x\sin y\Big|_{(2a,0)}^{(0,0)}=0$$

而 L 的参数方程为

$$x=a+a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad 0\le t\le\pi,$$

所以

$$-\int_L b(x+y)dx+axdy$$

$$=-\int_0^\pi\left[-ba^2(\sin t+\sin t\cos t+\sin^2 t)+a^3(1+\cos t)\cos t\right]dt$$

$$= a^2 b\left(\frac{\pi}{2}+2\right)-\frac{1}{2}\pi a^3$$

因此

$$I = a^2 b\left(\frac{\pi}{2}+2\right)-\frac{1}{2}\pi a^3 .$$

**注**：也可利用格林公式来做。

**例 6**. 从已知$\Delta ABC$的内部的点$P$向三边作三条垂线，求使此三条垂线长的乘积为最大的点$P$的位置。

**解**：设$P$到$AB, AC, BC$的距离分别为$x, y, z$。则

$$cx + by + az = 2S ,$$

其中$S$为$\Delta ABC$的面积。

$$xyz = \frac{1}{abc} cx \cdot by \cdot az \le \frac{1}{abc}\left(\frac{cx+by+az}{3}\right)^3 = \frac{1}{abc}\left(\frac{2S}{3}\right)^3 ,$$

等号当且仅当$cx = by = az$时成立，且可达到。

**作业**：

**练习 1** 已知$f(x,y)$在$[a,b;a,b]$上有定义，除正方形$[a,b;a,b]$上一条连续曲线$y=\phi(x)$以外的点都连续。问：$F(x)=\int_z^b f(x,y)dy$是否在$(a,b)$上连续？

**练习 2** 设$f(x)$连续，$F(x)=\int_0^t dy \int_0^t f(x)dx$，求$F'(2)$.

**练习 3** 计算曲面积分

$$I = \iint_\Sigma 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2-1)dxdy$$

其中$\Sigma$是曲面$z = 1 - x^2 - y^2$ $(z \ge 0)$的上侧.

**练习 4** 设平面区域$D=\left[0,\pi\right]\times\left[0,\pi\right]$，$L$为$D$的正向边界，试证

（1）$\oint\limits_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint\limits_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$

（2）$\oint\limits_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx\geq 2\pi^2$

**练习 5** 设$f(x)$连续且恒大于零，

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)dxdydz}{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)dxdy}$$

$$G(t)=\frac{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)dxdy}{\int_{-t}^{t} f(x^2)dx}$$

其中$\Omega(t)=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\leq t^2\right\}$，

$D(t)=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq t^2\right\}$

（1）讨论$F(t)$在区间$(0,+\infty)$内的单调性；

（2）证明当$t>0$时，$F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$.

**练习 6** 设$f'(x)$连续，$L$为上半平面$(y>0)$内的有向分段光滑曲线，其起点为$(a,b)$，终点为$(c,d)$.记

$$I=\int\limits_L \frac{1}{y}\left[1+y^2f(xy)\right]dx+\frac{x}{y^2}\left[y^2f(xy)-1\right]dy$$

（1） 证明曲线积分 I 与路径 L 无关；

（2） 当$ab=cd$时，求 I 的值.

**练习 7** 计算

$$I=\oint_L (y^2-x^2)dy+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$$

其中 $L$ 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线，从 z 轴正向看去，L 为逆时针方向..

**练习 8** 设二元函数 $f(x,y)$ 有一阶连续的偏导数，且 $f(0,1)=f(1,0)$。证明：单位圆周上至少存在两点满足方程

$$y\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)-x\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=0。$$

**练习 9** 求平面 $x+2y-2z=1$ 含在椭圆柱体 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 内的面积。

**练习 10** 证明：锐角三角形内一点到三顶点联线成等角时，该点到三顶点距离之和为最小。