第五讲　　积 分

例 1．计算$\int_0^{\pi}\frac{\pi+\cos x}{x^2-\pi x+2004}dx$。

解　记$a=\sqrt{2004-\frac{\pi^2}{4}}$，令$t=x-\frac{\pi}{2}$，则

原式$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi-\sin t}{t^2+2004-\frac{\pi^2}{4}}dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{t^2+a^2}dt$

$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{t^2+a^2}dt=2\pi\left[\frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2\pi}{a}\arctan\frac{\pi}{2a}$

$=2\pi\frac{\arctan\frac{\pi}{2\sqrt{2004-\frac{\pi^2}{4}}}}{\sqrt{2004-\frac{\pi^2}{4}}}$。

例 2．计算 $\iint\limits_D\max\left(xy,x^3\right)d\sigma$，其中

$$D=\left\{(x,y)\big|-1\le x\le 1,0\le y\le 1\right\}。$$

解 在$D_1=\left\{(x,y)\big|-1\le x\le 0,0\le y\le x^2\right\}$和

$D_2=\left\{(x,y)\big|0\le x\le 1,x^2\le y\le 1\right\}$上，$\max\left(xy,x^3\right)=xy$

而在$D_3=\left\{(x,y)\big|-1\le x\le 0,x^2\le y\le 1\right\}$和

$D_4=\left\{(x,y)\big|0\le x\le 1,0\le y\le x^2\right\}$上，$\max\left(xy,x^3\right)=x^3$

则

原式$=\int_{-1}^{0}dx\int_0^{x^2}xydy+\int_{-1}^{0}dx\int_{x^2}^{1}x^3dy$

$$+\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 xydy+\int_0^1 dx\int_0^{x^2} x^3dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^0 x^5dx+\int_{-1}^0(x^3-x^5)dx+\frac{1}{2}\int_0^1(x-x^5)dx+\int_0^1 x^5dx$$

$$=-\frac{1}{12}-(\frac{1}{4}-\frac{1}{6})+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{6})+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}。$$

例 3. 满足下列性质的曲线 C：设 $p_0(x_0,y_0)$ 为曲线 $y=2x^2$ 上任一点，则由曲线 $x=x_0, y=2x^2, y=x^2$ 所围成区域的面积 A 与曲线 $y=y_0, y=2x^2$ 和 C 所围成区域的面积 B 相等。

例4 . 证明：$\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin(x^2)dx>0$。

解 令 $x^2=u$，则

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin(x^2)dx=\int_0^{2\pi}\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}du=\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}du+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}du$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}du+\int_0^{\pi}\frac{-\sin t}{2\sqrt{t+\pi}}dt=\int_0^{\pi}\sin u(\frac{1}{2\sqrt{u}}-\frac{1}{2\sqrt{u+\pi}})du$$

>0。

例 5. $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$

解 令 $\frac{1}{x}=u$，则 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+u^4}du$。

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{(1+\sqrt{2}x+x^2)(1-\sqrt{2}x+x^2)}dx$$

$$=\frac{1}{4}(\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+\sqrt{2}x+x^2)}dx+\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1-\sqrt{2}x+x^2)}dx)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}dx+\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}dx\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}\arctan\sqrt{2}(x+\frac{\sqrt{2}}{2})\Big|_0^{+\infty}+\sqrt{2}\arctan\sqrt{2}(x-\frac{\sqrt{2}}{2})\Big|_0^{+\infty}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}\frac{\pi}{4}+\sqrt{2}\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi。$$

例 6．计算 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx$

解 令 $x=2t$，则

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin 2t dt=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2\cdot\sin t\cdot\cos t dt$$

$$=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2 dt+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t dt+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t dt\right)$$

$$=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2 dt+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t dt+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin u du\right)$$

$$=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2 dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t dt\right)$$

于是 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx=\frac{\ln 2}{2}\pi$。

例 7．求积分 $\int_0^{2\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$。

解 $\int_0^{2\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

（1）

$\int_{\pi}^{2\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\int_0^{\pi}\frac{(t+\pi)\sin t}{1+\cos^2 t}dt$ 代入（1）得

原式

$$=-\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin t}{1+\cos^2 t}dt=\int_0^{\pi}\frac{\pi}{1+\cos^2 t}d\cos t=\pi\arctan\cos t\,\Big|_0^{\pi}$$

$$=-\frac{\pi^2}{2}。$$

例 8．设 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt$。则

(1) $f(x+\pi)=f(x)$;

(2) 求 $\max\{f(x)\mid x\in\mathbb{R}\}$。

解 (1) 略；

(2) $f'(x)=\left|\sin(x+\frac{\pi}{2})\right|-|\sin x|=0$，得到 $x_1=\frac{\pi}{4}, x_2=\frac{3\pi}{4}$ 是驻点。于是只要比较 $f(0), f(\pi), f(\frac{\pi}{4}), f(\frac{3\pi}{4})$ 即可。

作业：

练习 1 计算：$\int_0^{\pi}x\ln(\sin x)dx$。

练习 2 设非负函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且单调上升，$t\in[0,1], y=f(x)$ 与直线 $y=f(1)$ 及 $x=t$ 围成图形的面积为 $S_1(t)$，$y=f(x)$ 与直线 $y=f(0)$ 及 $x=t$ 围成图形的面积为 $S_2(t)$。

(1) 证明：存在唯一的 $t\in(0,1)$，使得 $S_1(t)=S_2(t)$。

(2) t 取何值时两部分面积之和取最小值？

练习 3 设区域 D 为 $x^2+y^2\le 1$，证明:

$$\frac{61}{165}\pi\le\iint_D\sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\le\frac{2}{5}\pi。$$

练习 4 设 $f(x)$连续，积分区域D是由直线$y=x$， $y=1$及y轴围成 ，试证明

$$\iint\limits_D f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2。$$

练习 5 设$G(x)=\int_1^x t\sin t^3 dt$，求$\int_1^2 G(x)dx$

练习 6 求积分$\iint\limits_D |xy-1|\,dxdy$，

$$D=\{(x,y)\frac{1}{2}\le x\le 2,\frac{1}{2}\le y\le 2\}。$$

练习 7 求积分$\int_{\frac{1}{2}}^2 (1+x-\frac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}}dx$。

练习 8 求积分 $I=\int_0^2 \frac{xdx}{e^x+e^{2-x}}$。

练习 9 证明： $0<\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx<\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}$。

练习 10 证明：$\int_0^1 \frac{\ln\frac{1}{x}}{1-x}dx=\frac{\pi^2}{6}$。

练习 11 计算积分$I(a)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(a^2\cos^2 x+\sin^2 x\right)dx,(a>0)$。

练习 12 设 $f(x)\in C^1[0,1],\ f(0)=0,0<f'(x)\le 1,\forall x\in[0,1]$, 试证明对一切$t\in[0,1]$，成立

$$\left[\int\limits_0^t f(x)dx\right]^2\ge\int\limits_0^t[f(x)]^3dx。$$

练习 13 设$I(a)=\int_0^1 \frac{\ln(1+ax)}{1+x^2}dx$，求 $I(1)$。

练习 14 计算 $\mathrm{I}=\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx$,其中 n 为正整数。

练习 15 求：$\int_0^1([\frac{2}{x}]-2[\frac{1}{x}])dx$。