历年高数（一）研究生入学考试中值定理试题

例 1：设在$[0,+\infty)$上函数$f(x)$有连续导数，且$f'(x)\ge k>0$，$f(0)<0$，证明$f(x)$在$(0,+\infty)$内有且仅有一个零点。（93 年）

例 2：证明方程$\ln x=\frac{x}{e}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$在区间$(0,+\infty)$内有且仅有两个不同实根。（89 年）

例 3：设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)dx=f(0)$。证明在$(0,1)$内存在一点$c$，使得$f'(c)=0$。（91 年）

例 4：假设函数$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上存在二阶导数，并且$g''(x)\ne 0$，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，试证：

(1) 在开区间(a,b)内$g(x)\ne 0$；

(2) 在开区间(a,b)内至少存在一点ξ，使得$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$。（95 年）

例 5：设$y=f(x)$是区间$[0,1]$上的任一非负连续函数。

(1) 试证存在$x_0\in(0,1)$，使得在区间$[0,x_0]$上以$f(x_0)$为高的矩形面积等于在区间$[x_0,1]$上以$y=f(x)$为曲边的曲边梯形的面积。

(2) 又设$y=f(x)$在区间$(0,1)$内可导，且$f'(x)>-\frac{2f(x)}{x}$，证明(1)中的x_0是唯一的。（98 年）

例 6：设函数 $f(x)$ 在$[0,\pi]$上连续，且

$\int_0^{\pi} f(x)dx=0,\int_0^{\pi} f(x)\cos xdx=0$。试证：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2，使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$。（00 年）

例 7：设 $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数，且 $f''(x)\neq 0$，试证：

(1) 对于 $(-1,1)$ 内的任意一点 $x\neq 0$，存在唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$，使得

$f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$ 成立；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$。　　（01 年）