

第三章 商空间与闭曲面

第二节 商空间与商映射

商拓扑

在第一节中，我们曾提出过如下问题：

问题 4 设 (X, τ) 是拓扑空间， (X, \sim) 是等价关系，则如何给出商集 X/\sim 上的拓扑结构？（商拓扑）

当然 X/\sim 上的拓扑结构也有很多，我们要找满足一定条件或者说有一定实际意义的拓扑。

考虑投射 $p: X \rightarrow X/\sim$ ，这样定义 $x \mapsto [x]$ ，我们要在 X/\sim 上定义拓扑 τ/\sim ，使得投射连续且最大。

Def.: 设 (X, τ) 是拓扑空间， \sim 是 X 上的一个等价关系。规定商集 X/\sim 上的子集族

$$\tau/\sim = \{V \subset X/\sim \mid p^{-1}(V) \in \tau\}$$

则 τ/\sim 是 X/\sim 上的一个拓扑，称为 τ 在 \sim 下的商拓扑，称 $(X/\sim, \tau/\sim)$ 是 (X, τ) 关于 \sim 的商空间。

（商拓扑的证明作为练习题。）

Th3.1: 设 X, Y 是两个拓扑空间， \sim 是 X 上的一个等价关系， $g: X/\sim \rightarrow Y$ 是映射，则 g 连续 $\Leftrightarrow g \circ p$ 连续。

思考题：

叙述乘积拓扑和商拓扑的定义。

答：乘积拓扑是使得投射连续的最小拓扑，商拓扑是使得投射连续的最大拓扑。

或者直接把拓扑写出来。