映射的同伦

代数拓扑的基本思想是对拓扑空间建立代数概念（如：群、交换群、环等）为形式的拓扑不变量，从而把代数的方法引进拓扑学的研究中来。要判定空间不同胚，需要用拓扑性质（不变量）。第二章中，我们已经看到分离性、可数性、紧致性和连通性这些拓扑性质在这方面的应用，但能解决的问题不多。

代数拓扑主要有两个分支：同调论和同伦论。

记号：$C(X,Y)=\{f \mid f:X\to Y$ 是连续映射$\}$。

定义 1：设 $f,g\in C(X,Y)$，如果存在连续映射 $H:X\times I\to Y$，使得 $\forall x\in X, H(x,0)=f(x), H(x,1)=g(x)$，则称 f 与 g 同伦，记作 $f\simeq g:X\to Y$，或简记为 $f\simeq g$；称 H 是连接 f 和 g 的一个同伦，记作 $H:f\simeq g$（或 $f\overset{H}{\simeq}g$）。

称 $h_t=H(x,t):X\to Y$ 为 H 的 $t-$切片。

例 1：(直线同伦) 设 $f,g\in C(X,E^n)$，规定 $H:X\times I\to E^n$ 为 $H(x,t)=(1-t)f(x)+tg(x)$，则 H 是连接 f 和 g 的一个同伦。

注 1：可以将 E^n 换成任意一个凸集。

例 2：设 $f,g\in C(X,S^n)$，使得 $\forall x\in X, f(x)\neq -g(x)$，则可规定 $H:X\times I\to E^n$ 为 $H(x,t)=\dfrac{(1-t)f(x)+tg(x)}{\|(1-t)f(x)+tg(x)\|}$，则 H 是连接 f 和 g 的一个同伦。

例 3：设 $f,g\in C(X,S^1)$，使得 $\forall x\in X, f(x)=-g(x)$，则构造连接 f 和 g 的一个同伦 H 如下：$H(x,t)=e^{it\pi}\cdot f(x)$。

命题 1：同伦关系是 $C(X,Y)$ 中的等价关系。

证：（自反性）设 $f\in C(X,Y)$，令

$H(x,t)=f(x),\forall x\in X,t\in I$，则 $H:f\simeq f$。

（对称性）设 $H:f\simeq g$，规定

$G(x,t)=H(x,1-t),\forall x\in X,t\in I$，则 $G:g\simeq f$。

（传递性）$H:f\simeq g$，$G:g\simeq h$，作 $F:X\times I\to Y$ 如下：

$$F(x,t)=\begin{cases}H(x,2t),t\in[0,\frac{1}{2}]\\G(x,2t-1),t\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$$，则 $F:f\simeq h$。

把 $C(X,Y)$ 在同伦关系下分成的等价类称为映射类，所有映射类的集合记作 $[X,Y]$，即 $[X,Y]=\{[f]\mid f\in C(X,Y)\}$。

例 4：设 X 是单点空间 $\{x\}$，则 $C(\{x\},Y)$ 与 Y 之间有一个自然的一一对应：$f\to f(x)$。$\forall y\in Y$，记 f_y 为像点是 y 的映射，则 f_{y_1} 到 f_{y_2} 的一个同伦就是从 y_1 到 y_2 的一条道路。

命题 2：若 $f_0\simeq f_1:X\to Y,g_0\simeq g_1:Y\to Z$，则

$g_0\circ f_0\simeq g_1\circ f_1:X\to Z$。

证：设 $F:f_0\simeq f_1,G:g_0\simeq g_1$，规定连续映射

$H:X\times I\to Y\times I$ 为 $H(x,t)=(F(x,t),t)$，则

$G \circ H : g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$。

如果 f 同伦于一个常值映射，则称 f 是零伦的。

例 5：设 X 是 E^n 的凸集，则 $id_X : X \to X$ 零伦。设 e 是 X 到 X 的一个常值映射，则 $id_X \simeq e$。对任何拓扑空间 Y 和连续映射 $f : X \to Y, f = f \circ id_X \simeq f \circ e$，而 $f \circ e$ 是常值映射，因此 f 是零伦的。

定义 2：设 $A \subset X$，$f, g \in C(X,Y)$，如果存在 f 到 g 的同伦 $H : X \times I \to Y$，使得当 $a \in A$ 时，$H(a,t) = f(a) = g(a)$（$\forall t \in I$），则称 f 与 g 相对与 A 同伦，记作 $f \simeq g \quad relA$；称 H 是 f 到 g 的相对与 A 的同伦，记作 $H : f \simeq g \ relA$（或 $f \overset{H}{\simeq} g \ relA$）。

同伦型

设 X, Y 为拓扑空间，若存在连续映射 $f : X \to Y$ 和连续映射 $g : Y \to X$ 使得 $f \circ g \simeq 1_Y, g \circ f \simeq 1_X$，则称 X 与 Y 有相同的伦型（或称 X 与 Y 同伦等价），记作 $X \simeq Y$。

例 6：$\mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^n \ (\forall m, n \in \mathbb{Z})$。