

粘合空间

一、几个常见曲面

拓扑学(代数拓扑、低维流形)的研究对象： \mathbb{R}^n 、 S^n 、 T^n 、*Möbius*带、平环、*Klein*瓶和射影平面等。

1. 平环

将矩形面块弯曲并将两侧边粘接，得到一截圆柱面。

等价关系： $(0,t) \sim (1,t)$ ， $\forall t \in [0,1]$ 。

2. *Möbius*带

先将矩形拧转180度，再将两侧边粘接。

等价关系： $(0,t) \sim (1,1-t)$ ， $\forall t \in [0,1]$ 。

3. 环面

将圆柱面每一直母线段两端粘合，两个截面以相同的方向粘接，得到环面。

等价关系： $(0,t) \sim (1,t)$ ， $(t,0) \sim (t,1)$ ， $\forall t \in [0,1]$ 。

4. *Klein*瓶

将圆柱面每一直母线段两端粘合，两个截面以相反的方向粘接，得到*Klein*瓶。

等价关系： $(0,t) \sim (1,t)$ ， $(t,0) \sim (1-t,1)$ ， $\forall t \in [0,1]$ 。

5. 射影平面

将圆盘 D^2 的边界 S^1 上每一对对径点粘合，得到射影平面。

二、商空间

用商空间的观点理解“粘合”的方法。以环面 T^2 为例：记 X 是用来粘制 T^2 的圆柱面。粘合过程规定了从 X 到 T^2 的连续映射 f 。记 \sim 是粘合决定的等价关系， $g: X/\sim \rightarrow T^2$ 相应的一一对应关系，于是 $f = g \circ p$ 。因为 f 连续，所以 g 连续。

由于 X 紧致和 p 连续， X/\sim 是紧致的，而 T^2 是Hausdorff空间，根据定理2.6，连续的一一对应 g 是同胚。

也就是说，在拓扑的意义上看， T^2 就是商空间 X/\sim 。

三、例子

1. 设 A 是拓扑空间 X 的一个子集（通常是闭子集），把 A 捏为一点（即等价关系是 $(A \times A) \cup \{(x, x) \mid x \in X - A\}$ ），得到的商空间记作 X/A 。

2. 拓扑锥

$$CX = X \times [0, 1] / X \times \{1\}$$

3. 几何锥

$X \subset \mathbb{R}^n$ ，取 $a \in \mathbb{R}^{n+1} - \mathbb{R}^n$ ，规定 \mathbb{R}^{n+1} 的子集

$$aX = \{ta + (1-t)x \mid t \in [0, 1], x \in X\}$$

4. 贴空间

$$X_1 \amalg X_2 \cong X_1 \times \{0\} \cup X_2 \times \{1\}$$

$$\tau = \{U \subset X_1 \amalg X_2 \mid U \cap X_i \in \tau_i, i=1, 2\}$$

称 $(X_1 \amalg X_2, \tau)$ 为 (X_1, τ_1) 与 (X_2, τ_2) 的拓扑和。记作 $X_1 \amalg X_2$ 。

设 X 与 Y 是两个拓扑空间， $A \subset X$ ， $f: A \rightarrow Y$ 连续，在 $X \amalg Y$ 中规定等价关系 \sim ，使得等价类为下面两种形式：

(1) $X - A$ 中的单个点；

(2) $\{y\} \cup f^{-1}(y), \forall y \in Y$ 。

称商空间 $X \amalg Y / \sim$ 为映射 f 的帖空间，记作 $Y \cup_f X$ 。

5. 映射柱

$$f: X \rightarrow Y, Y \amalg X \times [0, 1] / \sim, \sim: (x, 0) \sim f(x).$$

6. 映射锥

$$f: X \rightarrow Y, C_f = Y \amalg CX / \sim, \sim: [(x, 0)] \sim f(x).$$

7. Wedge product

$$X \vee Y = X \amalg Y /_{x_0 \sim y_0}$$

8. Smash product

$$X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y$$

作业：写出下列哪些空间是同胚的：

(1) 平面 E^2 (2) 球面 S^2

(3) 圆盘 $B^2 = \{(x, y) \in E^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

(4) 平环 $\{(x, y) \in E^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$

(5) 圆柱的侧面 $S^1 \times [0, 1]$ (6) B^2 / S^1

(7) 球面去掉一点 $S^2 - \{x\}$ (8) $B^2 \cup_i B^2$, $i: S^1 \rightarrow B^2$ 包含映射。

(9) $S^1 \times S^1$

(10) $S^1 \times [0,1] / S^1 \times \{1\}$

答案：1. (1) \cong (7)

2. (2) \cong (6) \cong (8)

3. (3) \cong (10)

4. (4) \cong (5)

5. (9)