连通性（一）

一、 连通空间

定义 1：设 A 和 B 是拓扑空间 X 中的两个子集，如果 $(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})=\varnothing$，则称子集 A 和 B 是隔离的。

平庸空间中任何两个非空子集都不是隔离的，而离散空间中任何两个非空子集都是隔离的。

定义 2：设 X 是拓扑空间，如果 X 中有两个非空的隔离子集 A 和 B，使得 $X=A\cup B$，则称 X 是一个不连通空间。否则，称 X 是连通空间。

定义 3：拓扑空间 X 称为**连通的**，如果它不能分解为两个非空不相交开集的并。

命题 1：定义 2 和定义 3 等价。

证：定义 2$\Rightarrow$定义 3

设 $X=A\cup B$，其中 A 和 B 都是开集，且 $A\cap B=\varnothing$，则由定义 2，有 $(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})\neq\varnothing$，不妨设 $A\cap\overline{B}\neq\varnothing$，而 $A\cap B=A\cap\overline{B}\neq\varnothing$，矛盾。

定义 3$\Rightarrow$定义 2

如果 X 中有两个非空的隔离子集 A 和 B，使得 $X=A\cup B$，则因 $(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})=\varnothing$，知 $A\cap\overline{B}=\varnothing$，$B\cap\overline{A}=\varnothing$ 于是 A 和 B 是两个非空不相交开集，矛盾。

命题 2：连通有以下几个等价定义：

（1） X 不能分解成两个非空不相交的闭集的并；

（2） X 无既开又闭的非空真子集；

（3） X 的既开又闭的非空子集只有$\varnothing$和X。

例 1：有理数集$\mathbb{Q}$作为$\mathbb{R}$的子空间不连通。（存在即开又闭的非空真子集）

例 2：$(\mathbb{R},\tau_f),(\mathbb{R},\tau_c)$都连通。

例 3：实数空间$\mathbb{R}$是连通空间。

命题 3：（连通性的连续不变性）

连通空间在连续映射下的像也是连通的。

推论：（连通性的同胚不变性）

若X连通，$X\cong Y$，则Y连通。

二、 简单应用

应用 1：S^1作为$\mathbb{R}^2$的子空间是连通空间。

证：作$f:\mathbb{R}\to S^1$，$x\mapsto e^{2\pi ix}$。

应用 2：$A\subset\mathbb{R}$，则A连通$\Leftrightarrow A$是区间。

应用 3：S^1与$[0,1]$不同胚。

应用 4：设$A\subseteq E^1$，不存在S^1到A上的连续满单射。

应用 5：S^1，E^1,E^2两两不同胚。

证：

因为S^1是紧空间，E^1, E^2不是紧空间，故S^1与E^1, E^2不同胚。

假如E^1与E^2同胚，则存在同胚$f: E^1 \to E^2$， 因此

$$f^{-1}: E^2 - \{f(0)\} \to E^1 - \{0\}$$

是同胚，又$E^2 - \{f(0)\}$连通，所以$E^1 - \{0\}$连通，这与

$$E^1 - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

不连通矛盾。所以E^1与E^2不同胚。故S^1， E^1, E^2两两不同胚。

应用 6： X连通， $f: X \to \mathbb{Z}$连续，则f是常值映射。