定理 2.6 设 $f:X\to Y$ 是连续的一一对应，其中 X 紧致，Y 是 $Hausdorff$ 空间，则 f 是同胚。

证 只要证 $f^{-1}:Y\to X$ 连续，只需证 f 是闭映射（$Lemma1$）。设 A 是 X 的闭集，则 A 是紧致的 $(Lemma3)$。故 $f(A)$ 是 Y 的紧致子集 $(Lemma4)$。所以 $f(A)$ 是 Y 的闭集（$Lemma6$）。

$Lemma1$ 如果 $f:X\to Y$ 是一一对应，则① f 是开映射 $\Leftrightarrow$ ② f 是闭映射 $\Leftrightarrow$ ③ f^{-1} 连续。

证 ① $\Rightarrow$ ②设 B 是 X 的闭集，则 B^C 是 X 的开集，于是 $f(B^C)$ 是 Y 的开集，而 $f:X\to Y$ 是一一对应，故 $f(B)=Y-f(B^C)$ 是 Y 的闭集。

② $\Rightarrow$ ③设 B 是 X 的闭集，则 $(f^{-1})^{-1}(B)=f(B)$ 是 Y 的闭集，故 f^{-1} 连续。

③ $\Rightarrow$ ①设 U 是 X 的开集，因 f^{-1} 连续，$(f^{-1})^{-1}(U)=f(U)$ 是 Y 的开集，故 f 是开映射。

$Lemma2$ A 是 X 的紧致子集 $\Leftrightarrow$ A 在 X 中的任一开覆盖有有限子覆盖。

证 $\Rightarrow$ 设 μ 是 A 在 X 中的开覆盖，则 $\mu_A=\{U\cap A|U\in\mu\}$ 是 A 的开覆盖。因为 A 紧致，所以 μ_A 有有限子覆盖 $\{U_1\cap A,U_2\cap A,\cdots,U_n\cap A\}$。则 $\{U_1,U_2,\cdots,U_n\}$ 是 μ 的有限子覆盖。

$\Leftarrow$ 设 ν 是 A 的开覆盖，则由子空间拓扑的定义，$\forall V\in\nu$，$\exists U$，使得 $V=U\cap A$。所有得到的 U 构成 A 在 X 中的开覆盖 μ。由条件，

μ有子覆盖$\{U_1,U_2,\cdots,U_n\}$。于是$\{U_1\cap A,U_2\cap A,\cdots,U_n\cap A\}$是$\nu$的有限子覆盖。故$A$是$X$的紧致子集。

*Lemma*3　紧致空间的闭子集紧致。

证 设X紧致，A是X的闭子集，μ是A在X中的开覆盖。故$\mu\cup A^C$是X的开覆盖。因X紧致，故$\mu\cup A^C$中存在有限子覆盖$\{U_1,U_2,\cdots,U_n,A^C\}$。于是$\{U_1,U_2,\cdots,U_n\}$是$\mu$的有限子覆盖。故$A$紧致。

*Lemma*4 紧致空间在连续映射下的像也紧致。

证 设X紧致，映射$f:X\to Y$连续，要证$f(X)$是Y的紧致子集。设μ是$f(X)$在Y中的开覆盖。则$\{f^{-1}(U)\,|\,U\in\mu\}$是$X$的开覆盖，有有限子覆盖$\{f^{-1}(U_1),f^{-1}(U_2),\cdots,f^{-1}(U_n)\}$，即$X=\bigcup_{i=1}^{n}f^{-1}(U_i)$。于是$f(X)=\bigcup_{i=1}^{n}f(f^{-1}(U_i))\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_i$。因此$\{U_1,U_2,\cdots,U_n\}$是$\mu$的有限子覆盖。根据*Lemma*3，$f(X)$是$Y$的紧致子集。

推论：紧致性具有同胚不变性。即X紧致，映射$f:X\to Y$是同胚映射，则Y紧致。

应用 1：$(0,1)$与$[0,1]$不同胚。

应用 2：S^1与$(0,1)$不同胚。（S^1与$[0,1]$不同胚。）

应用 3：$f:S^1\to\mathbb{R}$连续，则f不是满映射。（f也不是单映射）

*Lemma*5　若A是*Hausdorff*空间X的紧致子集，$x\notin A$，则x与A有不相交的邻域。

证 $\forall y\in A$，则 $x\neq y$。因 X 是 $Hausdorff$ 空间，故 $\exists x$ 和 y 的开邻域 U_y 和 V_y，有 $U_y\cap V_y=\varnothing$。而 $A\subset\bigcup\limits_{y\in A}V_y$，因 A 紧致，故有有限子覆盖 $\{V_{y_1},V_{y_1},\cdots,V_{y_n}\}$。令 $U=\bigcap\limits_{i=1}^{n}U_{y_i},V=\bigcup\limits_{i=1}^{n}V_{y_i}$，则 U 是 x 的邻域，V 是 A 的邻域。且

$$U\cap V=U\cap(\bigcup_{i=1}^{n}V_{y_i})=\bigcup_{i=1}^{n}(U\cap V_{y_i})\subset\bigcup_{i=1}^{n}(U_{y_i}\cap V_{y_i})=\varnothing$$，故

$U\cap V=\varnothing$，即 x 与 A 有不相交的邻域。

$Lemma6$　$Hausdorff$ 空间的紧致子集是闭集。

证 设 A 是 X 的闭子集，由 $Lemma5$ 知，$\overline{A}=A$，故 A 是闭集。