### 3.1 紧致与列紧

**定义 2.1** 拓扑空间称为**列紧的**，如果它的每个序列有收敛（即有极限点）的子序列。

**命题 2.9** 定义在列紧拓扑空间 $X$ 上的连续函数 $f:X\to E^1$ 有界，并达到最大、最小值。

**定义 2.2** 拓扑空间称为**紧致的**，如果它的每个开覆盖有有限的子覆盖。

### 3.2 紧致度量空间

**命题 2.10** 紧致 $C_1$ 空间是列紧的。

**命题 2.11** 对任给 $\delta\succ 0$，列紧度量空间存在有限的 $\delta-$网。

**定义 2.3** 设 $\mu$ 是列紧度量空间 $(X,d)$ 的一个开覆盖，$X\notin\mu$，称函数 $\varphi\mu$ 的最小值为 $\mu$ 的 $Lebesgue$ **数**，记作 $L(\mu)$。

**命题 2.12** $L(\mu)$ 是正数；并且当 $0\prec\delta\prec L(\mu)$ 时，$\forall x\in X$，$B(x,\delta)$ 必包含在 $\mu$ 的某个开集 $U$ 中。

**命题 2.13** 列紧度量空间是紧致的。

**定理 2.5** 若 $X$ 是度量空间，则 $X$ 列紧 $\Leftrightarrow X$ 紧致。

### 3.3 紧致空间的性质

**命题 2.14** $A$ 是 $X$ 的紧致子集 $\Leftrightarrow A$ 在 $X$ 中的任一开覆盖有有限子覆盖。

**命题 2.15** 紧致空间的闭子集紧致。

**命题 2.16** 紧致空间在连续影射下的像也紧致。

**推论** 定义在紧致空间上的连续函数有界，并且达到最大、最小值。

### 3.4 $Hausdorff$ 空间的紧致子集

**命题 2.17** 若 $A$ 是 $Hausdorff$ 空间 X 的紧致子集，$x\notin A$，则 $x$ 与 $A$ 有

不相交的邻域。

**推论**　$Hausdorff$ 空间的紧致子集是闭集。

**定理 2.6**　设 $f:X\to Y$ 是连续的一一对应，其中 $X$ 紧致，$Y$ 是 $Hausdorff$ 空间，则 $f$ 是同胚。

**命题 2.18**　$Hausdorff$ 空间的不相交紧致子集有不相交的邻域。

**命题 2.19**　紧致 $Hausdorff$ 空间满足 $T_3$，$T_4$ 公理。

### 3.5　乘积空间的紧致性

**引理**　设 $A$ 是 $X$ 的紧致子集，$y$ 是 $Y$ 的一点，在乘积空间 $X\times Y$ 中，$W$ 是 $A\times\{y\}$ 的邻域，则存在 $A$ 和 $y$ 的开邻域 $U$ 和 $V$，使得 $U\times V\subset W$。

**定理 2.7**　若 $X$ 与 $Y$ 都紧致，则 $X\times Y$ 也紧致。

### 3.6　局部紧致与仿紧

**定义 2.4**　拓扑空间 $X$ 称为**局部紧致的**，如果 $\forall x\in X$ 都有紧致的邻域。

**命题 2.20**　设 $X$ 是局部紧致的 $Hausdorff$ 空间，则

（1）$X$ 满足 $T_3$ 公理；

（2）$\forall x\in X$，$x$ 的紧致邻域构成它的邻域基；

（3）$X$ 的开子集也是局部紧致的。

**定义 2.5**　拓扑空间 $X$ 称为**仿紧的**，如果 $X$ 的每个开覆盖都有局部有限的开加细。

**例题**：拓扑空间 X 是紧空间当且仅当 X 中每个满足有限交性质的闭集族$\{F\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$有$\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}F\alpha\neq\Phi$.

证 必要性 设 X 的某个具有有限交性质的闭集族$\{F\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$满足

$\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} F\alpha=\Phi$ . 令 $U_\alpha$ =X− $F_\alpha$，则$\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$是 X 的一个开覆盖. 因 X 是紧的，故存在Γ的有限子集 B，使$\bigcup\limits_{\alpha\in B} U\alpha=\bigcup\limits_{\alpha\in B}(X-F\alpha)$=X−$\bigcap\limits_{\alpha\in B} F\alpha$=X. 因此$\bigcap\limits_{\alpha\in B} F\alpha$=Φ，这与$\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$满足有限交性质矛盾，所以$\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} F\alpha\neq\Phi$.

充分性 设$\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$是 X 的开覆盖，若对Γ的每个有限子集 B，有 X−$\bigcup\limits_{\alpha\in B} U\alpha=\bigcap\limits_{\alpha\in B}(X-U\alpha)\neq\Phi$，令 $F_\alpha$ =X − $U_\alpha$，则$\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$是 X 的具有有限交性质的闭集族. 由条件知$\Phi\neq\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} F\alpha=\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}(X-U\alpha)$=X−$\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} U\alpha$，这与 X$\subset\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} U\alpha$矛盾，所以 X 是紧空间.

**作业：P59　Ex4、　Ex8、　Ex18**