1.3 可数公理

邻域系：设 $x \in X$ ，把 X的所有邻域的集合称为 x 的**邻域系**，记作 $N(x)$。

邻域基：$N(x)$ 的一个子集 Γ 称为 X的一个**邻域基，**如果 X的每个邻域至少包含 Γ 中的一个成员。

EX1. $N(x)$ 本身为 X的一个邻域基。X的所有开邻域构成 X的一个邻域基。

EX2. 若 Γ 是拓扑空间 X 的拓扑基，则 $\Omega = \{B \in \Gamma \mid x \in B\}$ 是 X的一个邻域基。

EX3. 对于度量空间 (X,d)， $x \in X$ ，$\{B(x,\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ 是 X的一个邻域基。$\{B(x,q) \mid q$ 为正有理数$\}$ 是 X的一个邻域基。$\{B(x,\frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ 也是 X的一个邻域基。

C_1 **公理**：任意一点都有可数的邻域基。

EX4. 对于度量空间 (X,d)，$\{B(x,q) \mid q$ 为正有理数$\}$ 是 X的一个可数邻域基。$\{B(x,\frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ 也是 X的一个可数邻域基。故度量空间满足 C_1 公理。

EX5. $(\mathbb{R},\tau_f)$ 不满足 C_1 公理。

Pro.1 如果 X 在 x 处有可数邻域基，则 x 有可数邻域基 $\{V_n\}$，使得 $m > n$ 时，$V_m \subset V_n$。

Pro.2 若 X 是 C_1 空间， $A \subset X, x \in \overline{A}$，则 A 中存在收敛到 x 的序列。

Col. 若 X 是 C_1 空间， $x_0 \in X$ ，映射 $f: X \to Y$ 满足：当 $x_n \to x_0$ 时，$f(x_n) \to f(x_0)$，则 f 在 x_0 连续。

C_2 **公理：**有可数拓扑基。

EX6. 由离散度量诱导出的拓扑空间不是 C_2 空间。

C_2 空间 $\Rightarrow C_1$ 空间，事实上，若 X 有可数拓扑基 Γ，则任意点 x 有可数的邻域基 $\{B \in \Gamma \mid x \in B\}$。

C_2 空间是可分空间。

Pro.3 可分度量空间是 C_2 空间。

EX7. *Hilbert* 空间 E^{ϖ} 是度量空间，规定内积

$(\{x_n\},\{y_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$，它决定度量 ρ：

$$\rho(\{x_n\},\{y_n\}) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2}\text{。}$$

Th2.1 ($Lindel\ddot{o}f$ **定理**) 若拓扑空间 X 满足 C_2，T_3 公理，则它也满足 T_4 公理。

1.4 拓扑空间的遗传性与可乘性

一种拓扑性质称为有**遗传性**的，如果一个拓扑空间具有它时，子空间也具有它；一种拓扑性质称为有**可乘性**的，如果两个拓扑空间具有它时，它们的乘积空间也具有它。

EX8. 可分性是可乘的，但不具有遗传性。

T_1, T_2, T_3 公理都有遗传性和可乘性。

T_4 公理没有遗传性和可乘性。

C_1 公理和 C_2 公理都有遗传性和可乘性。

例题：

证明 X 为 Hausdorff 空间**当且仅当** $\Delta(X) = \{(x,x) \mid x \in X\}$ 是乘积空

间 $X \times X$ 的闭集。

证明：（必要性）要证 $\Delta(X)$ 为闭集，只要证它的余集是开集。

$\forall (x, y) \in (\Delta(X))^C$，$(x, y)$为内点。由$(x, y) \in (\Delta(X))^C$知，$x \neq y$，因 X 为 Hausdorff 空间知，存在$x$的开邻域$U$，$y$的开邻域$V$，使得$U \bigcap V = \Phi$，于是$(x, y) \in U \times V \subset (\Delta(X))^C$，所以$(x, y)$为内点，这就证明了$\Delta(X)$为闭集。

（充分性）对 $\forall x, y \in X, x \neq y$，由 $\Delta(X)$ 的定义知，$(x, y) \notin \Delta(X)$，即$(x, y) \in (\Delta(X))^C$，由$\Delta(X)$为闭集知：$\Delta(X)^C$为开集，于是存在开集 U, V 使得 $(x, y) \in U \times V \subset (\Delta(X))^C$，由 $U \times V \subset (\Delta(X))^C$知，$U, V$为$x, y$的不相交的邻域，这就证明了 X 为 Hausdorff 空间。

作业：

P.43　Ex 7　Ex 16　Ex 18