第二章　几个重要的拓扑性质
第一节 分离公理与可数公理

T_0 **空间**：设 X 是拓扑空间，如果 X 中的任意两个不相同的点中必有一个点有一个开邻域不包含另一点，则称 X 是一个 T_0 **空间。**

EX1. 不是 T_0 空间的例子：包含多余两个点的平凡空间。

1.1 T_1 公理和 T_2 公理

T_1 **公理**：任意两个不同点 x 与 y，x 有邻域不含 y，y 有邻域不含 x。

T_2 **公理**：任意两个不同点有不相交的邻域。

显然有 T_2 公理 $\Rightarrow$ T_1 公理 $\Rightarrow$ T_0 公理，但反之不成立。反例如下：

EX2. $X=\{a,b,c\}$, $\tau=\{\varnothing, X,\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\}$，则 X 满足 T_0 公理但不满足 T_1 公理。

EX3. $(\mathbb{R},\tau_f)$ 满足 T_1 公理，但 x 与 y 的邻域一定相交，故它不满足 T_2 公理。

Pro1. X 满足 T_1 公理 $\Leftrightarrow$ X 的有限子集是闭集 $\Leftrightarrow$ X 的单点集是闭集。

满足 T_2 公理的空间称为 *Hausdorff* 空间。

Pro2. *Hausdorff* 空间中，一个序列不会收敛到两个以上的点。

1.2 T_3 公理和 T_4 公理

T_3 **公理**：任意一点与不含它的任一闭集有不相交的邻域。

Pro3. X 满足 T_0 公理，又满足 T_3 公理，则 X 满足 T_2 公理。

T_4 **公理**：任意两个不相交的闭集有不相交的邻域。

当 X 满足 T_1 **公理**时，T_4 公理 $\Rightarrow$ T_3 公理 $\Rightarrow$ T_2 公理。

当 X 不满足 T_1 **公理**时，上述关系不成立。

例如：取第一章第一节的习题三中的拓扑，$(\mathbb{R},\tau)$ 满足 T_4 公理，但它不满足 T_3 公理、T_2 公理、T_1 公理。

Pro4. 度量空间满足 T_i 公理($i=1,2,3,4$)。

Pro5. （1）满足 T_3 公理 $\Leftrightarrow$ 任意点 x 和它的开邻域 W，存在 x 的开邻域 U，使得 $\overline{U}\subset W$。

（2）满足 T_4 公理 $\Leftrightarrow$ 任意闭集 A 和它的开邻域 W，有 A 的开邻域 U，使得 $\overline{U}\subset W$。

作业：P43　Ex2　Ex6