**3．3 拓扑基**

**想法**：度量空间中的开集是若干个互不相交的球形邻域的并。度量拓扑由球形邻域生成；乘积拓扑由一个特定的子集族生成。**拓扑基**就是从上述方法中抽象出来的。

**Def 1.** 集合 $X$ 的子集族 $\Gamma$ 为**集合 $X$ 的拓扑基**，如果 $\overline{\Gamma}$ 是 $X$ 的一个拓扑；称拓扑空间 $(X,\tau)$ 的子集族 $\Gamma$ 为这个**拓扑空间的拓扑基**，如果 $\overline{\Gamma}=\tau$。

**Pro1.** $\Gamma$ 是集合 $X$ 的拓扑基的充分必要条件是：

（1）$\bigcup\limits_{B\in\Gamma} B = X$；

（2）若 $B_1, B_2\in\Gamma$，则 $B_1\cap B_2\in\overline{\Gamma}$（即 $\forall x\in B_1\cap B_2$，存在 $B\in\Gamma$，使得 $x\in B\subset B_1\cap B_2$）。

**Ex1.** 规定 $\mathbb{R}$ 的子集族 $\Gamma=\{[a,b)\,|\,a<b\}$，则 $\Gamma$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个拓扑基。（$\overline{\Gamma}$ 称**实数下限拓扑**）

**注 1**：规定 $\mathbb{R}$ 的子集族 $\Gamma_1=\{[a,b)\,|\,a<b, b\text{是有理数}\}$，则 $\Gamma_1$ 也是 $\mathbb{R}$ 的一个拓扑基。

**注 2**：规定 $\mathbb{R}$ 的子集族 $\Gamma_2=\{[a,b)\,|\,a<b, a,b\text{是有理数}\}$，则 $\Gamma_2$ 也是 $\mathbb{R}$ 的一个拓扑基。

**注 3**：$\overline{\Gamma}=\overline{\Gamma_1}$，但 $\overline{\Gamma}\neq\overline{\Gamma_2}$。

设 $\tau$ 是实数下限拓扑，$\tau_2$ 是由注 2 的拓扑基生成的拓扑。则 $[\sqrt{2},3)\in\tau$ 但是 $[\sqrt{2},3)\notin\tau_2$。

事实上，若 $[\sqrt{2},3)\in\tau_2$ 则 $[\sqrt{2},3)=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}[a_\alpha,b_\alpha),\quad (a_\alpha,b_\alpha\in\mathbb{Q})$ 故存在一个 $\alpha_0\in\Lambda, \sqrt{2}\in[a_{\alpha_0},b_{\alpha_0})$，于是 $a_{\alpha_0}\le\sqrt{2}$。若 $a_{\alpha_0}<\sqrt{2}$，则 $[\sqrt{2},3)\neq\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}[a_\alpha,b_\alpha),\quad (a_\alpha,b_\alpha\in\mathbb{Q})$，若 $a_{\alpha_0}=\sqrt{2}$，这与 $a_{\alpha_0}$ 是有理数矛盾。

**Pro2.** $\Gamma$ 是拓扑空间 $(X,\tau)$ $X$ 的拓扑基的充分必要条件是：

（1）$\Gamma\subset\tau$；

（2） $\tau\subset\overline{\Gamma}$。

**Ex2.** 若 $\Gamma$ 是拓扑空间 $(X,\tau)$ 的拓扑基， $A\subset X$ 。规定 $\Gamma_A=\{A\bigcap B\,|\,B\in\Gamma\}$。则 $\Gamma_A$ 是 $(A,\tau_A)$ 的拓扑基。

**Ex3.** 设 $\mathbb{R}$ 的子集族 $\Gamma=\{(a,b)\,|\,a<b,a,b$ 为有理数$\}$，则 $\Gamma$ 是 $E^1$ 的拓扑基。

**补充知识：拓扑空间的子基** （可参考熊金城《点集拓扑讲义》）

**Def 2.** 设 $(X,\tau)$ 是一个拓扑空间，$\varphi$ 是 $\tau$ 的一个子族。如果 $\varphi$ 的所有非空有限子族的交构成的集族，即

$$\Gamma=\{S_1\bigcap S_2\bigcap\cdots\bigcap S_n\,|\,S_i\in\varphi,i=1,2,\cdots,n;n\in\mathbb{Z}+\}$$

是拓扑空间 $\Gamma$ 的一个基，则称集族 $\varphi$ 是拓扑 $\tau$ 的**一个子基**。或称集族 $\varphi$ 是拓扑空间 $X$ 的**一个子基**。

**Ex4.** 实数空间 $\mathbb{R}$ 的一个子基：$\varphi=\{(a,+\infty)\,|\,a\in\mathbb{R}\}\bigcup\{(-\infty,b)\,|\,b\in\mathbb{R}\}$。

**作业：**

1．定义 $\rho_1,\rho_2:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$，使得对于

$\forall x=(x_1,x_2),y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$，有

$\rho_1(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\},\ \rho_2(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$。

证明：（1） $\rho_1,\rho_2$ 都是 $\mathbb{R}^2$ 上的度量。

（2） $\rho_1,\rho_2$ 以及 $\mathbb{R}^2$ 上的通常度量 $\rho$ 诱导出的拓扑是相同的。

**提示：**利用 $\rho_1(x,y)\le\rho(x,y)\le\rho_2(x,y)\le 2\rho_1(x,y)$。

2．设 $X$ 是度量空间，证明：如果 $X$ 有一个基只含有有限个元素，则 $X$ 必为只含有有限多个点的离散空间。