# 第四节　张量

## 1．例子

**例 1**：$n$维向量空间。

**例 2**：向量空间$V$的对偶空间$V^*$。

若映射$\alpha:V\to\mathbb{R}$满足条件：

$$\begin{cases}\alpha(v_1+v_2)=\alpha(v_1)+\alpha(v_2), & \forall v_1,v_2\in V;\\ \alpha(\lambda v)=\lambda\alpha(v), & \forall v\in V,\lambda\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

则称$\alpha$是$V$上的线性函数。向量空间$V$上的全体线性函数的集合记做$V^*$。函数的加法和数乘法在集合$V^*$中是封闭的，从而使$V^*$成为向量空间，称为$V$的对偶空间。

函数$\alpha:V\to\mathbb{R}$是由它在基底向量$\delta_i$上的值唯一确定的。设

$$\alpha_i=\alpha(\delta_i),$$

则对任意$v=\sum_{i=1}^{n}v^i\delta_i\in V$有

$$\alpha(v)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v^i。$$

考虑线性函数$\delta^j:V\to\mathbb{R}$使得

$$\delta^j(\delta_i)=\delta_i^j=\begin{cases}1, i=j,\\ 0, i\neq j,\end{cases}$$

则

$$\delta^j(v)=v^j。$$

## 2．$r$重线性函数

**定义 1** 设$V_1,\cdots,V_r$是$r$个向量空间，若$r$元函数$f:V_1\times\cdots\times V_r\to\mathbb{R}$对每一个自变量都是线性的，即对于任意的指标$\alpha$，$1\le\alpha\le r$，及向量$u_\alpha,w_\alpha\in V_\alpha$，有

$$f(\cdots,u_\alpha+w_\alpha,\cdots)=f(\cdots,u_\alpha,\cdots)+f(\cdots,w_\alpha,\cdots)\text{，}$$

$$f(\cdots,\lambda u_\alpha,\cdots)=\lambda\cdot f(\cdots,u_\alpha,\cdots)\text{，}$$

其中$\lambda\in\mathbb{R}$，则称 $f$ 是$V_1\times\cdots\times V_r$ 上的$r$ 重线性函数。

$V_1\times\cdots\times V_r$ 上的$r$ 重线性函数的集合记为$\varphi(V_1,\cdots,V_r;\mathbb{R})$。特别地，$\varphi(V;\mathbb{R})=V^*$。

**例 3**：向量空间$V$ 到自身的线性变换。

### 3．$(p,q)$ 型张量

**定义 2** 设$V$ 是$n$ 维向量空间，$V^*$ 是它的对偶空间，$(p,q)$ 是一对非负整数。所谓 $V$ 上的一个 $(p,q)$ 型张量是指 $\underbrace{V^*\times\cdots\times V^*}_{p\text{个}}\times\underbrace{V\times\cdots\times V}_{q\text{个}}$ 上的一个$p+q$ 重线性函数，其中$p$ 为反变阶数，$q$ 为协变阶数。全体$V$ 上的$(p,q)$ 型张量的集合记作$V_q^p$，或

$$\varphi(V^*,\cdots,V^*,V,\cdots,V;\mathbb{R})\text{。}$$

特别地，$(1,0)$ 型张量就是向量空间$V$ 中的元素；$(0,1)$ 型张量就是对偶空间$V^*$ 中的元素，即$V$ 上的线性函数。为方便起见，把实数称为$(0,0)$ 型张量或数量。

### 4．张量积

**定义 3** 设$V,W$ 是两个向量空间，$\alpha\in V^*,\beta\in W^*$，则$\alpha$ 和$\beta$ 的张量积$\alpha\otimes\beta$ 是积空间$V\times W$ 上的2 重线性函数，定义为

$$\alpha\otimes\beta(v,w)=\alpha(v)\cdot\beta(w),\quad\forall v\in V,w\in W\text{。}$$

一般地，设$V_1,\cdots,V_p,W_1,\cdots,W_q$是$p+q$个向量空间，

$\alpha\in\varphi(V_1,\cdots,V_p;\mathbb{R})$，$\beta\in\varphi(W_1,\cdots,W_q;\mathbb{R})$，则张量积$\alpha\otimes\beta$是

$V_1\times\cdots\times V_p\times W_1\times\cdots\times W_q$上的$p+q$重线性函数，定义为

$$\begin{aligned}&\alpha\otimes\beta(v_1,\cdots,v_p,w_1,\cdots,w_q)\\&=\alpha(v_1,\cdots,v_p)\cdot\beta(w_1,\cdots,w_q)\end{aligned}$$

其中$v_r\in V_r,1\le r\le p,w_s\in W_s,1\le s\le q$。

**定理 1** 张量积运算$\otimes$遵循分配律和结合律，即：

(1) 若$\alpha_1,\alpha_2\in\varphi(V_1,\cdots,V_p;\mathbb{R}),\beta\in\varphi(W_1,\cdots,W_q;\mathbb{R})$，则

$$(\alpha_1+\alpha_2)\otimes\beta=\alpha_1\otimes\beta+\alpha_2\otimes\beta\text{，}$$

$$\beta\otimes(\alpha_1+\alpha_2)=\beta\otimes\alpha_1+\beta\otimes\alpha_2\text{；}$$

(2) 若

$\alpha\in\varphi(V_1,\cdots,V_r;\mathbb{R}),\beta\in\varphi(W_1,\cdots,W_s;\mathbb{R}),\gamma\in\varphi(Z_1,\cdots,Z_l;\mathbb{R})$则

$$(\alpha\otimes\beta)\otimes\gamma=\alpha\otimes(\beta\otimes\gamma)\text{。}$$

因此，$\alpha\otimes\beta\otimes\gamma$是有意义的。

**定理 2** 在向量空间$V$中取定基底$\{\delta_i\}$，在对偶空间$V^*$中取对偶基底$\{\delta^i\}$，则

$$\delta_{i_1}\otimes\cdots\otimes\delta_{i_p}\otimes\delta^{j_1}\otimes\delta^{j_q},1\le i_1,\cdots,i_p,j_1,\cdots,j_q\le n$$

给出$n^{p+q}$个$(p,q)$型张量构成空间$V_q^p$的基底，因此

$\dim V_q^p=n^{p+q}$。

**定义 4** 设$V,W$是两个向量空间，由形如张量积$v\otimes w(v\in V,w\in W)$的元素所生成的向量空间称为$V$和$W$的张量积，记作$V\otimes W$。

**定理 3** 设$V,W$分别是$m$维和$n$维向量空间，则它们的向量积是$m\cdot n$维向量空间。

5．缩并

**定义 5** 任取两个指标$r,s$，使得$1\le r\le p, 1\le s\le q$，则从任意一个$(p,q)$型张量$\xi\in V_q^p$出发可构造$(p-1,q-1)$型张量$C_s^r(\xi)$如下：

$$(C_s^r(\xi))(\alpha^1,\cdots,\alpha^{p-1},v_1,\cdots,v_{q-1})$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\xi(\alpha^1,\cdots,\alpha^{r-1},\delta^i,\alpha^r,\cdots,\alpha^{p-1},v_1,\cdots,v_{s-1},\delta_i,v_s,\cdots,v_{q-1})$$ 。

其中$\{\delta_i\}$是$V$的一个基底，$\{\delta^i\}$是它的对偶基底。映射

$C_s^r:V_q^p\to V_{q-1}^{p-1}$称为缩并。

**引理 4** $g^{ij}$遵循 2 阶反变张量分量的变换规律。

**定理 5** 设$(V,g)$是$n$维欧氏向量空间，则有自然同构$\eta:V\to V^*$，它把$v\in V$映为$V$上的线性函数

$$\eta(v)=g(v,\cdot)。$$

**作业： P49 Ex22、Ex23**