第二节　光滑映射

1．可微函数

定义 1 设 f 是 E^n 上的一个实函数。若在 E^n 的一个直角坐标系 $\{O;\delta_i\}$ 下所对应的 n 元实函数 $F(\lambda^1,\cdots,\lambda^n)$ 在一点 $(\lambda^1,\cdots,\lambda^n)$ 是连续的，则称 f 在相应的点 P 是连续的；若 $F(\lambda^1,\cdots,\lambda^n)$ 在点 $(\lambda^1,\cdots,\lambda^n)$ 有任意的 r 次连续的偏导数，则称 f 在相应的点是 r 次连续可微的。特别地，如果 $F(\lambda^1,\cdots,\lambda^n)$ 在点 $(\lambda^1,\cdots,\lambda^n)$ 有任意次连续的偏导数，则称 f 在 P 点是光滑的。在 E^n 上处处是 r 次连续可微的（光滑的）函数称为 E^n 上的 r **次连续可微（光滑）函数**。

E^n 上全体 r 次连续可微函数的集合记为 $C^r(E^n)$，全体光滑函数的集合记为 $C^\infty(E^n)$。我们把在一点 $P\in E^n$ 是光滑的函数的集合记为 C_P^∞。

映射 $f:\mathbb{R}\to E^n$ 在 E^n 中取定直角坐标系 $\{O;\delta_i\}$ 之下表示成 n 个实函数 $x^1(t),\cdots,x^n(t)$，即

$$\overrightarrow{Of(t)}=\sum_{i=1}^{n}x^i(t)\delta_i\text{，}\quad \forall t\in\mathbb{R}\text{。}$$

定义 2 设 $f:\mathbb{R}\to E^n$ 是从 $\mathbb{R}$ 到 E^n 的一个映射。若在直角坐标系 $\{O;\delta_i\}$ 下，f 所对应的坐标函数 $x^i(t)$ $(1\le i\le n)$ 是连续的，则称 f 是连续的；若 $x^i(t)$ $(1\le i\le n)$ 是 r 次连续可微的，则称 f 是 r 次连续可微的。特别地，如果 $x^i(t)$ $(1\le i\le n)$ 是任意次连续可微的，则称 f 是光滑的。

2．切向量

光滑曲线：光滑映射 $f:(a,b)\to E^n$ 称为 E^n 中的一条光滑曲线。

令

$$f'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{Of(t_0+\Delta t)}-\overrightarrow{Of(t_0)}}{\Delta t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{dx^i}{dt}(t_0)\delta_i$$

称为曲线 f 在点 t_0 处的切向量。

另外一种等价定义：

设 $f:(a,b)\to E^n$ 是欧氏空间 E^n 中一条光滑曲线，

$P=f(t_0),t_0\in(a,b)$。任取 $g\in C_P^\infty$，则 $g\circ f$ 是定义在点 t_0 的邻域内光滑函数。根据复合函数求导法则，我们有

$$\begin{aligned}\frac{d(g\circ f)}{dt}\Big|_{t=t_0}&=\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}\ g(x^1(t),\cdots,x^n(t))\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x^i}\Big|_{f(t_0)}\frac{dx^i(t_0)}{dt},\end{aligned}$$

其中 $g(x^1,\cdots,x^n)$ 是 g 在给定的直角坐标系 $\{O;\delta_i\}$ 下对应的 n 元实函数。令

$$\nabla g(f(t_0))=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x^i}\Big|_{f(t_0)}\delta_i,$$

则 $\nabla g(f(t_0))$ 是在点 $f(t_0)$ 处的一个切向量，与单位正交标 $\{O;\delta_i\}$ 的选取无关。

我们称 $\nabla g(f(t_0))$ 为光滑函数 g 在点 $f(t_0)$ 处的梯度向量。这样

$$\frac{d(g\circ f)}{dt}\Big|_{t=t_0}=<\nabla g(f(t_0)),v>$$

其中 $v=\sum_{i=1}^{n}\frac{dx^i(t_0)}{dt}\delta_i$ 是曲线 f 在 $t=t_0$ 处的切向量。

表达式 $<\nabla g(f(t_0)),v>$ 称为函数 $g\in C_P^\infty$ 在点 $P=f(t_0)$ 处沿向量 v 的方向导数，记作 $D_v g$。于是，在点 P 处的任意一个切向量 v 决定了一个算子 $D_v:C_P^\infty\to\mathbb{R}$，定义为

$$D_v g=<\nabla g(P),v>,\quad \forall g\in C_P^\infty,$$

它满足下列求导运算的法则：

(1) 若 $g,h\in C_P^\infty,\lambda\in\mathbb{R}$，则

$$D_v(g+\lambda h)=D_v g+\lambda\cdot D_v h,$$

(2) 若 $g,h\in C_P^\infty$，则

$$D_v(g\cdot h)=g(P)\cdot D_v h+h(P)\cdot D_v g\text{。}$$

反过来，若 $\sigma:C_P^\infty\to\mathbb{R}$ 是满足上述条件(1).(2)的映射，则必有在点 P 处的切向量 v，使得 $\sigma=D_v$，并且这样的 v 是唯一的。

引理 2.1 若 $\sigma:C_P^\infty\to\mathbb{R}$ 是满足上述条件(1).(2)的映射，则 σ 在常值函数上的作用是 0。

引理 2.2 在 n 维欧氏空间 E^n 中取定直角坐标系 $\{O;\delta_i\}$。设 $g\in C_P^\infty$，且点 P 的坐标为 $(x_0^1,\cdots,x_0^n)$，则 g 可以表示为

$$g(x^1,\cdots,x^n)=g(x_0^1,\cdots,x_0^n)+\sum_{i=1}^n(x^i-x_0^i)h_i(x^1,\cdots,x^n),$$

其中 $h_i\in C_P^\infty$，并且

$$h_i(x_0^1,\cdots,x_0^n)=\frac{\partial g}{\partial x^i}(x_0^1,\cdots,x_0^n).$$

3．光滑映射

定义 3 设有映射 $f:E^m\to E^n$，如果在空间 E^m,E^n 中分别取定直角坐标系后，表示映射 f 的 n 个 m 元实函数是 r 次连续可微的，则称 f 是 r 次连续可微。任意次连续可微的映射 $f:E^m\to E^n$ 称为从欧氏空间 E^m 到 E^n 的**光滑映射**。

Jacobi 矩阵

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}$$

在点 $(x_0^1, \cdots, x_0^m)$ 的秩称为映射 f 在点 $(x_0^1, \cdots, x_0^m)$ 的秩。

作业：P.48 Ex9