

一种基于边界特征的简易非线性二阶离散跟踪微分器的设计

谢云德^{1,2}, 李晓龙², 余龙华^{1,2}, 窦峰山², 戴春辉²

(1. 北京控股磁悬浮技术发展有限公司, 北京 100124;

2. 国防科技大学 机电工程与自动化学院, 长沙 410073)

摘要: 用等时区方法确定最速离散二阶系统的线性区域的边界, 以开关曲线和边界线来界定控制量的线性变化, 区分可达区和线性区, 得到最速系统综合函数, 并依此构造线性函数形式的跟踪微分器. 仿真结果表明, 所提出的跟踪微分器具有快速跟踪输入信号、无颤振、无超调的特点, 能得到较好的微分信号, 算法简洁实用.

关键词: 跟踪微分器; 离散系统; 线性边界; 最速控制; 综合函数; 可达区

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Design of simple discrete second-order nonlinear tracking-differentiator based on boundary characteristic curves

XIE Yun-de^{1,2}, LI Xiao-long², SHE Long-hua^{1,2}, DOU Feng-shan², DAI Chun-hui²

(1. Beijing Enterprises Holding Maglev Technology Development Company Limited, Beijing 100124, China;

2. College of Mechatronics Engineering and Automation, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China. Correspondent: XIE Yun-de, E-mail: alan9999lion@126.com)

Abstract: The boundary characteristic curve of linear regions with the second-order discrete time optimal control is presented by means of the isochronous region. Then the control variable is linearized, which is decided by the switching curve and the boundary curve, and the reachable region and the boundary region are given. The linear synthetic functions are obtained. Based on this function, the discrete form of tracking-differentiator is constructed. Numerical simulation shows that, this discrete form of tracking-differentiator can quickly track an input signal without overshooting and chattering, and can acquire an excellent differential signal. It is simple and practical.

Key words: tracking-differentiator; discrete time systems; linear boundary; time optimal control; synthetic function; reachable region

0 引言

对信号进行滤波以及从含噪声的信号中提取微分信号, 是控制理论以及工程实践中必然面临的复杂问题, 处理不当可能会产生毛刺和淹没现象, 滤波相位严重滞后, 微分品质低劣, 导致控制系统振荡或不稳定. 为了简化控制系统的设计, 提高控制系统性能, 用适当方法获取有效的微分是一种重要的手段, 对此, 韩京清等^[1]提出了跟踪微分器的思想. 随后, 韩京清等^[2]利用二次时间最速系统提出了一种离散形式的跟踪微分器, 具有快速跟踪输入信号、无超调、无颤振的特点, 能得到较好的微分信号. 人们相继对跟踪

微分器进行了研究^[3-11], 并应用于自抗扰控制、安排过渡过程、设计非线性PID控制器、对参数进行估计以及恰当提取信息等. 文献[6]提出了一种非时间最速系统的全程快速非线性跟踪微分器, 并分析了其稳定性. 文献[8]利用二次时间最速系统提出了一种高精度快速跟踪微分器, 具有跟踪精度高、能从含噪声的信号中有效提取微分信号的特点, 并应用于磁悬浮控制中的信号检测^[9-13]. 实际控制系统一般是数字控制系统, 采用离散化的形式, 跟踪微分器中的开关函数所需要的线性区的大小及范围将影响跟踪性能及微分品质. 文献[2]用等时区方法确定了最速控制取

收稿日期: 2013-03-04; 修回日期: 2013-08-16.

基金项目: 国家自然科学基金项目(11202230, 60974128, 11302252).

作者简介: 谢云德(1965—), 男, 副教授, 博士, 从事非线性控制理论及应用、磁悬浮控制技术等研究; 李晓龙(1979—), 男, 讲师, 博士, 从事磁悬浮控制技术的研究.

非极值的线性区, 给出了控制综合函数的一般形式, 这种函数中包含根号的运算, 对于控制算法具有一定的复杂性.

针对上述问题, 本文利用等时区方法寻找使最速控制取非极值的线性区的边界特征点, 以及按线性规律达到原点的可能区域, 并利用特征点及可达区域特征, 构造一个简单的线性函数, 从而避开复杂的开平方根的非线性运算. 数值仿真结果表明, 这种简化形式的跟踪微分器与文献 [2] 提出的跟踪微分器同样具有快速跟踪输入信号、无超调、无颤振、能有效提取微分信号的特点, 形式上更加简单.

1 二阶离散系统控制综合函数

对于连续双积分串联最速系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, |u| \leq r, \end{cases} \quad (1)$$

其离散化的形式为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} u(k),$$

$$|u(k)| \leq r, k = 0, 1, 2, \dots,$$

可以表示为

$$X(k+1) = AX(k) + Bu(k). \quad (2)$$

方程 (2) 以 $X(0)$ 为初值的解的一般表达式为

$$X(k+1) = A^{k+1}X(0) + \sum_{i=0}^k A^{k-i}Bu(i). \quad (3)$$

若系统经过 $k+1$ 步, 最终到达相平面上的原点, 此时 $X(k+1) = 0$, 则由式 (3) 可以反推出起始点必须满足的条件为

$$X(0) = \sum_{i=0}^k \begin{bmatrix} (i+1)h^2 \\ -h \end{bmatrix} u(i). \quad (4)$$

由最优控制理论可知, 最速系统 (1) 的控制策略是一种开关控制, 在连续系统的情况下, 开关曲线的函数为

$$\Gamma(x_1, x_2) = x_1 + \frac{x_2|x_2|}{2r}.$$

控制综合函数为 $u(x_1, x_2, r) = -r\text{sgn}(\Gamma(x_1, x_2))$, 相平面上任何一点沿最优轨线最多经过一次切换即可到达原点. 相平面 Σ 上任意一点 $M(x_1, x_2)$ 到达原点所需要的时间 $T(x_1, x_2)$ 可以表示为

$$T(x_1, x_2) = \frac{x_2}{r}s + \frac{2}{\sqrt{r}}\sqrt{\frac{x_2^2}{2r} + sx_1}, \quad (5)$$

其中

$$s = \text{sgn}\left(x_1 + \frac{x_2|x_2|}{2r}\right).$$

对于连续最速时间系统 (1), 选取总时间 $T(x_1, x_2)$ 作为 Lyapunov 函数. 由于

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = \frac{s}{\sqrt{r}\sqrt{(x_2^2/2r) + sx_1}},$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = \frac{s}{r} + \frac{x_2/r}{\sqrt{r}\sqrt{(x_2^2/2r) + sx_1}},$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial T}{\partial x_2}\dot{x}_2 = -1,$$

从而有 $T(x_1(t), x_2(t)) = -t + T(x_1(0), x_2(0))$. 所有最速轨线都将在有限时间内到达原点.

当相平面上的点位于开关曲线上方时, 控制量取极值 $u = -r$; 位于开关曲线下方时, 控制量取极值 $u = +r$. 到达开关曲线时, 控制量切换符号. 在连续系统的情况下, 控制量的切换是瞬间完成的, 不存在变号需要的变化过程. 然而在离散情况下, 变号的过程将发生在一个采样步长 h 内, 可以用一个线性区 Ω 来表示, 控制量在该区间内呈线性变化, 从某一个正数 (负数) 变化到另一个负数 (正数). 显然, 这个线性变化的区间一定在开关曲线附近. 为此, 需要寻找线性变化区域的边界和相关控制特征线. 另外, 需要考虑两步内可以到达的区域, 记为 Ω_r .

边界线有两条: 其一是开关曲线, 这条线上所有的控制量 $u = +r$ 或者 $u = -r$ 均到达原点; 另一条线是控制量, 首先取 $u = +r$, 然后全部取 $u = -r$, 或者首先取 $u = -r$, 然后全部取 $u = +r$, 最后到达原点的初始点的全体构成了轨迹线. 不妨假设 $\{a_{+k}\}$ 、 $\{a_{-k}\}$ 分别为控制量 $u = +r$ 、 $u = -r$ 到达原点的初始点, $\{b_{+k}\}$ 、 $\{b_{-k}\}$ ($k \geq 2$) 分别为第 1 步取 $u = -r$ 、 $u = +r$ 然后全部取 $u = +r$ 、 $u = -r$ 而到达原点的初始点. 所有的 $\{a_{+k}\}$ 、 $\{a_{-k}\}$ 以及 $\{b_{+k}\}$ 、 $\{b_{-k}\}$ 将分别落在两条不同的曲线上, 依次连接全体 $\{a_{+k}\}$ 的点构成的曲线记为 Γ_A^+ , 连接全体 $\{a_{-k}\}$ 的点构成的曲线记为 Γ_A^- ; 连接全体 $\{b_{+k}\}$ 的点构成的曲线记为 Γ_B^+ , 连接全体 $\{b_{-k}\}$ 的点构成的曲线记为 Γ_B^- . 如图 1 所示.

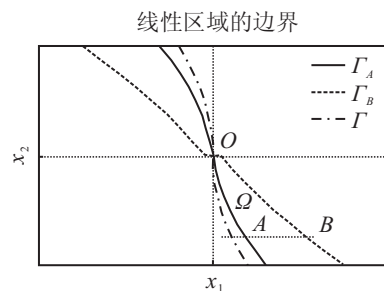


图 1 边界曲线、辅助线以及分类示意图

1.1 边界的确定

首先确定边界曲线 $\Gamma_A = \Gamma_A^+ \cup \Gamma_A^-$. $\{a_{+k}\}$ 为所有控制量全部取 $u = +r$ 而到达原点的初始点的集合, 不妨假设在第 $k+1$ 步到达原点 $X(k+1) = 0$, 此时有 $u(i) = +r, i = 0, 1, \dots, k$. 由式 (4) 得到

$$X(0) = r \sum_{i=0}^k \begin{bmatrix} (i+1)h^2 \\ -h \end{bmatrix}, \quad (6)$$

则由式(6)消去变量 k 后,有

$$x_1 = \frac{x_2^2}{2r} - \frac{1}{2}hx_2, \quad x_2 < 0,$$

即为 Γ_A^+ ;同理可得 Γ_A^- 为

$$x_1 = -\frac{x_2^2}{2r} - \frac{1}{2}hx_2, \quad x_2 > 0.$$

因此可以综述为

$$\Gamma_A : x_1 + \frac{x_2|x_2|}{2r} + \frac{1}{2}hx_2 = 0. \quad (7)$$

现在来确定边界 $\Gamma_B = \Gamma_B^+ \cup \Gamma_B^-$. 对于 $\{b_{+k}\}$, $X(k+1) = 0, u(0) = -r, u(i) = +r, i = 1, 2, \dots, k$. 由式(4)消去 k ,可得

$$x_1 = \frac{x_2^2}{2r} - \frac{5}{2}hx_2 + h^2r,$$

即为 Γ_B^+ ;同理可得 Γ_B^- 为

$$x_1 = -\frac{x_2^2}{2r} - \frac{5}{2}hx_2 + h^2r.$$

于是可以综述为

$$\Gamma_B : x_1 + \frac{x_2|x_2|}{2r} + \frac{5}{2}hx_2 + h^2r \operatorname{sgn}(x_2) = 0. \quad (8)$$

至此,已经找到区域 Ω 全部的边界,如图2所示.

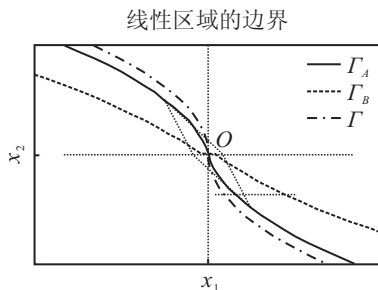


图2 可达区域以及线性边界示意图

1.2 控制综合函数的确定

前面已经确定了线性区间 Ω ,且考虑两步之内不能到达原点,因此若平面上任何一点不在 Ω 内,则控制量 u 取极值;否则 u 按某种线性规律变化,使得 u 能在闭区间 $[-r, +r]$ 内均匀变化.如图3所示,不妨先假设点 M 落在第IV象限内($x_1 > 0, x_2 < 0$),做一条辅助直线 $x_2 = x_2(M)$,它与边界线以及特征线相交于 A, B 两点(其对应的 x_1 方向的坐标值记为 X_A, X_B),对应的控制量分别取值 $+r, -r$.若 M 落在 A, B 两点以外,则控制量 u 取极值;否则 u 按线性规律变化.此时,若 $x_1 < X_A$ 或 $x_1 > X_B$,则分别有 $u = +r$ 或 $u = -r$,即

$$u = -r \frac{(X_B + X_A - 2|x_1|)}{X_B - X_A} \operatorname{sgn}(x_2). \quad (9)$$

其中

$$X_A = \frac{x_2^2}{2r} + \frac{1}{2}h|x_2|,$$

$$X_B = \frac{x_2^2}{2r} + \frac{5}{2}h|x_2| + h^2r \operatorname{sgn}(x_2).$$

若 M 落在第II象限区域,则可作类似分析.若 M 落在第I或第III象限区域,由于 M 不在区域 Ω 内,则有 $x_1x_2 \geq 0, u = -r \operatorname{sgn}(x_1 + hx_2)$.如果点 M 两步以内可以到达原点,则初始点 $X(0)$ 以及相关的控制量必定满足方程(2),使得 $x_1(2) = 0, x_2(2) = 0$,进而得到

$$\begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{bmatrix} = -\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & 2h \\ 1 & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

此时 $|u(1)| \leq r$,它是两步内到达原点的必要条件.从而可知,若式(10)不满足,则两步内不可能到达原点;若式(10)满足,则选择

$$u(0) = -\frac{1}{h^2}(x_1(0) + 2hx_2(0)), \quad (11)$$

使得两步内到达原点.

两步内可以到达原点的点是位于由两条平行的直线 $x_1 + hx_2 = \pm h^2r$ 所围成的区域与另外两条平行的直线 $x_1 + 2hx_2 = \pm h^2r$ 所围成的区域相重叠的阴影内,它是一个由4个点 $(-h^2r, 0), (-3h^2r, 2hr), (h^2r, 0), (3h^2r, -2hr)$ 围成的菱形区域.可达性区域称为 Ω_r .依据上述分析,可以得到一个可用的最速综合函数,将采用下面的算法描述.

1.3 最速综合函数的算法描述

对于相平面上的任意点 $M(x_1, x_2)$,最速控制综合函数 $u(x_1, x_2, r, h)$ 遵循以下策略快速到达原点:

1) 若 $|x_1 + hx_2| > h^2r$,或 $|x_1 + 2hx_2| > h^2r$,则两步内不可能到达原点, $M \notin \Omega_r$;否则转6).

2) 若 $x_1x_2 \geq 0$,则 $M \notin \Omega \cup \Omega_r, u = -r \operatorname{sgn}(x_1 + hx_2)$.

3) 确定线性区 Ω 的边界,即

$$X_A = \frac{x_2^2}{2r} + \frac{1}{2}h|x_2|,$$

$$X_B = \frac{x_2^2}{2r} + \frac{5}{2}h|x_2| + h^2r \operatorname{sgn}(x_2).$$

显然满足 $X_A < X_B$.

4) 若 $|x_1| \geq X_B$,则 $u = -r \operatorname{sgn}(x_1)$;若 $|x_1| \leq X_A$,则 $u = -r \operatorname{sgn}(x_2)$;此时 $M \notin \Omega \cup \Omega_r$.

5) $u = -r \frac{(X_B + X_A - 2|x_1|)}{X_B - X_A} \operatorname{sgn}(x_2)$,此时 $M \in \Omega \cap \Omega_r$.

6) 两步内可以到达原点, M 位于菱形可达区域内, $M \in \Omega_r$,此时

$$|x_1 + hx_2| \leq h^2r,$$

$$|x_1 + 2hx_2| \leq h^2r,$$

$$u(0) = -\frac{1}{h^2}(x_1(0) + 2hx_2(0)).$$

7) 算法结束.

不妨把上述函数记为 $u = \operatorname{ftd}(x_1, x_2, r, h)$,则由

上述最速控制综合函数可得到一个非线性离散跟踪微分器的算法. 即对于一个给定的信号序列 $\{V(k), k = 0, 1, 2, \dots\}$, 有下面的方程成立:

$$\begin{cases} u(k) = \text{ftd}(x_1(k) - V(k), x_2(k), r, c_0 h), \\ x_1(k+1) = x_1(k) + hx_2(k), \\ x_2(k+1) = x_2(k) + hu(k), k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (12)$$

其中: r 为快速因子, c_0 为滤波因子, h 为采样步长. 上述形式的跟踪微分器是一个完全线性化的函数, 本身又构成非线性, 从而避开了引言中提到的离散微分器的平方根的运算, 结构更加清晰明了, 运算简单实用. 最速轨线如图3所示. 从图3可以看到, 当轨迹线进入 Ω 区域内时, M 点可以落在由 Γ_A 与 Γ_B 围成的封闭区域内, 按给定的算法恰当选择控制量 u , 可使点 M 最后沿 Γ_A 快速运动到达原点.

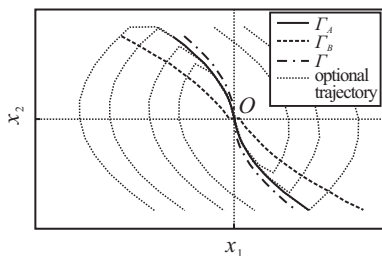


图3 开关曲线、边界曲线以及最速轨迹线的分布图

2 离散跟踪微分器的数值仿真

为了对简易TD算法与文献[2, 6, 8]中提出的TD

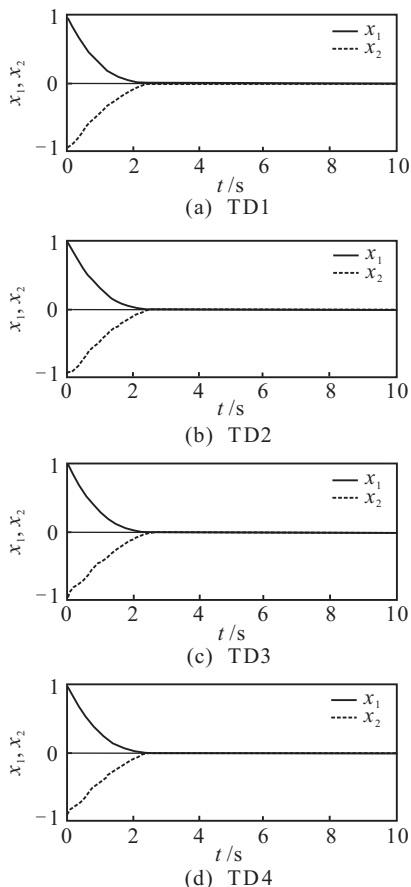


图4 跟踪阶跃信号

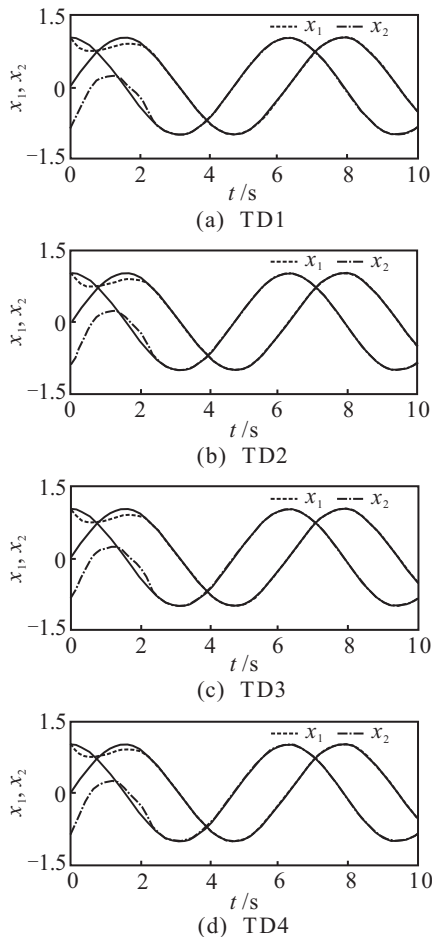


图5 跟踪正弦信号

进行比较, 考虑一个带扰动噪声以及非线性不确定项的二阶系统的跟踪问题, 其模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u + w(x, t), |u| \leq r. \end{cases}$$

不妨设 $w(x, t) = x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_1(t) \sin(3\pi t) + \eta(t)$, 其中 $\eta(t)$ 是均值为0、方差为0.05的高斯白噪声. 目标信号 $Y_d(t) = V_0 + d_0 \sin(\omega t)$, 分两种情况: 1) $V_0 = 0, d_0 = 0$; 2) $V_0 = 0, d_0 = 1, \omega = 1$. 取系统的初始值为 $\{-1, +1\}$, $r = 100, h = 0.01, c_0 = 2$. 设本文的算法为TD1, 文献[2, 6, 8]的TD分别为TD2、TD3、TD4. 采用恰当的方法安排过渡过程, 其仿真结果如图4和图5所示.

仿真结果表明, 上述跟踪微分器能够无超调地跟踪阶跃信号和正弦信号, 并能够提取适当的微分. 跟踪微分器中的线性区间可以根据边界直接确定, 且控制量按线性规则确定.

3 结论

本文利用离散系统最速控制函数构造了离散形式的非线性跟踪微分器, 直接给出了控制量取非极值的边界, 并给出了线性区域 Ω 以及可达区域 Ω_r , 最后用线性化的方法给出了最速系统的综合函数, 并最终

构造了跟踪微分器. 与以往的其他跟踪微分器相比, 本文构造的跟踪微分器结构更加简化, 这为跟踪微分器的应用提供了一种形式简单且有效的新方法. 仿真结果表明, 本文提出的跟踪微分器, 在跟踪性能、微分品质以及消除颤振方面具有很好的效果.

参考文献(References)

- [1] 韩京清, 王伟. 非线性跟踪-微分器[J]. 系统科学与数学, 1994, 14(2): 177-183.
(Han J Q, Wang W. Nonlinear tracking-differentiator[J]. J of System Science and Mathematical Science, 1994, 14(2): 177-183.)
- [2] 韩京清, 袁露林. 跟踪微分器的离散形式[J]. 系统科学与数学, 1999, 219(3): 68-27.
(Han J Q, Yuan L L. The discrete form of tracking-differentiator[J]. J of System Science and Mathematical Science, 1999, 219(3): 268-273.)
- [3] 张文革, 韩京清. 跟踪微分器用于零点配置[J]. 自动化学报, 2001, 27(5): 724-727.
(Zhang W G, Han J Q. The application of tracking-differentiator in allocation of zeros[J]. Acta Automatica Sinica, 2001, 27(5): 724-727.)
- [4] 韩京清. 从PID技术到“自抗扰”技术[J]. 控制工程, 2002, 19(3): 13-18.
(Han J Q. From PID technique to active disturbances rejection control technique[J]. Control Engineering of China, 2002, 19(3): 13-18.)
- [5] 黄一, 张文革. 自抗扰技术的发展[J]. 控制理论与应用, 2002, 19(4): 485-494.
(Huang Y, Zhang W G. Development of active disturbances rejection controller[J]. Control Theory & Applications, 2002, 19(4): 485-494.)
- [6] 王新华, 陈增强, 袁著祉. 全程快速非线性跟踪微分器[J]. 控制理论与应用, 2003, 20(6): 875-878.
(Wang X H, Chen Z Q, Yuan Z Z. Nonlinear tracking-differentiator with high speed in whole course[J]. Control Theory & Applications, 2003, 20(6): 875-878.)
- [7] 马中华, 吴国福, 陈敏. 利用TD估计目标状态[J]. 应用数学学报, 2007, 30(1): 1-9.
(Ma Z H, Wu G F, Chen M. Tracking target state with TD[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2007, 30(1): 1-9.)
- [8] 谢云德, 龙志强. 高精度快速非线性离散跟踪微分器[J]. 控制理论与应用, 2009, 26(2): 127-132.
(Xie Y D, Long Z Q. A high-speed nonlinear discrete tracking-differentiator with high precision[J]. Control Theory & Applications, 2009, 26(2): 127-132.)
- [9] 张志洲, 余龙华, 张玲玲, 等. 永磁电磁型中低速磁浮列车阻尼信息提取与融合技术[J]. 铁道学报, 2011, 33(4): 32-37.
(Zhang Z Z, She L H, Zhang L L, et al. Damp signal acquiring and fusing technology for middle-low speed permanent electro maglev trains[J]. J of the China Railway Society, 2011, 33(4): 32-37.)
- [10] Song Xue, Zhiqiang Long, Ning He, et al. A high precision position sensor design and its signal processing algorithm for a maglev train[J]. Sensors, 2012, 12: 5225-5245.
- [11] Yao Gao, Wenqi Wu, Kanghua Tang. A new inertial aid method for high dynamic compass signal tracking based on a nonlinear tracking differentiator[J]. Sensors, 2012, 12: 7634-7647.
- [12] Xie Yunde, Long Zhiqiang, Li Jie, et al. Research on a new nonlinear discrete-time tracing-differentiator filtering characteristic[C]. Proc of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation. Chongqing, 2008: 6750-6755.
- [13] Dai Chunhui, Long Zhiqiang, Xie Yunde, et al. Research on the filtering algorithm in speed and position detection of maglev trains[J]. Sensors, 2011, 11: 7205-7218.

(责任编辑: 李君玲)