文章编号: 1001-0920 (2014) 06-1053-11 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2013.0305

基于前景 ITFNCI 算子的群体 MULTIMOORA 决策方法

陈振颂, 李延来

(西南交通大学 a. 交通运输与物流学院，b. 综合交通运输智能化国家地方联合工程实验室，成都 610031)

摘 要: 利用进一步完善的直觉梯形模糊数运算法则, 提出基于模糊测度和Choquet积分的直觉梯形模糊数的信息集成算子, 并证明了该集成算子的相关性质. 根据前景理论定义直觉梯形模糊前景效应和前景价值函数, 构造前景ITFNCI算子. 针对多方参与且决策者信息关联的多属性群决策问题, 利用前景ITFNCI算子集结群体直觉梯形前景价值函数, 进而采用MULTIMOORA 理论进行方案比选, 基于优势理论获得方案的综合排序以确定最优方案. 案例分析表明了所提出方法的可行性和有效性.

关键词: 前景理论；直觉梯形模糊数；ITFNCI 算子；全乘比例分析多目标优化方法

中图分类号: C934 **文献标志码:** A

Approach for group MULTIMOORA decision making based upon prospect intuitionistic trapezoidal fuzzy number Choquet integral operator

CHEN Zhen-song, *LI Yan-lai*

(a. School of Transportation and Logistics，b. Nation and Region Combined Engineering Lab of Intelligentizing Integrated Transportation，Southwest Jiaotong University，Chengdu 610031，China．Correspondent：LI Yan-lai, E-mail：lyl_2001@163.com)

Abstract: According to the proposed improved operational laws of intuitionistic trapezoidal fuzzy number(ITFN), an aggregation operator of ITFN is proposed based on fuzzy measure and ITFN Choquet integral(ITFNCI), and the relative properties of the aggregation operator are also proposed and investigated. A prospect effect and a prospect value function of ITFN are defined based on the prospect theory, and then a prospect ITFNCI operator is constructed. With respect to a multiple attribute group decision making problem considering interactions among decision-makers, the prospect value functions of ITFNs are aggregated by using the prospect ITFNCI operator; a MULTIMOORA theory is employed to obtain a ranking of alternatives corresponding to each ordering approach; a Dominance theory is then utilized to summarize the three rankings into a single one. Finally, a practical example is introduced to show the feasibility and effectiveness of the proposed approach.

Key words: prospect theory；intuitionistic trapezoidal fuzzy number；ITFNCI operator；multi-objective optimization by ratio analysis coupled with reference point theory plus the full multiplicative form

0 引 言

Atanassov[1]提出的直觉模糊集引入“非隶属度”的概念, 对传统模糊集理论进行了拓展, 使其在描述和刻画决策者面临决策问题时的模糊性信息方面更加细腻, 也更符合实际情况[2-3]. 目前, 直觉模糊集理论已广泛应用于决策分析、投资规划、逻辑编程等领域, 在理论研究和实践成果方面均取得了显著进展[4-5], 其中多属性直觉模糊决策因其在工程、经济和管理等行业内的广泛需求而备受学者关注. 近年来, 针对属性值为区间直觉模糊集、三角直觉模糊数、直觉梯形模糊数等直觉模糊型模糊数的多属性决策方法已有众多研究[6-7]. 王坚强[8]在关于模糊多准则决策方法的研究综述中, 首次定义了直觉梯形模糊数和区间直觉梯形模糊数, 并介绍了基于直觉模糊集的模糊多准则决策 (MCDM) 方法研究进展, 展望了直觉模糊集的发展趋势. 万树平[9]进一步根据直觉模糊集的发展形式, 针对直觉模糊集、区间直觉模糊集、直觉三角模糊数、直觉梯形模糊数的多属性决

收稿日期: 2013-03-22；**修回日期:** 2013-05-03.

基金项目: 国家自然科学基金项目(70971017, 71371156)；西南交通大学优秀博士学位论文培育项目.

作者简介: 陈振颂(1988−), 男, 博士生, 从事决策理论与方法、智能控制与应用的研究；李延来(1971−), 男, 教授, 博士生导师, 从事交通信息工程、智能控制与应用等研究.

策 (MADM) 和群决策 (GMADM) 方法展开综述, 详细探讨了其研究现状和发展方向. 然而, 直觉梯形模糊数 (ITFN) 的 MADM 研究起步较晚, 相关理论探析成果较少, 为此, 越来越多的学者专注于对 ITFN 的理论研究. Wan[10]探讨了属性值为 ITFN 的 GMADM 问题, 从 Hausdorff 度量角度定义了 ITFN 的 Hanmming 距离和 Euclidean 距离, 提出直觉梯形模糊幂均算子, 探讨了基于直觉梯形模糊混合幂均算子 (ITFNPHA) 的方案排序方法. Wu 等[11]根据 ITFN 的相关运算法则, 定义了直觉梯形模糊加权几何算子 (ITGWG)、直觉梯形模糊有序加权几何算子 (ITOWG)、诱导直觉梯形模糊有序加权几何算子 (I-ITFOWG)、直觉梯形模糊混合算子 (ITTHG) 等几类信息集成算子, 并着重探讨了基于 ITGWG 和 ITTHG 的 MAGDM 问题. 王坚强等[12]从克服既有ITFN算术运算的缺陷着手, 提出新的 ITFN 算术运算, 以此为基础定义了 ITFN 的几类集结算子, 并将其应用于解决 GMADM 问题. 万树平等[13]研究方案属性值为 ITFN 的 GMADM 问题, 通过定义 ITFN 新的合理运算法则, 提出基于可能性均值-方差的决策方法. Zhang 等[14]针对属性值为 ITFN 且属性权重未知的 MADM 问题, 利用信息熵方法确定属性权重, 进而通过灰色关联投影值逼近 PIS 的相对紧性确定方案排序. Ye[15]考虑一类方案偏好系数和属性权重值均为直觉梯形模糊数的 MADM 问题, 提出利用拓展的直觉梯形模糊期望值方法对方案进行排序, 并通过方案偏好系数加权期望值确定最优方案.

事实上, 上述关于 ITFN 的多属性决策方法的鲁棒性仍有待提升, Brauers 等[16]提出了多属性决策鲁棒性的 6 项必备条件, 在此基础上指出集结多种排序方法的 MADM 优于仅有单一排序方法的 MADM[17]. 他于 2006 年提出的比例分析多目标优化 (MOORA) 方法完全满足影响多属性决策鲁棒性的 7 项条件, 具有良好的鲁棒性, 在材质选定和机械制造方面得到了有效应用[16-19]. 为了进一步提高 MOORA 方法鲁棒性, Brauers 等[17]通过将 MOORA 方法集成全乘模型, 基于改进名义群体算法 (ANGT) 和德尔菲法的支持, 提出全乘比例分析多目标优化 (MULTIMOORA) 方法, 并成功将其应用于 MADM 的分析中. 目前, 关于 MULTIMOORA 方法的理论和应用研究相对较少, Brauers 等[20]针对属性值为清晰数的 MADM 问题, 提出了相应的信息集成算子和规范化方式, 并在后续研究中将属性值拓展为三角模糊数, 其可行性和适用性已在项目管理、机械工程、区域开发等相关领域得到印证[21-23]. Baležentis 等[24]将模糊 MULTIMOORA 应用于基于词计算的人员甄选, Tomas 等[25]在后续关于某通讯企业部门主管的招聘问题中引入一类二型模糊数——广义区间值梯形模糊数作为属性度量, 基于广义区间值梯形模糊数 OWGA 算子的群体 MULTIMOORA 方法展开应聘者择优.

通常, 群决策中决策者评价体系的构建往往需要满足完备性、代表性和独立性, 然而, 关于独立性的要求在实际决策问题中略显苛刻. 考虑决策者偏好往往受其地位、名望、知识等因素的影响, 决策体系的决策者对决策事物的认知通常存在信息共享, 进而导致其间偏好存在冗余关联或互补关联. 因此, 针对决策者信息关联的 GMADM 问题的研究便无法避免. 鉴于此, 考虑模糊测度处理关联 GMADM 问题的有效性, 本文通过测度决策者和决策群组的权重构建决策模型, 提出基于 Choquet 积分的直觉梯形模糊数的信息集成算子. 结合前景理论刻画决策者在决策过程中面临风险态度和敏感性的差异性, 定义 ITFN 前景效应和 ITFN 前景价值函数, 构建前景 ITFNCI 算子. 针对决策者信息关联且属性值为 ITFN 的 GMADM 问题, 提出基于前景 ITFNCI 算子的 MULTIMOORA 决策方法. 该方法通过决策历史信息获取关于各位决策者和决策群组的模糊测度, 进而利用前景 ITFNCI 算子集结不同决策者的决策信息, 运用 MULTIMOORA 方法进行方案比选, 以确定最优方案. 对高超声速飞行器的姿态控制性能的评估实例表明了所提出方法的可行性和有效性.

1 直觉梯形模糊数

王坚强[8]在对模糊多准则决策方法的研究综述中定义了直觉梯形模糊数, 不仅扩展了直觉三角模糊数, 也实现了对直觉模糊集从论域离散集合到连续集合的过渡. 为了后续叙述的方便, 本节首先给出直觉梯形模糊数的相关定义和运算规则.

定义 1[8] 设 X 是一个非空集合, 称 $\tilde{A}=\langle([a,b,c,d];\mu_{\tilde{A}}),([a_1,b,c,d_1];\upsilon_{\tilde{A}})\rangle$ 为 X 上的一个直觉梯形模糊数, 如果其隶属函数为

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{b-a}\mu_{\tilde{A}},\ a\leqslant x<b;\\ \mu_{\tilde{A}},\ b\leqslant x\leqslant c;\\ \dfrac{d-x}{d-c}\mu_{\tilde{A}},\ c<x\leqslant d;\\ 0,\ \text{otherwise}.\end{cases}\tag{1}$$

非隶属函数为

$$\upsilon_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}\dfrac{b-x+\upsilon_{\tilde{A}}(x-a_1)}{b-a_1},\ a_1\leqslant x<b;\\ \upsilon_{\tilde{A}},\ b\leqslant x\leqslant c;\\ \dfrac{x-c+\upsilon_{\tilde{A}}(d_1-x)}{d_1-c},\ c<x\leqslant d_1;\\ 1,\ \text{otherwise}.\end{cases}\tag{2}$$

其中: $0 \leqslant \mu_{\tilde{A}} \leqslant 1$, $0 \leqslant \upsilon_{\tilde{A}} \leqslant 1$, $0 \leqslant \mu_{\tilde{A}} + \upsilon_{\tilde{A}} \leqslant 1$, $a, b, c, d, a_1, d_1 \in \boldsymbol{R}$.

直觉梯形模糊数融合了直觉模糊集反馈决策者支持程度、反对程度和犹豫信息的优势, 通过梯形模糊数表达不同量纲决策信息. 特别地, 当 $\mu_{\tilde{A}} = 1$, $\upsilon_{\tilde{A}} = 0$ 时, $\tilde{A}$ 即为传统的梯形模糊数; 当 $b = c$ 时, 直觉梯形模糊数退化为直觉三角模糊数. 通常, 若 $a = a_1$, $d = d_1$, 则直觉梯形模糊数 $\tilde{A}$ 可简记为 $\tilde{A} = ([a, b, c, d]; \mu_{\tilde{A}}, \upsilon_{\tilde{A}})$, 本文中直觉梯形模糊数均为此类模糊数.

Shu 等[26]定义了直觉三角模糊数的运算规则, 王坚强等[12]进一步将其拓展并应用于直觉梯形模糊数, 分析并改进了原运算规则以提升其合理性. 以下介绍直觉梯形模糊数的相关运算.

定义 2[12]　设 $\tilde{A}_1 = ([a_1, b_1, c_1, d_1]; \mu_{\tilde{A}_1}, \upsilon_{\tilde{A}_1})$ 和 $\tilde{A}_2 = ([a_2, b_2, c_2, d_2]; \mu_{\tilde{A}_2}, \upsilon_{\tilde{A}_2})$ 为非空集合 X 上的两个直觉梯形模糊数, $T_{\tilde{A}_1} = [a_1, b_1, c_1, d_1]$ 和 $T_{\tilde{A}_2} = [a_2, b_2, c_2, d_2]$ 分别为直觉梯形模糊数 $\tilde{A}_1$ 和 $\tilde{A}_2$ 中的传统梯形模糊数, 且

$$\|T_{\tilde{A}_1}\| = (|a_1| + |b_1| + |c_1| + |d_1|)/4,$$
$$\|T_{\tilde{A}_2}\| = (|a_2| + |b_2| + |c_2| + |d_2|)/4,$$

则有: 1) 加法

$$\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2 = \Big([a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2]; \frac{\|T_{\tilde{A}_1}\|\mu_{\tilde{A}_1} + \|T_{\tilde{A}_2}\|\mu_{\tilde{A}_2}}{\|T_{\tilde{A}_1}\| + \|T_{\tilde{A}_2}\|}, \frac{\|T_{\tilde{A}_1}\|\upsilon_{\tilde{A}_1} + \|T_{\tilde{A}_2}\|\upsilon_{\tilde{A}_2}}{\|T_{\tilde{A}_1}\| + \|T_{\tilde{A}_2}\|}\Big), \quad (3)$$

当 $\|T_{\tilde{A}_1}\| = \|T_{\tilde{A}_2}\| = 0$ 时, 有

$$\mu_{\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2} = (\mu_{\tilde{A}_1} + \mu_{\tilde{A}_2})/2, \upsilon_{\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2} = (\upsilon_{\tilde{A}_1} + \upsilon_{\tilde{A}_2})/2;$$

2) 乘法

$$\tilde{A}_1 \otimes \tilde{A}_2 = ([\min(a_1a_2, a_1d_2, d_1a_2, d_1d_2), \min(b_1b_2, b_1c_2, c_1b_2, c_1c_2), \max(b_1b_2, b_1c_2, c_1b_2, c_1c_2), \max(a_1a_2, a_1d_2, d_1a_2, d_1d_2)]; \mu_{\tilde{A}_1}\mu_{\tilde{A}_2}, \upsilon_{\tilde{A}_1} + \upsilon_{\tilde{A}_2} - \upsilon_{\tilde{A}_1}\upsilon_{\tilde{A}_2}); \quad (4)$$

3) 数乘

$$\lambda\tilde{A}_1 = ([\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1, \lambda d_1]; \mu_{\tilde{A}_1}, \upsilon_{\tilde{A}_1}),\ \lambda \geqslant 0; \quad (5)$$

4) 幂乘

$$\tilde{A}_1^{\lambda} = ([a_1^{\lambda}, b_1^{\lambda}, c_1^{\lambda}, d_1^{\lambda}]; \mu_{\tilde{A}_1}, \upsilon_{\tilde{A}_1}),\quad \lambda \geqslant 0,\ a_1, b_1, c_1, d_1 \geqslant 0. \quad (6)$$

定义 2 对既有的直觉梯形模糊数的运算规则进行改进, 然而, 数乘运算仅定义直觉梯形模糊数和任意非负常数乘积的情形. 为了满足各类多属性决策方法的应用需求, 本文将其拓展至直觉梯形模糊数与任意常数的乘积运算, 其平面意义即可视为对直觉梯形模糊数的几何构形进行伸缩变换后再作对称变换, 如定义 3 所述.

定义 3　设 $\tilde{A} = ([a, b, c, d]; \mu_{\tilde{A}}, \upsilon_{\tilde{A}})$ 为非空集合 X 上的直觉梯形模糊数, 则 $\tilde{A}$ 的数乘运算为

$$\lambda\tilde{A} = \begin{cases} ([\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d]; \mu_{\tilde{A}}, \upsilon_{\tilde{A}}),\ \lambda \geqslant 0; \\ ([\lambda d, \lambda c, \lambda b, \lambda a]; \mu_{\tilde{A}}, \upsilon_{\tilde{A}}),\ \lambda < 0. \end{cases} \quad (7)$$

由定义 3 可知, 当 $\lambda = -1$ 时, 结合式 (3) 可得到直觉梯形模糊数的减法运算

$$\tilde{A}_1 \ominus \tilde{A}_2 = \Big([a_1 - d_2, b_1 - c_2, c_1 - b_2, d_1 - a_2]; \frac{\|T_{\tilde{A}_1}\|\mu_{\tilde{A}_1} + \|T_{\tilde{A}_2}\|\mu_{\tilde{A}_2}}{\|T_{\tilde{A}_1}\| + \|T_{\tilde{A}_2}\|}, \frac{\|T_{\tilde{A}_1}\|\upsilon_{\tilde{A}_1} + \|T_{\tilde{A}_2}\|\upsilon_{\tilde{A}_2}}{\|T_{\tilde{A}_1}\| + \|T_{\tilde{A}_2}\|}\Big). \quad (8)$$

此外, 为了便于推导直觉梯形模糊数的除法运算, 需考虑幂乘形式的完备化, 即对于任意的常数 λ 和任意的实数 a, b, c, d, 直觉梯形模糊数的幂乘 $\tilde{A}^{\lambda}$ 均可给出相应的结论. 事实上, 常数 λ 的正负和大小只能作为原直觉梯形模糊数图形放大或缩小的依据, 而不能改变拐点横坐标 a, b, c, d 的正负. 因此, 为了给出具有普遍适用性的运算规则, 规定 $0^{\lambda} = 0 (\lambda \in R)$, 并定义符号函数

$$\mathrm{sgn}x = \begin{cases} 1,\ x > 0; \\ 0,\ x = 0; \\ -1,\ x < 0. \end{cases}$$

其中 $x \in R$. 则幂乘运算可依据 a, b, c, d 和 λ 的不同取值情况予以讨论, 具体运算公式见定义 4.

定义 4　设 $\tilde{A} = ([a, b, c, d]; \mu_{\tilde{A}}, \upsilon_{\tilde{A}})$ 为非空集合 X 上的直觉梯形模糊数, 则 $\tilde{A}$ 的幂乘运算为

$$\tilde{A}^{\lambda} = \begin{cases} ([\mathrm{sgn}a|a|^{\lambda}, \mathrm{sgn}b|b|^{\lambda}, \mathrm{sgn}c|c|^{\lambda}, \mathrm{sgn}d|d|^{\lambda}]; \mu_{\tilde{A}}, \upsilon_{\tilde{A}}), \\ \quad \lambda \geqslant 0; \\ ([\mathrm{sgn}d|d|^{\lambda}, \mathrm{sgn}c|c|^{\lambda}, \mathrm{sgn}b|b|^{\lambda}, \mathrm{sgn}a|a|^{\lambda}]; \mu_{\tilde{A}}, \upsilon_{\tilde{A}}), \\ \quad \lambda < 0,\ a, b, c, d \neq 0; \\ ([0, d^{\lambda}, c^{\lambda}, b^{\lambda}]; \mu_{\tilde{A}}, \upsilon_{\tilde{A}}), \\ \quad \lambda < 0,\ a = 0,\ b, c, d \neq 0; \\ ([\mathrm{sgn}c|c|^{\lambda}, \mathrm{sgn}b|b|^{\lambda}, \mathrm{sgn}a|a|^{\lambda}, 0]; \mu_{\tilde{A}}, \upsilon_{\tilde{A}}), \\ \quad \lambda < 0,\ d = 0,\ a, b, c \neq 0; \\ ([\mathrm{sgn}a|a|^{\lambda}, 0, d^{\lambda}, c^{\lambda}]; \mu_{\tilde{A}}, \upsilon_{\tilde{A}}), \\ \quad \lambda < 0,\ b = 0,\ a, c, d \neq 0; \\ ([\mathrm{sgn}b|b|^{\lambda}, \mathrm{sgn}a|a|^{\lambda}, 0, d^{\lambda}]; \mu_{\tilde{A}}, \upsilon_{\tilde{A}}), \\ \quad \lambda < 0,\ c = 0,\ a, b, d \neq 0; \\ ([0, 0, d^{\lambda}, c^{\lambda}]; \mu_{\tilde{A}}, \upsilon_{\tilde{A}}), \\ \quad \lambda < 0,\ a = b = 0,\ c, d \neq 0; \\ ([\mathrm{sgn}b|b|^{\lambda}, \mathrm{sgn}a|a|^{\lambda}, 0, 0]; \mu_{\tilde{A}}, \upsilon_{\tilde{A}}), \\ \quad \lambda < 0,\ c = d = 0,\ a, b \neq 0. \end{cases} \quad (9)$$

同理, 在式 (9) 中, 当 $\lambda=-1$ 时, 若 $a_2,b_2,c_2,d_2\neq 0$, 则结合式 (4), 直觉梯形模糊数的除法运算为

$$\begin{aligned}\tilde{A}_1/\tilde{A}_2=(&[\min(a_1/a_2,a_1/d_2,d_1/a_2,d_1/d_2),\\&\min(b_1/b_2,b_1/c_2,c_1/b_2,c_1/c_2),\\&\max(b_1/b_2,b_1/c_2,c_1/b_2,c_1/c_2),\\&\max(a_1/a_2,a_1/d_2,d_1/a_2,d_1/d_2)];\\&\mu_{\tilde{A}_1}\mu_{\tilde{A}_2},\upsilon_{\tilde{A}_1}+\upsilon_{\tilde{A}_2}-\upsilon_{\tilde{A}_1}\upsilon_{\tilde{A}_2}).\end{aligned}\tag{10}$$

2 基于 Choquet 积分的直觉梯形模糊数的信息集成算子及其性质

文献 [27] 提出了基于模糊测度和 Choquet 积分的模糊数直觉模糊数的信息集成算子, 并证明了 FIFCA 算子满足幂等性、有序单调性、有界性、置换不变性等性质. 本节根据 Choquet 积分的定义和直觉梯形模糊数的运算法则, 给出基于 Choquet 积分的直觉梯形模糊数的信息集成算子, 并指出 ITFNCI 算子同样满足 FIFCA 算子所具备的相关性质.

定义 5 若 μ 为定义在集 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上的模糊测度, $\tilde{A}_i=([a_i,b_i,c_i,d_i];\mu_i,\upsilon_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组定义在 X 上的一组直觉梯形模糊数, 则 $\tilde{A}_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 关于模糊测度 μ 的离散 Choquet 积分定义为

$$\begin{aligned}&\int\tilde{A}\mathrm{d}\mu=\mathrm{ITFNCI}(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2,\cdots,\tilde{A}_n)=\\&\tilde{A}_{\tau(1)}[\mu(B_{\tau(1)})-\mu(B_{\tau(2)})]\oplus\tilde{A}_{\tau(2)}[\mu(B_{\tau(2)})-\\&\mu(B_{\tau(3)})]\oplus\cdots\oplus\tilde{A}_{\tau(n)}[\mu(B_{\tau(n)})-\mu(B_{\tau(n+1)})]=\\&\sum_{i=1}^{n}\tilde{A}_{\tau(i)}[\mu(B_{\tau(i)})-\mu(B_{\tau(i+1)})].\end{aligned}\tag{11}$$

其中: $(\tilde{A}_{\tau(1)},\tilde{A}_{\tau(2)},\cdots,\tilde{A}_{\tau(n)})$ 为 $(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2,\cdots,\tilde{A}_n)$ 的一个置换, 使得对于任意的 i, 有 $\tilde{A}_{\tau(i)}\leqslant\tilde{A}_{\tau(i+1)}$; $B_{\tau(i)}=(x_{\tau(i)},x_{\tau(i+1)},\cdots,x_{\tau(n)})$ 且 $B_{\tau(n+1)}=0$.

基于直觉梯形模糊数的运算法则, 对直觉梯形模糊数的 Choquet 积分进一步推导可得如下定理.

定理 1 设 $\tilde{A}_i=([a_i,b_i,c_i,d_i];\mu_i,\upsilon_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组直觉梯形模糊数, μ 为 X 上的模糊测度, 则 $\mathrm{ITFNCI}(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2,\cdots,\tilde{A}_n)$ 仍为一直觉梯形模糊数, 且有

$$\begin{aligned}&\mathrm{ITFNCI}(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2,\cdots,\tilde{A}_n)=\\&\Big(\Big[\sum_{i=1}^{n}[\mu(B_{\tau(i)})-\mu(B_{\tau(i+1)})]a_{\tau(i)},\\&\sum_{i=1}^{n}[\mu(B_{\tau(i)})-\mu(B_{\tau(i+1)})]b_{\tau(i)},\\&\sum_{i=1}^{n}[\mu(B_{\tau(i)})-\mu(B_{\tau(i+1)})]c_{\tau(i)},\\&\sum_{i=1}^{n}[\mu(B_{\tau(i)})-\mu(B_{\tau(i+1)})]d_{\tau(i)}\Big];\\&\sum_{i=1}^{n}\|\tilde{A}_{\tau(i)}\|\mu_{\tau(i)}\Big/\sum_{i=1}^{n}\|\tilde{A}_{\tau(i)}\|,\\&\sum_{i=1}^{n}\|\tilde{A}_{\tau(i)}\|\upsilon_{\tau(i)}\Big/\sum_{i=1}^{n}\|\tilde{A}_{\tau(i)}\|\Big).\end{aligned}\tag{12}$$

定理 1 可直接利用数学归纳法予以证明, 此略.

由直觉模糊数的运算法则和定理 1 可得到, ITFNCI 信息集成算子具备以下性质.

性质 1 (幂等性) 设 $\tilde{A}_i=([a_i,b_i,c_i,d_i];\mu_i,\upsilon_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组直觉梯形模糊数, μ 为 X 上的模糊测度, 若 $\tilde{A}_1=\tilde{A}_2=\cdots=\tilde{A}_n=\tilde{A}=([a,b,c,d];\mu_{\tilde{A}},\upsilon_{\tilde{A}})$, 则有

$$\mathrm{ITFNCI}(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2,\cdots,\tilde{A}_n)=\tilde{A}.$$

性质 2 (有序单调性) 设 $\tilde{A}_i=([a_i,b_i,c_i,d_i];\mu_i,\upsilon_i)$ 和 $\tilde{A}'_i=([a'_i,b'_i,c'_i,d'_i];\mu'_i,\upsilon'_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 为两组直觉梯形模糊数, μ 为 X 上的模糊测度. 若 $(\tilde{A}_{\tau(1)},\tilde{A}_{\tau(2)},\cdots,\tilde{A}_{\tau(n)})$ 和 $(\tilde{A}'_{\tau(1)},\tilde{A}'_{\tau(2)},\cdots,\tilde{A}'_{\tau(n)})$ 分别为 $(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2,\cdots,\tilde{A}_n)$ 和 $(\tilde{A}'_1,\tilde{A}'_2,\cdots,\tilde{A}'_n)$ 的置换, 使得 $\tilde{A}_{\tau(i)}\leqslant\tilde{A}_{\tau(i+1)}$, $\tilde{A}'_{\tau(i)}\leqslant\tilde{A}'_{\tau(i+1)}$, 且对于任意的 i 有 $\tilde{A}_{\tau(i)}\geqslant\tilde{A}'_{\tau(i)}$, 即对应于 $\tilde{A}_{\tau(i)}$, $\tilde{A}'_{\tau(i)}$ 的各分量有 $a_{\tau(i)}\geqslant a'_{\tau(i)}$, $b_{\tau(i)}\geqslant b'_{\tau(i)}$, $c_{\tau(i)}\geqslant c'_{\tau(i)}$, $d_{\tau(i)}\geqslant d'_{\tau(i)}$, $\mu_{\tau(i)}\geqslant\mu'_{\tau(i)}$, 而 $\upsilon_{\tau(i)}\leqslant\upsilon'_{\tau(i)}$, 则有

$$\mathrm{ITFNCI}(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2,\cdots,\tilde{A}_n)\geqslant\mathrm{ITFNCI}(\tilde{A}'_1,\tilde{A}'_2,\cdots,\tilde{A}'_n).$$

性质 3 (有界性) 设 $\tilde{A}_i=([a_i,b_i,c_i,d_i];\mu_i,\upsilon_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组直觉梯形模糊数, μ 为 X 上的模糊测度, 令

$$\tilde{A}^-=([\min_i a_i,\min_i b_i,\min_i c_i,\min_i d_i];\min_i\mu_i,\max_i\upsilon_i),$$

$$\tilde{A}^+=([\max_i a_i,\max_i b_i,\max_i c_i,\max_i d_i];\max_i\mu_i,\min_i\upsilon_i),$$

则有 $\tilde{A}^-\leqslant\mathrm{ITFNCI}(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2,\cdots,\tilde{A}_n)\leqslant\tilde{A}^+$. 此外, 由直觉模糊数的 Choquet 积分定义可进一步得到性质 4.

性质 4 (置换不变性) 设 $\tilde{A}_i=([a_i,b_i,c_i,d_i];\mu_i,\upsilon_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组直觉梯形模糊数, μ 为 X 上的模糊测度, $(\tilde{A}_{\tau(1)},\tilde{A}_{\tau(2)},\cdots,\tilde{A}_{\tau(n)})$ 为 $(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2,\cdots,\tilde{A}_n)$ 的一个置换, 则有

$$\begin{aligned}&\mathrm{ITFNCI}(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2,\cdots,\tilde{A}_n)=\\&\mathrm{ITFNCI}(\tilde{A}_{\tau(1)},\tilde{A}_{\tau(2)},\cdots,\tilde{A}_{\tau(n)}).\end{aligned}$$

3 前景 ITFNCI 算子

前景理论有效揭示了不确定条件下个体选择行为的决策模式, 指出决策者面临决策收益和损失时存在异化风险态度和敏感性, 具有参考点依赖、损失厌恶、边际效用递减、概率判断扭曲等特点[28-29]. 然而, ITFNCI 算子未能反映决策者的行为特征信息, 因此构造前景 ITFNCI 算子将增强信息集结的合理性和有效性, 进而使得决策结论更加符合实际情况.

定义 6 设 $\tilde{A}_i=([a_i,b_i,c_i,d_i];\mu_i,\upsilon_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组直觉梯形模糊数, 基于前景理论的准

则参考点假定为 $\tilde{R}=([a,b,c,d];\mu,\upsilon)$. 其中: μ 为预期隶属度函数, υ 为预期非隶属度函数. 则关于 $\tilde{A}_i$ 的直觉梯形模糊前景效应为

$$\Delta\tilde{A}_i=\tilde{A}_i\ominus\tilde{R}= ([a_i-d,b_i-c,c_i-b,d_i-a];\mu_{\tilde{A}\ominus\tilde{R}},\upsilon_{\tilde{A}\ominus\tilde{R}}). \tag{13}$$

其中

$$\mu_{\tilde{A}\ominus\tilde{R}}=\frac{\|T_{\tilde{A}_i}\|\mu_i+\|T_{\tilde{R}}\|\mu}{\|T_{\tilde{A}_i}\|+\|T_{\tilde{R}}\|},$$
$$\upsilon_{\tilde{A}\ominus\tilde{R}}=\frac{\|T_{\tilde{A}_i}\|\upsilon_i+\|T_{\tilde{R}}\|\upsilon}{\|T_{\tilde{A}_i}\|+\|T_{\tilde{R}}\|},$$
$$\|T_{\tilde{A}_i}\|=(|a_i|+|b_i|+|c_i|+|d_i|)/4,$$
$$\|T_{\tilde{R}}\|=(|a|+|b|+|c|+|d|)/4.$$

定义 7　设 $\Delta\tilde{A}_i=\langle[a_i-d,b_i-c,c_i-b,d_i-a];\mu_{\tilde{A}\ominus\tilde{R}},\upsilon_{\tilde{A}\ominus\tilde{R}}\rangle$ 为一组关于 $\tilde{A}_i=([a_i,b_i,c_i,d_i];\mu_i,\upsilon_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 的直觉梯形模糊前景效应, 则关于 $\tilde{A}_i$ 的直觉梯形模糊前景价值函数为

$$v(\Delta\tilde{A}_i)=\begin{cases}(\Delta\tilde{A}_i)^\alpha=\langle[\mathrm{sgn}(a_i-d)|a_i-d|^\alpha,\mathrm{sgn}(b_i-c)|b_i-c|^\alpha,\\ \quad\mathrm{sgn}(c_i-b)|c_i-b|^\alpha,\mathrm{sgn}(d_i-a)|d_i-a|^\alpha];\\ \quad\mu_{\tilde{A}\ominus\tilde{R}},\upsilon_{\tilde{A}\ominus\tilde{R}}\rangle,\ S(\Delta\tilde{A}_i)\geqslant 0;\\ -\theta(-\Delta\tilde{A}_i)^\beta=\langle[\theta\mathrm{sgn}(d_i-a)|d_i-a|^\beta,\theta\mathrm{sgn}(c_i-\\ \quad b)|c_i-b|^\beta,\theta\mathrm{sgn}(b_i-c)|b_i-c|^\beta,\\ \quad\theta\mathrm{sgn}(a_i-d)|a_i-d|^\beta];\mu_{\tilde{A}\ominus\tilde{R}},\\ \quad\upsilon_{\tilde{A}\ominus\tilde{R}}\rangle,\ S(\Delta\tilde{A}_i)<0.\end{cases} \tag{14}$$

其中: $\Delta\tilde{A}_i$ 为 $\tilde{A}_i$ 偏离参考点 $\tilde{R}$ 的程度, 由该 ITFN 前景效应的期望正负取值可区分为收益和损失情形; $S(\Delta\tilde{A}_i)$ 为相应于 $\Delta\tilde{A}_i$ 的记分函数; 参数 α 和 β 分别为收益和损失区域价值幂函数的凹凸程度, $0\leqslant\alpha,\beta\leqslant 1$, α 和 β 的取值与决策者风险趋向呈正相关性; θ 表征决策者的风险态度, 通常取 $\theta>1$, 即决策者对于损失的敏感性较强.

一般地, 通过集成价值函数和决策权重两方面共同决定前景价值[30], 然而, 在确定决策权重的过程中, 要求决策者再次提供主观概率容易造成对信息的过度处理, 因此, 本文根据决策者通过模糊测度确定决策权重. 下面给出前景 ITFNCI 算子的定义.

定义 8　若 μ 为定义在集 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上的模糊测度, $v(\Delta\tilde{A}_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组定义在 X 上关于 $\tilde{A}_i=([a_i,b_i,c_i,d_i];\mu_i,\upsilon_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 的直觉梯形模糊前景价值函数, 则 $v(\Delta\tilde{A}_i)$ 关于模糊测度 μ 的离散 Choquet 积分定义为

$$\begin{aligned}&\int v(\Delta\tilde{A}_i)\mathrm{d}\mu=\\&\mathrm{ITFNCI}(v(\Delta\tilde{A}_1),v(\Delta\tilde{A}_2),\cdots,v(\Delta\tilde{A}_n))=\\&v(\Delta\tilde{A}_{\tau(1)})[\mu(B_{\tau(1)})-\mu(B_{\tau(2)})]\oplus\\&v(\Delta\tilde{A}_{\tau(2)})[\mu(B_{\tau(2)})-\mu(B_{\tau(3)})]\oplus\\&\cdots\oplus v(\Delta\tilde{A}_{\tau(n)})[\mu(B_{\tau(n)})-\mu(B_{\tau(n+1)})]=\\&\sum_{i=1}^n v(\Delta\tilde{A}_i)[\mu(B_{\tau(i)})-\mu(B_{\tau(i+1)})].\end{aligned} \tag{15}$$

其中: $v(\Delta\tilde{A}_{\tau(1)}),v(\Delta\tilde{A}_{\tau(2)}),\cdots,v(\Delta\tilde{A}_{\tau(n)})$ 为 $v(\Delta\tilde{A}_1)$, $v(\Delta\tilde{A}_2),\cdots,v(\Delta\tilde{A}_n)$ 的一个置换, 使得对于任意的 i, 有 $v(\Delta\tilde{A}_{\tau(i)})\leqslant v(\Delta\tilde{A}_{\tau(i+1)})$; $B_{\tau(i)}=(x_{\tau(i)},x_{\tau(i+1)},\cdots,x_{\tau(n)})$ 且 $B_{\tau(n+1)}=0$.

容易证明, ITFNCI 算子的性质对于前景 ITFNCI 算子依然成立.

4　集成前景 ITFN 算子与 MULTIMOORA 的 ITFN 多属性群决策方法

对于一个决策群组集合为 $D=\{D_1,D_2,\cdots,D_h\}$ $(k=1,2,\cdots,h)$ 的 GMADM 问题, 假设有 m 个备选方案 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$, A_i 为第 i 个备选方案; n 个属性 $C=\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$, C_j 为第 j 个属性, 各属性之间满足加性独立且相对重要性程度一致. 一般地, 较常见的属性类型可以分为属性值越大越好的效益型和属性值越小越好的成本型两类, 用 I^u 和 I^c 分别代表效益型属性和成本型属性的下标集合, 满足 $I^u\bigcup I^c=I$ 且 $I^u\bigcap I^c=\varnothing$. 设决策者 D_k 利用直觉梯形模糊数 $\tilde{x}_{ij}^k=\langle[a_{ij}^k,b_{ij}^k,c_{ij}^k,d_{ij}^k];\mu_{ij}^k,\upsilon_{ij}^k\rangle$ 给出备选方案 $A_i\in A(i=1,2,\cdots,m)$ 下属性 $C_j\in C(j=1,2,\cdots,n)$ 的评估值, 得到直觉梯形模糊决策矩阵 $\boldsymbol{X}^k=[\tilde{x}_{ij}^k]_{m\times n}$, 试确定方案的排序并择优.

本文提出基于直觉梯形模糊数的集成前景 ITFNCI 算子与 MULTIMOORA 的多属性群决策的步骤如下.

Step 1　决策者利用直觉梯形模糊数进行不同方案下的属性值评估, 确定 h 个直觉梯形模糊决策矩阵

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{X}^1=[\tilde{x}_{ij}^1]_{m\times n},\ \boldsymbol{X}^2=[\tilde{x}_{ij}^2]_{m\times n},\ \cdots,\\&\boldsymbol{X}^h=[\tilde{x}_{ij}^h]_{m\times n},\\&i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n,\ k=1,2,\cdots,h,\end{aligned} \tag{16}$$

其中

$$\tilde{x}_{ij}^k=\langle[a_{ij}^k,b_{ij}^k,c_{ij}^k,d_{ij}^k];\mu_{ij}^k,\upsilon_{ij}^k\rangle. \tag{17}$$

Step 2　根据前景理论, 当决策者针对备选方案的不同属性 $C=\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$ 进行评价时, 存在不同的属性值参考点, 可将其设定为

$$\tilde{R}_j^k=([a_j^k,b_j^k,c_j^k,d_j^k];\mu_j^k,\upsilon_j^k). \tag{18}$$

根据定义 6 计算关于 $\tilde{x}_{ij}^k$ 的直觉梯形模糊前景效应

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{x}_{ij}^k=\tilde{x}_{ij}^k\ominus\tilde{R}_j^k=&([a_{ij}^k-d_j^k,b_{ij}^k-c_j^k,c_{ij}^k-b_j^k,\\&d_{ij}^k-a_j^k];\mu_{\tilde{x}_{ij}^k\ominus\tilde{R}_j^k},\upsilon_{\tilde{x}_{ij}^k\ominus\tilde{R}_j^k}).\end{aligned} \tag{19}$$

Step 3 决策者面临风险时对风险持有的态度和对未来收益或者损失的预期存在差异, 导致属性参考点不同. 根据定义7中关于直觉梯形模糊前景价值函数的描述, 可利用直觉梯形模糊前景效应将直觉梯形模糊决策矩阵转化为直觉梯形模糊前景决策矩阵

$$\mathrm{PX}^1=[v(\Delta\tilde{x}_{ij}^1)]_{m\times n},\ \mathrm{PX}^2=[v(\Delta\tilde{x}_{ij}^2)]_{m\times n},\ \cdots,\ \mathrm{PX}^h=[v(\Delta\tilde{x}_{ij}^h)]_{m\times n},$$
$$i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n,\ k=1,2,\cdots,h. \tag{20}$$

其中

$$v(\Delta\tilde{x}_{ij}^k)=\begin{cases}(\Delta\tilde{x}_{ij}^k)^\alpha=\langle[\mathrm{sgn}(a_{ij}^k-d_j^k)|a_{ij}^k-d_j^k|^\alpha,\mathrm{sgn}(b_{ij}^k-c_j^k)|b_{ij}^k-c_j^k|^\alpha,\mathrm{sgn}(c_{ij}^k-b_j^k)|c_{ij}^k-b_j^k|^\alpha,\\ \quad\mathrm{sgn}(d_{ij}^k-a_j^k)|d_{ij}^k-a_j^k|^\alpha];\mu_{\tilde{x}_{ij}^k\ominus\tilde{R}_j^k},\upsilon_{\tilde{x}_{ij}^k\ominus\tilde{R}_j^k}\rangle,\ S(\Delta\tilde{x}_{ij}^k)\geqslant 0;\\ -\theta(-\Delta\tilde{x}_{ij}^k)^\beta=\langle[\theta\mathrm{sgn}(d_{ij}^k-a_j^k)|d_{ij}^k-a_j^k|^\beta,\theta\mathrm{sgn}(c_{ij}^k-b_j^k)|c_{ij}^k-b_j^k|^\beta,\\ \quad\theta\mathrm{sgn}(b_{ij}^k-c_j^k)|b_{ij}^k-c_j^k|^\beta,\theta\mathrm{sgn}(a_{ij}^k-d_j^k)|a_{ij}^k-d_j^k|^\beta];\mu_{\tilde{x}_{ij}^k\ominus\tilde{R}_j^k},\upsilon_{\tilde{x}_{ij}^k\ominus\tilde{R}_j^k}\rangle,\ S(\Delta\tilde{x}_{ij}^k)<0.\end{cases} \tag{21}$$

为了后续表述便利, 记

$$(\mu_{xR})_k=\mu_{\tilde{x}_{ij}^k\ominus\tilde{R}_j^k},\ (\upsilon_{xR})_k=\upsilon_{\tilde{x}_{ij}^k\ominus\tilde{R}_j^k}.$$

Step 4 由历史样本信息评定决策者和决策群组的模糊测度, 然后利用前景ITFNCI算子集结所有决策矩阵信息, 具体如下:

$$\int v(\Delta\tilde{x}_{ij}^k)\mathrm{d}\mu=\mathrm{CITFNCI}(v(\Delta\tilde{x}_{ij}^1),v(\Delta\tilde{x}_{ij}^2),\cdots,v(\Delta\tilde{x}_{ij}^h))=$$
$$v(\Delta\tilde{x}_{ij}^{\tau(1)})[\mu(H_{\tau(1)})-\mu(H_{\tau(2)})]\oplus v(\Delta\tilde{x}_{ij}^{\tau(2)})[\mu(H_{\tau(2)})-\mu(H_{\tau(3)})]\oplus\cdots\oplus v(\Delta\tilde{x}_{ij}^{\tau(h)})[\mu(H_{\tau(h)})-\mu(H_{\tau(h+1)})]=$$
$$\sum_{k=1}^h v(\Delta\tilde{x}_{ij}^{\tau(k)})[\mu(H_{\tau(k)})-\mu(H_{\tau(k+1)})]. \tag{22}$$

其中: $v(\Delta\tilde{x}_{ij}^{\tau(1)}),v(\Delta\tilde{x}_{ij}^{\tau(2)}),\cdots,v(\Delta\tilde{x}_{ij}^{\tau(h)})$ 为 $v(\Delta\tilde{x}_{ij}^1)$, $v(\Delta\tilde{x}_{ij}^2),\cdots,v(\Delta\tilde{x}_{ij}^h)$ 的一个置换, 使得对于任意的k, 有 $v(\Delta\tilde{x}_{ij}^{\tau(k)})\leqslant v(\Delta\tilde{x}_{ij}^{\tau(k+1)})$; $H_{(k)}=(D_k,D_{k+1},\cdots,D_h)$ 且 $H_{(h+1)}=0$. 进而, 可得到综合的前景ITFNCI算子决策矩阵

$$\mathrm{CPX}=(\widetilde{\mathrm{cpx}}_{ij})_{m\times n}=[\mathrm{CITFNCI}(v(\Delta\tilde{x}_{ij}^1),v(\Delta\tilde{x}_{ij}^2),\cdots,v(\Delta\tilde{x}_{ij}^h))]_{m\times n}=$$
$$\begin{cases}(pa_{ij},pb_{ij},pc_{ij},pd_{ij};p\mu_{ij},p\upsilon_{ij}),\ S(\Delta\tilde{x}_{ij}^k)\geqslant 0;\\(pa_{ij}^\theta,pb_{ij}^\theta,pc_{ij}^\theta,pd_{ij}^\theta;p\mu_{ij}^\theta,p\upsilon_{ij}^\theta),\ S(\Delta\tilde{x}_{ij}^k)<0.\end{cases}$$

其中

$$pa_{ij}=\sum_{k=1}^h\mathrm{sgn}(a_{ij}^{\tau(k)}-d_j^{\tau(k)})|a_{ij}^{\tau(k)}-d_j^{\tau(k)}|^\alpha\Delta\mu_{\tau(k)},$$
$$pb_{ij}=\sum_{k=1}^h\mathrm{sgn}(b_{ij}^{\tau(k)}-c_j^{\tau(k)})|b_{ij}^{\tau(k)}-c_j^{\tau(k)}|^\alpha\Delta\mu_{\tau(k)},$$
$$pc_{ij}=\sum_{k=1}^h\mathrm{sgn}(c_{ij}^{\tau(k)}-b_j^{\tau(k)})|c_{ij}^{\tau(k)}-b_j^{\tau(k)}|^\alpha\Delta\mu_{\tau(k)},$$
$$pd_{ij}=\sum_{k=1}^h\mathrm{sgn}(d_{ij}^{\tau(k)}-a_j^{\tau(k)})|d_{ij}^{\tau(k)}-a_j^{\tau(k)}|^\alpha\Delta\mu_{\tau(k)},$$
$$p\mu_{ij}=\sum_{k=1}^h[\|\Delta\tilde{x}_{ij}^{\tau(k)}\|]^\alpha(\mu_{xR})_{\tau(k)}\Big/\sum_{k=1}^h[\|\Delta\tilde{x}_{ij}^{\tau(k)}\|]^\alpha,$$
$$p\upsilon_{ij}=\sum_{k=1}^h[\|\Delta\tilde{x}_{ij}^{\tau(k)}\|]^\alpha(\upsilon_{xR})_{\tau(k)}\Big/\sum_{k=1}^h[\|\Delta\tilde{x}_{ij}^{\tau(k)}\|]^\alpha,$$
$$pa_{ij}^\theta=\sum_{k=1}^h\theta\mathrm{sgn}(d_{ij}^{\tau(k)}-a_j^{\tau(k)})|d_{ij}^{\tau(k)}-a_j^{\tau(k)}|^\beta\Delta\mu_{\tau(k)},$$
$$pb_{ij}^\theta=\sum_{k=1}^h\theta\mathrm{sgn}(c_{ij}^{\tau(k)}-b_j^{\tau(k)})|c_{ij}^{\tau(k)}-b_j^{\tau(k)}|^\beta\Delta\mu_{\tau(k)},$$
$$pc_{ij}^\theta=\sum_{k=1}^h\theta\mathrm{sgn}(b_{ij}^{\tau(k)}-c_j^{\tau(k)})|b_{ij}^{\tau(k)}-c_j^{\tau(k)}|^\beta\Delta\mu_{\tau(k)},$$
$$pd_{ij}^\theta=\sum_{k=1}^h\theta\mathrm{sgn}(a_{ij}^{\tau(k)}-d_j^{\tau(k)})|a_{ij}^{\tau(k)}-d_j^{\tau(k)}|^\beta\Delta\mu_{\tau(k)},$$
$$p\mu_{ij}^\theta=\frac{\sum_{k=1}^h[-\theta\|\Delta\tilde{x}_{ij}^{\tau(k)}\|]^\beta(\mu_{xR})_{\tau(k)}}{\sum_{k=1}^h[-\theta\|\Delta\tilde{x}_{ij}^{\tau(k)}\|]^\beta},$$
$$p\upsilon_{ij}^\theta=\frac{\sum_{k=1}^h[-\theta\|\Delta\tilde{x}_{ij}^{\tau(k)}\|]^\beta(\upsilon_{xR})_{\tau(k)}}{\sum_{k=1}^h[-\theta\|\Delta\tilde{x}_{ij}^{\tau(k)}\|]^\beta},$$
$$\Delta\mu_{\tau(k)}=\mu(H_{\tau(k)})-\mu(H_{\tau(k+1)}),$$
$$i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n.$$

Step 1 ∼ Step 4将对应于各决策者的直觉梯形模糊决策矩阵前景化, 进而通过前景ITFNCI算子集结获取综合的前景ITFNCI算子决策矩阵, 为MULTIMOORA方法的有效应用奠定了基础. 为了提升多属性决策鲁棒性, Brauers等[16]提出了MOORA方法, 分别利用比率法(RS)和参照点法(RP)获取基于综合决策信息的方案排序, 进而根据优势理论获取最终方案排序结果. MULTIMOORA方法对MOORA方法进行改进, 在其基础上引入全乘模型(FMF)处理综合决策信息, 获得方案排序. 集成3种排序方法的MULTIMOORA方法较MOORA方法得到的结果更

准确, 具备强鲁棒性. 为节约篇幅, 将 MULTIMOORA 方法与本文基于前景 ITFNCI 算子的多属性决策问题相融合, 在 Step 5 ∼ Step 9 中详细阐述了方法的实现过程.

Step 5　MULTIMOORA 方法的前两种排序方法均要求消除综合前景 ITFNCI 算子决策矩阵 CPX 中不同量纲之间的差异, 为此, 首要步骤是对 CPX 进行标准化处理, 计算得到标准化的综合前景 ITFNCI 算子决策矩阵为

$$\begin{aligned}&\mathrm{NCPX}=(\widetilde{\mathrm{ncpx}}_{ij})_{m\times n}=\\&[\mathrm{NCITFNCI}(v(\Delta\tilde{x}_{ij}^1),v(\Delta\tilde{x}_{ij}^2),\cdots,v(\Delta\tilde{x}_{ij}^h))]_{m\times n}=\\&\begin{cases}\Big(\dfrac{pa_{ij}}{D_j},\dfrac{pb_{ij}}{D_j},\dfrac{pc_{ij}}{D_j},\dfrac{pd_{ij}}{D_j};p\mu_{ij},p\upsilon_{ij}\Big),\ S(\Delta\tilde{x}_{ij}^k)\geqslant 0\\ \Big(\dfrac{pa_{ij}^\theta}{D_j^\theta},\dfrac{pb_{ij}^\theta}{D_j^\theta},\dfrac{pc_{ij}^\theta}{D_j^\theta},\dfrac{pd_{ij}^\theta}{D_j^\theta};p\mu_{ij}^\theta,p\upsilon_{ij}^\theta\Big),\ S(\Delta\tilde{x}_{ij}^k)<0\end{cases}=\\&\begin{cases}(pa_{ij}^*,pb_{ij}^*,pc_{ij}^*,pd_{ij}^*;p\mu_{ij},p\upsilon_{ij}),\ S(\Delta\tilde{x}_{ij}^k)\geqslant 0;\\(pa_{ij}^{\theta*},pb_{ij}^{\theta*},pc_{ij}^{\theta*},pd_{ij}^{\theta*};p\mu_{ij}^\theta,p\upsilon_{ij}^\theta),\ S(\Delta\tilde{x}_{ij}^k)<0.\end{cases}\end{aligned}\tag{23}$$

其中

$$D_j=\Big(\sum_{i=1}^m[(pa_{ij})^2+(pb_{ij})^2+(pc_{ij})^2+(pd_{ij})^2]\Big)^{1/2},$$

$$D_j^\theta=\Big(\sum_{i=1}^m[(pa_{ij}^\theta)^2+(pb_{ij}^\theta)^2+(pc_{ij}^\theta)^2+(pd_{ij}^\theta)^2]\Big)^{1/2},$$

$$i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n.$$

容易验证, 标准化处理后各属性的正 (逆) 向保持不变.

Step 6　比率法. 利用标准化决策矩阵 NCPX, 计算得到第 i 个决策方案下的综合属性值为

$$\begin{aligned}&\tilde{y}_i^*=\\&\sum_{j\in I^u}(pa_{ij}^*,pb_{ij}^*,pc_{ij}^*,pd_{ij}^*;p\mu_{ij},p\upsilon_{ij})\ominus\\&\sum_{j\in I^c}(pa_{ij}^{\theta*},pb_{ij}^{\theta*},pc_{ij}^{\theta*},pd_{ij}^{\theta*};p\mu_{ij}^\theta,p\upsilon_{ij}^\theta)=\\&\Big\langle\sum_{j\in I^u}pa_{ij}^*-\sum_{j\in I^c}pd_{ij}^{\theta*},\sum_{j\in I^u}pb_{ij}^*-\sum_{j\in I^c}pc_{ij}^{\theta*},\\&\sum_{j\in I^u}pc_{ij}^*-\sum_{j\in I^c}pb_{ij}^{\theta*},\sum_{j\in I^u}pd_{ij}^*-\sum_{j\in I^c}pa_{ij}^{\theta*};\\&\Bigg(\frac{\|\widetilde{cp}_{ij}^*\|\Big(\sum\limits_{j\in I^u}\|\tilde{p}_{ij}^*\|p\mu_{ij}\Big)}{\sum\limits_{j\in I^u}\|\tilde{p}_{ij}^*\|}+\frac{\|\widetilde{cp}_{ij}^{\theta*}\|\Big(\sum\limits_{j\in I^c}\|\tilde{p}_{ij}^{\theta*}\|p\mu_{ij}^\theta\Big)}{\sum\limits_{j\in I^c}\|\tilde{p}_{ij}^{\theta*}\|}\Bigg)\Big/\\&(\|\widetilde{cp}_{ij}^*\|+\|\widetilde{cp}_{ij}^{\theta*}\|),\\&\Bigg(\frac{\|\widetilde{cp}_{ij}^*\|\Big(\sum\limits_{j\in I^u}\|\tilde{p}_{ij}^*\|p\upsilon_{ij}\Big)}{\sum\limits_{j\in I^u}\|\tilde{p}_{ij}^*\|}+\frac{\|\widetilde{cp}_{ij}^{\theta*}\|\Big(\sum\limits_{j\in I^c}\|\tilde{p}_{ij}^{\theta*}\|p\upsilon_{ij}^\theta\Big)}{\sum\limits_{j\in I^c}\|\tilde{p}_{ij}^{\theta*}\|}\Bigg)\Big/\\&(\|\widetilde{cp}_{ij}^*\|+\|\widetilde{cp}_{ij}^{\theta*}\|)\Big\rangle.\end{aligned}\tag{24}$$

其中

$$\begin{aligned}&\|\tilde{p}_{ij}^*\|=(pa_{ij}^*+pb_{ij}^*+pc_{ij}^*+pd_{ij}^*)/4,\\&\|\tilde{p}_{ij}^{\theta*}\|=(pa_{ij}^{\theta*}+pb_{ij}^{\theta*}+pc_{ij}^{\theta*}+pd_{ij}^{\theta*})/4,\\&\|\widetilde{cp}_{ij}^*\|=\sum_{j\in I^u}(pa_{ij}^*+pb_{ij}^*+pc_{ij}^*+pd_{ij}^*)/4,\\&\|\widetilde{cp}_{ij}^{\theta*}\|=\sum_{j\in I^c}(pa_{ij}^{\theta*}+pb_{ij}^{\theta*}+pc_{ij}^{\theta*}+pd_{ij}^{\theta*})/4,\\&\qquad i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n.\end{aligned}$$

式 (24) 中, $\tilde{y}_i^*$ 表示第 i 个决策方案所有属性的综合前景收益值, 由文献 [12] 的相关定义可计算得到每个 $\tilde{y}_i^*$ 的得分函数和精确函数, 由此可对 $\tilde{y}_i^*(i=1,2,\cdots,m)$ 进行排序.

Step 7　参照点法. 选取参照点时, 由直觉梯形模糊数的得分函数和精确函数的定义, 对各属性在不同方案下的前景效应值进行比选排序. 若 $j\in I^u$, 则选取该属性所有前景效应值中最大的元素 $\tilde{t}_j^{u*}$ 作为参照点; 若 $j\in I^c$, 则选取该属性所有前景效应值中最小的元素 $\tilde{t}_j^{c*}$ 作为参照点. 由此得到针对所有属性的参照点 $\tilde{t}^*=(\tilde{t}_1^*,\tilde{t}_2^*,\cdots,\tilde{t}_n^*)$, 其中

$$\tilde{t}_j^*=\begin{cases}\tilde{t}_j^{u*}=\max(\widetilde{\mathrm{ncpx}}_{ij}),i\in N,j\in I^u;\\\tilde{t}_j^{c*}=\min(\widetilde{\mathrm{ncpx}}_{ij}),i\in N,j\in I^c.\end{cases}$$

下一步需要度量每一个备选方案 A_i 与参照点之间的距离 $d(\tilde{t}_j^*,A_i)$. 利用 Minkowski 度量方法[14]可以将该距离表示为

$$d(\tilde{t}_j^*,A_i)=\Big\{\sum_{j=1}^n(\tilde{t}_j^*\ominus\widetilde{\mathrm{ncpx}}_{ij})^\phi\Big\}^{1/\phi},\ \phi\in N^+.\tag{25}$$

当 $\phi=1$ 时, 定义的距离称为绝对距离. 假设某参照点为 $(10,10)$, 则点 $(10,0)$、$(0,10)$ 和 $(5,5)$ 到参照点的距离均为 10, 即基于绝对距离的优化排序结果不理想, 鲁棒性较差. 当 $\phi=2$ 时, 定义的距离称为欧氏距离, 一般的 TOPSIS 法均是基于欧氏距离进行计算的. 类似可以验证, 基于欧氏距离的优化排序问题鲁棒性也较差. 文献 [23-25] 指出, 在式 (26) 中, 随着 ϕ 值的增大, 基于该距离的优化排序问题的鲁棒性将呈上升趋势, 因此, 取 $\phi\to\infty$, 此时 Minkowski 度量称为 Tchebycheff 度量, 即

$$d(\tilde{t}_j^*,A_i)=\max_{1\leqslant j\leqslant n}|\tilde{t}_j^*\ominus\widetilde{\mathrm{ncpx}}_{ij}|.$$

实际上, 利用直觉梯形模糊数的 Hamming 距离公式[12], 可以计算标准化决策矩阵中每个决策方案到参照点的 Tchebycheff 距离, 即

$$d_i(\tilde{t}^*,\widetilde{\mathrm{ncpx}}_{ij})=\max_{1\leqslant j\leqslant n}d(\tilde{t}_j^*,\widetilde{\mathrm{ncpx}}_{ij}).$$

进而得到参照点法的排序结果.

Step 8　全乘模型. 结合直觉梯形模糊数的相关运算规则, 计算综合的前景 ITFNCI 算子决策矩阵

CPX 中第 i 个决策方案关于效益型属性的综合前景收益值为 $\tilde{U}_i^+ = \prod_{j\in I^u} \widetilde{\mathrm{ncpx}}_{ij}$. 关于成本型属性的综合前景收益值为 $\tilde{U}_i^- = \prod_{j\in I^c} \widetilde{\mathrm{ncpx}}_{ij}$. 因此, 可获取 NCPX 中第 i 个决策方案的综合前景收益值为

$$\tilde{U}_i = \tilde{U}_i^+ / \tilde{U}_i^-,\ i = 1, 2, \cdots, m.$$

类似 Step 6 和 Step 7, 可以计算得到每个 $\tilde{U}_i$ 的得分函数和精确函数, 进而对各决策方案的综合前景收益值 $\tilde{U}_i(i = 1, 2, \cdots, m)$ 进行排序. 前文提到, 若 $\tilde{U}_i^- = 0,\ i = 1, 2, \cdots, m$, 即原始决策矩阵中, 方案 A_i 在属性 C_j 下的值 $\tilde{x}_{ij}^k = 0$, 则此时全乘模型失去意义. 事实上, 含 0 与跨 0 直觉梯形模糊数均可使全乘模型失去意义. 然而, 在实际的决策问题中, 出现含 0 与跨 0 直觉梯形模糊数较为罕见, 在决策过程中对于此类情形应注意规避[20].

Step 9 在 MULTIMOORA 方法中, RS、RP、FMF 排序方法具有同等重要性, 文献 [20] 通过将优势理论 (DT) 与基于字典法则的简单多数决制、排序相关系数法进行对比, 详细阐述了 DT 方法的综合排序确定规则. 与 PROMETHEE、ELECTRE 等方法不同, 其基本思想在于两两比较各方案下 3 类排序结果所构成的三元数组中的广义优势关系. 因此, 本文基于 DT, 将 Step 6 ～ Step 8 中利用 3 种方法所得的排序结果进行综合排序, 以该排序作为直觉梯形模糊多属性决策问题的最终排序, 确定最优方案.

5 案例分析

假设某部对高超声速飞行器的姿态控制性能展开评估, 待评估的 3 类高超声速飞行器分别为 A_1、A_2、A_3. 考察动态品质 (C_1)、参数摄动适应性 (C_2)、外界干扰适应性 (C_3) 和工程实现性 (C_4) 等 4 个属性 (均为效益型指标) 对于高超声速飞行器姿态控制性能的影响. 参与评估的 3 位专家分别来自总体设计单位 (E_1)、推进技术设计单位(E_2)、空气动力设计单位(E_3). 假定专家利用直觉梯形模糊数给出 3 类飞行器的各属性评估值, 采用本文方法的具体步骤如下.

Step 1 确定 3 位专家的直觉梯形模糊决策矩阵 $\boldsymbol{X}^1, \boldsymbol{X}^2$ 和 $\boldsymbol{X}^3$, 分别如表 1 ～ 表 3 所示.

Step 2 决策者针对备选方案的不同属性 $C = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ 给出各自的预期, 即设定属性值参考点, 如表 4 所示.

表 1 决策者 E_1 提供的直觉梯形模糊决策矩阵 $\boldsymbol{X}^1$

飞行器类型	评估属性			
	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	$\langle[1,2,3,4];0.7,0.2\rangle$	$\langle[3,5,6,8];0.6,0.3\rangle$	$\langle[1,3,5,6];0.7,0.2\rangle$	$\langle[2,3,5,6];0.6,0.2\rangle$
A_2	$\langle[3,4,5,6];0.8,0.1\rangle$	$\langle[2,5,6,7];0.7,0.3\rangle$	$\langle[4,5,7,8];0.8,0.2\rangle$	$\langle[3,4,6,7];0.7,0.2\rangle$
A_3	$\langle[1,3,6,8];0.6,0.2\rangle$	$\langle[1,2,3,4];0.8,0.2\rangle$	$\langle[2,3,4,5];0.6,0.4\rangle$	$\langle[1,3,4,5];0.7,0.1\rangle$

表 2 决策者 E_2 提供的直觉梯形模糊决策矩阵 $\boldsymbol{X}^2$

飞行器类型	评估属性			
	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	$\langle[3,5,7,8];0.8,0.2\rangle$	$\langle[1,3,4,6];0.7,0.2\rangle$	$\langle[1,3,5,6];0.7,0.2\rangle$	$\langle[2,4,5,6];0.7,0.2\rangle$
A_2	$\langle[1,3,5,7];0.7,0.1\rangle$	$\langle[2,5,6,7];0.8,0.0\rangle$	$\langle[3,5,6,8];0.5,0.3\rangle$	$\langle[3,5,6,8];0.6,0.3\rangle$
A_3	$\langle[2,4,6,8];0.6,0.4\rangle$	$\langle[4,5,7,8];0.5,0.2\rangle$	$\langle[2,3,5,6];0.8,0.2\rangle$	$\langle[2,3,4,6];0.7,0.1\rangle$

表 3 决策者 E_3 提供的直觉梯形模糊决策矩阵 $\boldsymbol{X}^3$

飞行器类型	评估属性			
	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	$\langle[1,2,3,4];0.7,0.2\rangle$	$\langle[1,3,5,6];0.7,0.2\rangle$	$\langle[2,3,5,6];0.8,0.2\rangle$	$\langle[1,3,5,7];0.7,0.1\rangle$
A_2	$\langle[1,3,4,5];0.8,0.1\rangle$	$\langle[2,3,4,5];0.8,0.2\rangle$	$\langle[1,2,3,5];0.7,0.3\rangle$	$\langle[2,5,6,7];0.8,0.0\rangle$
A_3	$\langle[2,3,4,7];0.6,0.2\rangle$	$\langle[1,2,3,5];0.7,0.1\rangle$	$\langle[4,5,7,8];0.8,0.2\rangle$	$\langle[2,3,4,5];0.7,0.3\rangle$

表 4 各决策者关于各属性的参考点

决策者	属性参考点	
	C_1	C_2
E_1	$\langle[1.67,3.12,4.58,5.92];0.71,0.17\rangle$	$\langle[1.95,3.98,5.12,6.35];0.69,0.27\rangle$
E_2	$\langle[2.05,3.95,5.99,7.64];0.69,0.23\rangle$	$\langle[2.35,4.36,5.67,7.00];0.67,0.13\rangle$
E_3	$\langle[1.35,2.59,3.62,5.23];0.69,0.17\rangle$	$\langle[1.35,2.66,3.98,5.23];0.73,0.17\rangle$

决策者	属性参考点	
	C_3	C_4
E_1	$\langle[2.33,3.67,5.25,6.37];0.71,0.23\rangle$	$\langle[2.12,3.23,5.01,5.96];0.67,0.16\rangle$
E_2	$\langle[2.12,3.68,5.36,6.76];0.69,0.22\rangle$	$\langle[2.33,4.05,5.13,6.69];0.67,0.19\rangle$
E_3	$\langle[2.35,3.27,4.96,6.19];0.77,0.23\rangle$	$\langle[1.67,3.65,4.95,6.23];0.73,0.13\rangle$

Step 3　利用直觉梯形模糊前景效应, 根据式 (21) 通过 Matlab 辅助运算得到参数取值 $\sigma = 2.25$、$\alpha = 0.89$ 和 $\beta = 0.92$ 下[31]的前景价值函数, 将直觉梯形模糊决策矩阵转化为直觉梯形模糊前景决策矩阵. 限于篇幅, 在此略去详细计算结果.

Step 4　由历史样本信息评定决策者和决策群组的模糊测度为

$$\mu(\varnothing) = 0,\ \mu(\{E_1\}) = 0.5,\ \mu(\{E_2\}) = 0.4,$$
$$\mu(\{E_3\}) = 0.5,\ \mu(\{E_1, E_2\}) = 0.7,\ \mu(\{E_1, E_3\}) = 0.8,$$
$$\mu(\{E_2, E_3\}) = 0.7,\ \mu(\{E_1, E_2, E_3\}) = 1.$$

进而根据式 (22) 获得综合的前景 ITFNCI 算子决策矩阵, 如表 5 所示.

Step 5　对综合的前景 ITFNCI 算子决策矩阵进行标准化处理, 结果如表 6 所示.

Step 6　利用标准化决策矩阵 NCPX, 计算得到决策方案 A_1、A_2、A_3 下的综合属性值分别为

$$\tilde{y}_1^* = \langle[-2.81, -1.16, 0.82, 2.44]; 0.70, 0.12\rangle,$$
$$\tilde{y}_2^* = \langle[-2.52, -0.66, 0.68, 2.77]; 0.70, 0.14\rangle,$$
$$\tilde{y}_3^* = \langle[-2.68, -1.18, 0.71, 2.54]; 0.68, 0.14\rangle.$$

分别计算各综合属性值的得分函数和精确函数为

$$S(\tilde{y}_1^*) = -0.10,\ H(\tilde{y}_1^*) = 0.02,\ S(\tilde{y}_2^*) = 0.04,$$
$$H(\tilde{y}_2^*) = 0.16,\ S(\tilde{y}_3^*) = -0.08,\ H(\tilde{y}_3^*) = 0.04.$$

对各方案进行比选, 得到方案排序为 $A_2 \succ A_3 \succ A_1$.

Step 7　通过计算表 6 中各决策方案属性值的得分函数, 得到各属性的参照点如表 7 所示. 计算各方案相应属性值到参照点的 Hamming 距离为

$$d(\tilde{t}_1^*, \widetilde{\text{ncpx}}_{11}) = 1.05,\ d(\tilde{t}_2^*, \widetilde{\text{ncpx}}_{12}) = 0.92,$$
$$d(\tilde{t}_3^*, \widetilde{\text{ncpx}}_{13}) = 0.39,\ d(\tilde{t}_4^*, \widetilde{\text{ncpx}}_{14}) = 1.64,$$
$$d(\tilde{t}_1^*, \widetilde{\text{ncpx}}_{21}) = 0.48,\ d(\tilde{t}_2^*, \widetilde{\text{ncpx}}_{22}) = 0,$$
$$d(\tilde{t}_3^*, \widetilde{\text{ncpx}}_{23}) = 0.79,\ d(\tilde{t}_4^*, \widetilde{\text{ncpx}}_{24}) = 0,$$
$$d(\tilde{t}_1^*, \widetilde{\text{ncpx}}_{31}) = 0,\ d(\tilde{t}_2^*, \widetilde{\text{ncpx}}_{32}) = 1.07,$$
$$d(\tilde{t}_3^*, \widetilde{\text{ncpx}}_{33}) = 0,\ d(\tilde{t}_4^*, \widetilde{\text{ncpx}}_{34}) = 1.51.$$

进而可得

$$d_1(\tilde{t}^*, \widetilde{\text{ncpx}}_{1j}) = \max_{1\leqslant j\leqslant 4} d(\tilde{t}_j^*, \widetilde{\text{ncpx}}_{1j}) = 1.64,$$
$$d_2(\tilde{t}^*, \widetilde{\text{ncpx}}_{2j}) = \max_{1\leqslant j\leqslant 4} d(\tilde{t}_j^*, \widetilde{\text{ncpx}}_{2j}) = 0.79,$$
$$d_3(\tilde{t}^*, \widetilde{\text{ncpx}}_{3j}) = \max_{1\leqslant j\leqslant 4} d(\tilde{t}_j^*, \widetilde{\text{ncpx}}_{3j}) = 1.51.$$

基于 Tchebycheff 距离越小方案越优的原则展开比选, 得到方案排序为 $A_2 \succ A_3 \succ A_1$.

Step 8　获取综合的前景 ITFNCI 算子决策矩阵

表 5　综合的前景 ITFNCI 算子决策矩阵 CPX

飞行器类型	评估属性	
	C_1	C_2
A_1	$\langle[-7.04, -3.06, 1.28, 5.08]; 0.71, 0.19\rangle$	$\langle[-4.89, -1.48, 1.40, 5.14]; 0.68, 0.19\rangle$
A_2	$\langle[-4.95, -1.74, 1.75, 4.75]; 0.71, 0.16\rangle$	$\langle[-3.54, -0.51, 1.63, 3.85]; 0.72, 0.23\rangle$
A_3	$\langle[-3.59, -1.15, 1.83, 4.86]; 0.64, 0.19\rangle$	$\langle[-6.77, -3.47, 0.54, 5.40]; 0.70, 0.21\rangle$
飞行器类型	评估属性	
	C_3	C_4
A_1	$\langle[-9.63, -4.50, 3.32, 7.50]; 0.71, 0.21\rangle$	$\langle[-8.95, -3.89, 3.22, 8.55]; 0.68, 0.17\rangle$
A_2	$\langle[-4.80, -2.06, -1.68, 4.96]; 0.72, 0.25\rangle$	$\langle[-3.23, -0.30, 2.17, 4.38]; 0.69, 0.16\rangle$
A_3	$\langle[-5.52, -2.39, 2.44, 5.57]; 0.72, 0.25\rangle$	$\langle[-9.05, -4.26, 0.93, 6.68]; 0.69, 0.16\rangle$

表 6　标准化的综合前景 ITFNCI 算子决策矩阵 NCPX

飞行器类型	评估属性	
	C_1	C_2
A_1	$\langle[-0.76, -0.33, 0.14, 0.55]; 0.71, 0.19\rangle$	$\langle[-0.66, -0.20, 0.19, 0.70]; 0.68, 0.19\rangle$
A_2	$\langle[-0.68, -0.24, 0.4, 0.65]; 0.71, 0.16\rangle$	$\langle[-0.64, -0.09, 0.30, 0.70]; 0.72, 0.23\rangle$
A_3	$\langle[-0.56, -0.18, 0.29, 0.76]; 0.64, 0.19\rangle$	$\langle[-0.72, -0.37, 0.06, 0.58]; 0.70, 0.21\rangle$
飞行器类型	评估属性	
	C_3	C_4
A_1	$\langle[-0.72, -0.34, 0.25, 0.56]; 0.71, 0.21\rangle$	$\langle[-0.67, -0.29, 0.24, 0.64]; 0.68, 0.17\rangle$
A_2	$\langle[-0.65, -0.28, -0.23, 0.67]; 0.72, 0.25\rangle$	$\langle[-0.55, -0.05, 0.37, 0.75]; 0.69, 0.16\rangle$
A_3	$\langle[-0.65, -0.28, 0.29, 0.65]; 0.72, 0.25\rangle$	$\langle[-0.75, -0.35, 0.08, 0.55]; 0.69, 0.16\rangle$

表 7　各属性的参照点 $\tilde{t}_j^*$

C_1	C_2
$\langle[-0.56, -0.18, 0.29, 0.76]; 0.64, 0.19\rangle$	$\langle[-0.64, -0.09, 0.30, 0.70]; 0.72, 0.23\rangle$
C_3	C_4
$\langle[-0.65, -0.28, 0.29, 0.65]; 0.72, 0.25\rangle$	$\langle[-0.55, -0.05, 0.37, 0.75]; 0.69, 0.16\rangle$

CPX 中各决策方案的综合前景收益值

$\tilde{U}_1 = \langle[-3118.8, -74.991, 79.277, 2979.4]; 0.23, 0.57\rangle,$

$\tilde{U}_2 = \langle[-414.02, -12.751, 12.678, 400.66]; 0.25, 0.59\rangle,$

$\tilde{U}_3 = \langle[-1643.7, -64.653, 66.005, 1658.6]; 0.22, 0.60\rangle.$

计算各综合属性值的得分函数分别为

$$S(\tilde{U}_1) = 100.32,\ S(\tilde{U}_2) = 9.92,\ S(\tilde{U}_3) = -10.86.$$

进而对各方案进行比选, 得到方案排序为 $A_1 \succ A_2 \succ A_3$.

Step 9 由优势理论可以获得最终排序如表 8 所示. 因此, 高超声速飞行器 A_2 的姿态控制性能最优.

表 8 基于 MULTIMOORA 方法的排序结果

飞行器类型	Ratio System	Reference Point	Full Multiplicative Form	MULTIMOORA (Final rank)
A_1	3	3	1	3
A_2	1	1	2	1
A_3	2	2	3	2

6 结 论

针对当前 ITFN 的运算规则存在的不足, 通过推导 ITFN 的减法、数乘、幂乘和除法公式进一步完善既有运算规则, 提升多属性直觉梯形模糊决策方法的普适性和延拓性. 在此基础上, 定义了 ITFN 的 Choquet 积分算子, 并证明了其相关性质, 进一步考虑决策者有限理性的决策行为特征, 定义前景 ITFNCI 算子. 针对决策者信息关联的 GMADM 问题, 通过引入 MULTIMOORA 方法构建基于前景 ITFNCI 算子的群体决策模型, 详细阐述了其实现步骤. 该方法通过定义基于 ITFN 的前景效应和前景价值函数, 构造前景 ITFNCI 算子, 根据历史样本信息评定决策者和决策群组的模糊测度, 即可获得基于前景 ITFNCI 算子的综合各决策者信息的决策矩阵, 在一定程度上避免了主观设定决策者权重所导致的结论偏差. 此外, MULTIMOORA 方法作为 RS、RP、FMF 三类排序方式的集成, 多次无重复利用标准化综合前景决策矩阵, 极大地克服了使用单一排序方法造成的鲁棒性较低的问题, 大幅提升了决策结论的合理性和可信性. 最后, 考虑简化规模化的基于前景 ITFNCI 算子的群体 MULTIMOORA 决策方法的复杂度, 编制了相应的 Matlab 程序辅助决策.

本文方法广泛适用于直觉模糊数及其拓展模糊数的多属性决策问题, 在后续研究中, 将从考虑属性相对重要性程度不一致的情形入手, 对 MULTIMOORA 方法进行相应的改进, 寻求更为有效的排序信息融合方法, 并通过应用于运作管理、风险控制等决策问题, 分析其适用性, 并结合反馈信息机制对模型进行必要修正.

参考文献(References)

[1] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[2] Xu Z S, Yager R R. Intuitionistic and interval-valued intutionistic fuzzy preference relations and their measures of similarity for the evaluation of agreement within a group[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2009, 8(2): 123-139.

[3] Xu Z S. A method based on distance measure for interval-valued intuitionistic fuzzy group decision making[J]. Information Sciences, 2010, 180(1): 181-190.

[4] Xu Z S. Intuitionistic fuzzy multiattribute decision making: An interactive method[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2012, 20(3): 514-525.

[5] Xu Z S, Xia M M. Identifying and eliminating dominated alternatives in multi-attribute decision making with intuitionistic fuzzy information[J]. Applied Soft Computing, 2012, 12(4): 1451-1456.

[6] Xu Z S. A deviation-based approach to intuitionistic fuzzy multiple attribute group decision making[J]. Group Decision and Negotiation, 2010, 19(1): 57-76.

[7] Xu Z S. Models for multiple attribute decision making with intuitionistic fuzzy information[J]. Int J of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge Based Systems, 2007, 15(3): 285-297.

[8] 王坚强. 模糊多准则决策方法研究综述[J]. 控制与决策, 2008, 23(6): 601-607.
(Wang J Q. Overview on fuzzy multi-criteria decision-making approach[J]. Control and Decision, 2008, 23(6): 601-607.)

[9] 万树平. 直觉模糊多属性决策方法综述[J]. 控制与决策, 2010, 25(11): 1601-1606.
(Wan S P. Survey on intuitionistic fuzzy multi-attribute decision making approach[J]. Control and Decision, 2010, 25(11): 1601-1606.)

[10] Wan S P. Power average operators of trapezoidal intuitionistic fuzzy numbers and application to multi-attribute group decision making[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(6): 4112-4126.

[11] Wu J, Cao Q W. Same families of geometric aggregation operators with intuitionistic trapezoidal fuzzy numbers[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(1/2): 318-327.

[12] 王坚强, 聂荣荣. 基于直觉梯形模糊信息的多准则群决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(8): 1747-1753.
(Wang J Q, Nie R R. Multi-criteria group decision-making method based on intuitionistic trapezoidal fuzzy information[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2012, 32(8): 1747-1753.)

[13] 万树平, 张小路. 基于加权可能性均值的直觉梯形模糊数矩阵博弈求解方法[J]. 控制与决策, 2012, 27(8): 1121-1132.
(Wan S P, Zhang X L. Method based on weighted possibility mean for solving matrix games with payoffs of intuitionistic trapezoidal fuzzy numbers[J]. Control and Decision, 2012, 27(8): 1121-1132.)

[14] Zhang X, Jin F, Liu P D. A grey relational projection method for multi-attribute decision making based on intuitionistic trapezoidal fuzzy number[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(5): 3467-3477.

[15] Ye J. Expected value method for intuitionistic trapezoidal fuzzy multicriteria decision-making problems[J]. Expert Systems with Applications, 2011, 38(9): 11730-11734.

[16] Brauers W K M, Zavadskas E K. The MOORA method and its application to privatization in a transition economy[J]. Control and Cybernetics, 2006, 25(2): 445-469.

[17] Brauers W K M, Zavadskas E K. Project management by MULTIMOORA as an instrument for transition economies[J]. Technological and Economic Development of Economy, 2010, 16(1): 5-24.

[18] Chakraborty S. Applications of the MOORA method for decision making in manufacturing environment[J]. Int J of Advanced Manufacturing Technology, 2011, 54(9/10/11/12): 1155-1166.

[19] Karande, P, Chakraborty S. Application of multi-objective optimization on the basis of ratio analysis(MOORA) method for materials selection[J]. Materials & Design, 2012, 37: 317-324.

[20] Brauers W K M, Zavadskas E K. Robustness of MULTIMOORA: A method for multi-objective optimization[J]. Informatica, 2012, 23(1): 1-25.

[21] Brauers, W K M. Project management for a country with multiple objectives[J]. Czech Economic Review, 2012, 6(1): 80-101.

[22] Brauers W K M, Ginevivius R. Robustness in regional development studies: The case of Lithuania[J]. J of Business Economics and Management, 2009, 10(2): 121-140.

[23] Brauers W K M, Zavadskas E K. MULTIMOORA optimization used to decide on a bank loan to buy property[J]. Technological and Economic Development of Economy, 2011, 17(1): 174-188.

[24] Baležentis A, Baležentis T, Brauers W K M. Personnel selection based on computing with words and fuzzy MULTIMOORA[J]. Expert Systems with Applications, 2012, 39(9): 7961-7967.

[25] Tomas B, Zeng S Z. Group multi-criteria decision making based upon interval-valued fuzzy numbers: An extension of the MULTIMOORA method[J]. Expert Systems with Applications, 2013, 40(2): 543-550.

[26] Shu M H, Cheng C H, Chang J R. Using intuitionistic fuzzy sets for fault-tree analysis on printed circuit board assembly[J]. Microelectronics Reliability, 2006, 46(12): 2139-2148.

[27] 陶长琪, 凌和良. 基于Choquet积分的模糊数直觉模糊数多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2012, 27(9): 1381-1386.
(Tao C Q, Ling H L. Approach for multiple attribute decision-making with fuzzy-number-intuitionstic-fuzzy-number based on Choquet integral[J]. Control and Decision, 2012, 27(9): 1381-1386.)

[28] 樊治平, 陈发动, 张晓. 基于累积前景理论的混合型多属性决策方法[J]. 系统工程学报, 2012, 27(3): 295-301.
(Fan Z P, Chen F D, Zhang X. Method for hybrid multiple attribute decision making based on cumulative prospect theory[J]. J of Systems Engineering, 2012, 27(3): 295-301.)

[29] 樊治平, 刘洋, 沈荣鉴. 基于前景理论的突发事件应急响应的风险决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(5): 977-984.
(Fan Z P, Liu Y, Shen R J. Risk decision analysis method for emergency response based on prospect theory[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2012, 32(5): 977-984.)

[30] 张晓, 樊治平. 一种基于前景随机占优准则的随机多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2010, 25(12): 1875-1879.
(Zhang X, Fan Z P. Method for stochastic multiple attribute decision making based on prospect stochastic dominance rule[J]. Control and Decision, 2010, 25(12): 1875-1879.)

[31] Liu P D, Jin F, Zhang X, et al. Research on the multi-attribute decision-making under risk with interval probability based on prospect theory and the uncertain linguistic variables[J]. Knowledge-Based Systems, 2011, 24(4): 554-561.

(责任编辑: 郑晓蕾)