第32卷 第4期 天 津 工 业 大 学 学 报 Vol.32 No.4
2013年8月 JOURNAL OF TIANJIN POLYTECHNIC UNIVERSITY August 2013

带有时变时滞的非线性系统的指数稳定

杨凤伟，董亚丽
（天津工业大学 理学院，天津 300387）

摘 要： 研究一类带有时变时滞的非线性系统的指数稳定性问题.通过构造适当的Lyapunov-Krasovskii泛函，并结合使用Newton-Leibniz公式和自由权方法，对这类系统建立了以线性矩阵不等式表达的依时滞的指数稳定的新的充分条件；对于带有常时滞的一类非线性系统，给出了系统指数稳定的判据，并以数值例说明所获结果的有效性.

关键词： 非线性系统；指数稳定；时变时滞；Lyapunov-Krasovskii泛函；线性矩阵不等式(LMI)

中图分类号： O17 **文献标志码：** A **文章编号：** 1671-024X(2013)04-0085-04

Exponential stability of nonlinear systems with time-varying delays

YANG Feng-wei, DONG Ya-li
(School of Science, Tianjin Polytechnic University, Tianjin 300387, China)

Abstract: The problem of exponential stability of a class of nonlinear systems with time-varying delays is investigated. By constructing the appropriate Lyapunov-Krasovskii functional and combined with Newton-Leibniz formula and free weighting matrix method, a new delay-dependent exponential stability sufficient condition for the class of systems is established in terms of linear matrix inequality (LMI). Then, the exponential stability criterion for a class of nonlinear systems with constant delay is presented. Finally, a numerical example is provided to illustrate the effectiveness of the results obtained.

Key words: nonlinear system; exponential stability; time-varying delay; Lyapunov-Krasovskii functional; linear matrix inequality (LMI)

时滞经常出现在人口模型、化学过程、生物及经济系统等众多实际系统中. 众所周知时滞的存在常引起系统的不稳定和差的性能，因此对时滞系统稳定性的研究引起了研究者的关注，并成为重要的研究主题[1-7]. 近年来，人们对于带有时变时滞的线性系统的指数稳定性已经作了深入的研究，并获得了一些指数稳定性判据[1-4]. 然而，对于带有时变时滞的非线性系统的指数稳定性研究却很少. 本文研究一类带有时变时滞的非线性系统的指数稳定性问题. 首先通过构造适当的Lyapunov-Krasovskii泛函，结合使用Newton-Leibniz公式和自由权方法，获得了该类系统指数稳定的充分条件. 然后针对带有常数时滞的非线性系统进行了研究，并给出了这类系统指数稳定的充分条件.

1 问题描述及预备知识

本文的符号说明如下：R^+表示所有非负实数的全体；R^n表示n维向量空间，且有向量内积x^Ty及向量范数$\|\cdot\|$；$R^{n\times r}$表示所有以$n\times r$维矩阵构成的空间；A^T表示矩阵A的转置；I表示单位矩阵；$\lambda_{max}(\cdot)$和$\lambda_{min}(\cdot)$分别表示给定方阵的最大和最小特征值；$A>0$表示A是正定的，$A>B$表示$A-B>0$.

考虑如下带有时变时滞的非线性系统

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Dx(t-h(t))+f(t,x(t),x(t-h(t))),\quad x(t)=\phi(t),\ t\in[-h_1,0] \tag{1}$$

式中：$x(t)\in R^n$是状态；$A,D\in R^{n\times n}$；初值$\phi(t)$是定义在$[-h_1,0]$上的连续可微函数，且有范数$\|\phi\|=$

收稿日期： 2012-10-19
基金项目： 天津市自然科学基金资助项目(11JCYBJC06800)
第一作者： 杨凤伟(1989—)，男，硕士研究生
通信作者： 董亚丽(1963—)，女，博士，教授，硕士生导师. E-mail: dongyl@vip.sina.com

$\sup\limits_{-h_1\leqslant t\leqslant 0}\{\|\phi(t)\|,\|\dot\phi(t)\|\}$. 时滞函数 $h(t)$ 满足

$$0\leqslant h(t)\leqslant h_1,\ \dot h(t)\leqslant h_2,\ t\in R^+.$$

非线性函数 $f(t,x(t),x(t-h(t)))$ 满足

$$f^T(t,x(t),x(t-h(t)))f(t,x(t),x(t-h(t)))\leqslant x^T(t)\boldsymbol{\Gamma}^T\boldsymbol{\Gamma}x(t)+x^T(t-h(t))\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{\Lambda}x(t-h(t)) \quad (2)$$

式中：$\boldsymbol{\Gamma},\boldsymbol{\Lambda}\in R^{n\times n}$ 是给定的矩阵.

定义 1[8] 给定 $\alpha>0$. 系统(1)的零解称为是 α 指数稳定的,如果存在正数 $N>0$ 使得对任意解 $x(t,\phi)$ 有

$$\|x(t,\phi)\|\leqslant Ne^{-\alpha t}\|\phi\|,\forall t\in R^+.$$

本文引入下述引理.

引理 1[9] 对于任意正定对称矩阵 $M\in R^{n\times n}$,标量 $\gamma>0$ 和向量函数 $\boldsymbol{\omega}:[0,\gamma]\to R^n$ 使得所论积分有定义,则下述不等式

$$\left(\int_0^\gamma\boldsymbol{\omega}(s)ds\right)^T M\left(\int_0^\gamma\boldsymbol{\omega}(s)ds\right)\leqslant \gamma\left(\int_0^\gamma\boldsymbol{\omega}^T(s)M\boldsymbol{\omega}(s)ds\right)$$

成立.

2 主要结果

令 $\lambda_1=\lambda_{\min}(P)$,

$$\lambda_2=\lambda_{\max}(P)+h_1\lambda_{\max}(R_1)+h_1\lambda_{\max}(R_2)+h_1\lambda_{\max}(R_3)+h_1^2\lambda_{\max}(R_4)$$

定理 1 给定 $\alpha>0$. 系统(1)的零解是 α 指数稳定的,如果存在正定对称阵 P、$R_i(i=1,2,3,4)$ 以及矩阵 $W_i(i=1,2,3,4,5)$ 和正数 $\eta>0$,使得下述 LMI 成立:

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}\Sigma_{11}&\Sigma_{12}&\Sigma_{13}&\Sigma_{14}&\Sigma_{15}\\ *&\Sigma_{22}&\Sigma_{23}&\Sigma_{24}&\Sigma_{25}\\ *&*&\Sigma_{33}&\Sigma_{34}&\Sigma_{35}\\ *&*&*&\Sigma_{44}&\Sigma_{45}\\ *&*&*&*&\Sigma_{55}\end{bmatrix}<0 \quad (3)$$

其中

$$\Sigma_{11}=A^TP+PA+2\alpha P+R_1+R_2-e^{-2\alpha h_1}R_4+\boldsymbol{\eta\Gamma^T\Gamma}+W_1^TA+A^TW_1,$$

$$\Sigma_{12}=e^{-2\alpha h_1}R_4+A^TW_2,\ \Sigma_{13}=PD+W_1^TD+A^TW_3,$$

$$\Sigma_{14}=-W_1^T+A^TW_4,\ \Sigma_{15}=P+W_1^T+A^TW_5,$$

$$\Sigma_{22}=-e^{-2\alpha h_1}(R_2+R_3)-e^{-2\alpha h_1}R_4,\ \Sigma_{23}=W_2^T,$$

$$\Sigma_{24}=-W_2^T,\ \Sigma_{25}=W_2^T,$$

$$\Sigma_{33}=-(1-h_2)e^{-2\alpha h_2}\times(R_1-R_3)+\eta\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{\Lambda}+W_3^TD+D^TW_3,$$

$$\Sigma_{34}=-W_3^T+D^TW_4,\ \Sigma_{35}=W_3^T+D^TW_5,$$

$$\Sigma_{44}=h_1^2R_4-W_4-W_4^T,\ \Sigma_{45}=W_4^T-W_5,$$

$$\Sigma_{55}=-\eta I+W_5+W_5^T,$$

并且,系统的解 $x(t,\phi)$ 满足

$$\|x(t,\phi)\|\leqslant\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}e^{-\alpha t}\|\phi\|,\forall t\in R^+.$$

证明 考虑下面的 Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$V(t,x(t))=\sum_{i=1}^5 V_i \quad (4)$$

其中

$$V_1=x^T(t)Px(t),$$

$$V_2=\int_{t-h(t)}^t e^{2\alpha(s-t)}x^T(s)R_1x(s)ds,$$

$$V_3=\int_{t-h_1}^t e^{2\alpha(s-t)}x^T(s)R_2x(s)ds,$$

$$V_4=\int_{t-h_1}^{t-h(t)} e^{2\alpha(s-t)}x^T(s)R_3x(s)ds,$$

$$V_5=\int_{-h_1}^0\int_{t+s}^t e^{2\alpha(\tau-t)}\dot x^T(\tau)R_4\dot x(\tau)d\tau ds$$

沿系统(1)的轨线,$V_i(i=1,2,3,4,5)$ 对时间的导数为

$$\dot V_1=x^T(t)(A^TP+PA)x(t)+2x^T(t)PDx(t-h(t))+2x^T(t)Pf(t,x(t),x(t-h(t))),$$

$$\dot V_2=x^T(t)R_1x(t)-(1-\dot h(t))e^{-2\alpha h(t)}x^T(t-h(t))R_1\times x(t-h(t))-2\alpha V_2,$$

$$\dot V_3=x^T(t)R_2x(t)-e^{-2\alpha h_1}x^T(t-h_1)R_2x(t-h_1)-2\alpha V_3$$

$$\dot V_4=(1-\dot h(t))e^{-2\alpha h(t)}x^T(t-h(t))R_3x(t-h(t))-e^{-2\alpha h_1}x^T(t-h_1)R_3x(t-h_1)-2\alpha V_4,$$

$$\dot V_5=h_1^2\dot x^T(t)R_4\dot x(t)-h_1\int_{t-h_1}^t e^{2\alpha(s-t)}\dot x^T(s)R_4\dot x(s)ds-2\alpha V_5\leqslant h_1^2\dot x^T(t)R_4\dot x(t)-h_1e^{-2\alpha h_1}\int_{t-h_1}^t\dot x^T(s)R_4\dot x(s)ds-2\alpha V_5$$

根据引理 1 和 Newton-Leibniz 公式

$$\int_{t-h_1}^t\dot x(s)ds=x(t)-x(t-h_1)$$

可得

$$-h_1\int_{t-h_1}^t\dot x^T(s)R_4\dot x(s)ds\leqslant-\left[\int_{t-h_1}^t\dot x(s)ds\right]^TR_4\times\left[\int_{t-h_1}^t\dot x(s)ds\right]=-[x(t)-x(t-h_1)]^TR_4[x(t)-x(t-h_1)]$$

因此,有

$$\dot V(\cdot)+2\alpha V(\cdot)\leqslant x^T(t)[PA+A^TP+2\alpha P+R_1+R_2]\times$$

$$x(t)+2x^T(t)PDx(t-h(t))+2x^T(t)P\times f(t,x(t),x(t-h(t)))-(1-h_2)e^{-2\alpha h_2}x^T(t-h(t))\times[R_1-R_3]x(t-h(t))-e^{-2\alpha h_1}x^T(t-h_1)[R_2+R_3]\times x(t-h_1)+h_1^2\dot{x}^T(t)R_4\dot{x}(t)-e^{-2\alpha h_1}[x(t)-x(t-h_1)]^T\times R_4[x(t)-x(t-h_1)] \quad (5)$$

令

$$\xi^T(t)=[x^T(t)\ x^T(t-h_1)\ x^T(t-h(t))\ \dot{x}^T(t)\ f^T(t,x(t),x(t-h(t)))]$$

$$W^T=[W_1\ W_2\ W_3\ W_4\ W_5],$$

注意到

$$-\dot{x}(t)+Ax(t)+Dx(t-h(t))+f(t,x(t),x(t-h(t)))=0$$

则有

$$\xi^T(t)W^T[-\dot{x}(t)+Ax(t)+Dx(t-h(t))+f(t,x(t),x(t-h(t)))]+[-\dot{x}(t)+Ax(t)+Dx(t-h(t))+f(t,x(t),x(t-h(t)))]^TW\xi(t)=0 \quad (6)$$

由式(2)得

$$\eta[x^T(t)\Gamma^T\Gamma x(t)+x^T(t-h(t))\Lambda^T\Lambda x(t-h(t))-f^T(t,x(t),x(t-h(t)))f(t,x(t),x(t-h(t)))]\geqslant 0 \quad (7)$$

由式(3),(5),(6)和(7)得到

$$\dot{V}(\cdot)+2\alpha V(\cdot)\leqslant\xi^T(t)\Sigma\xi(t)\leqslant 0 \quad (8)$$

故得

$$\dot{V}(t,x(t))\leqslant -2\alpha V(t,x(t))\qquad \forall t\in R^+ \quad (9)$$

由式(9)可得

$$V(t,x(t))\leqslant V(\phi)e^{-2\alpha t}\qquad \forall t\in R^+ \quad (10)$$

由式(4)可得

$$\lambda_1\|x(t)\|^2\leqslant V(t,x(t))\qquad \forall t\geqslant 0 \quad (11)$$

因此,本文得到

$$\lambda_1\|x(t,\phi)\|^2\leqslant V(t,x(t))\leqslant V(0,x(0))e^{-2\alpha t}\leqslant\lambda_2 e^{-2\alpha t}\|\phi\|^2$$

则有

$$\|x(t,\phi)\|\leqslant\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}e^{-\alpha t}\|\phi\|\qquad t\in R^+$$

考虑如下带有常数时滞的系统

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Dx(t-h_1)+f(t,x(t),x(t-h_1))$$
$$x(t)=\phi(t)\qquad t\in[-h_1,0] \quad (12)$$

有下面的定理.

定理 2　给定 $\alpha>0$. 系统(12)的零解是 α 指数稳定的,如果存在正定对称阵 $P,\bar{R}_i(i=1,2)$以及矩阵 $\bar{W}_i$, $(i=1,2)$和正数 $\eta>0$,使得下述 LMI 成立:

$$\Sigma'=\begin{bmatrix} M_{11} & PD+\bar{R}_2 & A^T\bar{W}_1 & P+A^T\bar{W}_2 \\ * & M_{22} & D^T\bar{W}_1 & D\bar{W}_2 \\ * & * & M_{33} & \bar{W}_1^T-\bar{W}_2 \\ * & * & * & M_{44}\end{bmatrix}<0 \quad (13)$$

其中

$$M_{11}=A^TP+PA+2\alpha P+\bar{R}_1-\bar{R}_2+\eta\Gamma^T\Gamma,$$
$$M_{22}=-\bar{R}_1-\bar{R}_2+\eta\Lambda^T\Lambda,$$
$$M_{33}=h_1^2\bar{R}_2-\bar{W}_1^T-\bar{W}_1,\quad M_{44}=-\eta I+\bar{W}_2^T+\bar{W}_2$$

证明　考虑 Lyapunov-Krasovskii 泛函(4)且令

$$R_1=R_3=0,\ R_2=\bar{R}_1,\ R_4=\bar{R}_2,$$
$$W_1=W_2=W_3=0,\ W_4=\bar{W}_1,\ W_5=\bar{W}_2$$

通过类似于定理 1 的证明可得

$$\dot{V}(\cdot)+2\alpha V(\cdot)\leqslant\xi_1^T(t)\Sigma'\xi_1(t)\leqslant 0,$$

其中

$$\xi_1^T(t)=[x^T(t)\ x^T(t-h_1)\dot{x}^T(t)\ f^T(t,x(t),x(t-h_1))]$$

通过类似于定理 1 的证明可得系统(12)的零解是 α 指数稳定的.

3 数值例

考虑如下带有常数时滞的非线性系统[10]

$$\dot{x}(t)+Ax(t)+Dx(t-h_1)+f(t,x(t),x(t-h_1)),$$
$$x(t)=\phi(t),\ t\in[-h_1,0] \quad (14)$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$f(t,x(t),x(t-h_1))=f_1(t,x(t))+f_2(t,x(t-h_1)),$$
$$\|f_1(t,x(t))\|\leqslant 0.05\|x(t)\|,$$
$$\|f_2(t,x(t-h_1))\|\leqslant 0.01\|x(t-h_1)\|.$$

极易验证非线性函数 $f(t,x(t),x(t-h_1))$满足(2)式且

$$\Gamma=\sqrt{2}\times 0.05I,\Lambda=\sqrt{2}\times 0.01I.$$

对 α 取不同的值,应用定理 2,表 1 给出关于 α 时滞 h_1 允许的上界. 将本文结果与文献[10-12]的结果进行了比较.

表 1　时滞允许的上界

Tab.1　Allowable upper bound of delay h_1

方法	$\alpha=0$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.3$	$\alpha=0.5$
文献[10]	3.40	—	—	—
文献[11]	3.40	1.70	1.09	0.85
文献[12]	19.80	2.01	1.25	0.96
定理 2	20.30	2.21	1.38	1.03

由表 1 可以看出,本文结果比文献[10-12]的结果具有更弱的保守性.

4 结束语

本文研究一类带有时变时滞的非线性系统的指数稳定性问题. 通过构造适当的 Lyapunov-Krasovskii 泛函,并结合使用 Newton-Leibniz 公式和自由权技术,获得了系统指数稳定的新的充分条件,该条件以线性矩阵不等式表达. 然后,对于带有常时滞的一类非线性系统,建立了系统指数稳定的新的充分条件. 并给出数值例,与相关文献结果作对比,验证了本文所获结果的有效性.

参考文献:

[1] DE OLIVEIRA M C, GEROMEL J C, HSU I. LMI characterization of structural and robust stability: The discrete-time case [J]. Linear Algebra Appl,1999,296:27-38.

[2] PHAT V N, NAM P T. Exponential stability and stabilization of uncertain linear time-varying systems using parameter dependent Lyapunov function[J]. Int J Control,2007,80:1333-1341.

[3] PHAT V N, NIAMSUP P. A novel exponential stability condition of hybrid neural networks with time-varying[J]. Vietnam J Math,2010,38:341-351.

[4] SUN Y J. Global stabilizability of uncertain systems with time-varying delays via dynamic observer-based output feedback[J]. Linear Algebra Appl,2002,353:91-105.

[5] DONG Y, LIU J, MEI S, et al. Stabilization for switched nonlinear time-delay systems[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems,2011,5:78-88.

[6] PHAT V N. Switched controller design for stabilization of nonlinear hybrid systems with time-varying delays in state and control [J]. Journal of the Franklin Institute,2010,347:195-207.

[7] 董亚丽, 范姣姣, 杨迎娟. 一类不确定时滞非线性系统的 H_∞ 鲁棒镇定[J]. 系统工程与电子技术,2009,31(5):1167-1171.

[8] KHALIL H K. Nonlinear Systems [M]. London: Prentice-Hall, 1996.

[9] GU K, KHARITONOV V L, CHEN J. Stability of Time-Delay Systems[M]. Boston:Birkhauser, 2003.

[10] KWON O M, PARK J H. On robust stability criterion for dynamic systems with time-varying delays and nonlinear perturbations[J]. Appl Math Comput,2008, 203:937-942.

[11] KWON O M, PARK J H. Exponential stability for time-delay systems with interval time-varying delays and nonlinear perturbations[J]. J Theory Optim Appl, 2008,139(2):277-293.

[12] NAM P T. Exponential stability criterion for time-delay systems with nonlinear uncertainties[J]. Appl Math Comput, 2009, 214:374-380.

(上接第 78 页)

由图 2 中的曲线可以看出,本文销售商的库存水平变化曲线比较平缓,避免了库存成本的提高.

4 结束语

本文考虑了在时间为 t 的限制下易变质商品的一对一的库存模型,提出了合作库存的一种新的转换方法,采用每个阶段上的平均费用的方法,解决了销售商库存水平呈指数增长的问题. 但是这种模型只是对于特殊的指数分布满足,因此该研究还需要深入到满足一般分布的模型,得到更实用的结论.

参考文献:

[1] GHARE P M, SCHRADER S F. A model for exponentially decaying inventory [J]. Journal of Industrial Engineering,1963, 14:238-243.

[2] BALKHI Z T, BENKHEROUF L. A production lot size inventory model for deteriorating items and arbitrary production and demand rates [J]. European Journal of Operational Research, 1996,92:302-309.

[3] COVERT R P, PHILIP G C. An EOQ model for items with weibull distribution deterioration [J]. IIE Transactions, 1973, 5:323-326.

[4] NAHMIAS S. Optimal ordering policies for perishable inventory-II[J]. Operations Research,1975,23:735-749.

[5] NAHMIAS S. Perishable inventory theory: A review[J]. Operations Research, 1982,30:680-708.

[6] DAVE U, PATEL L K. (T,S_i) policy inventory model for deteriorating items with time proportional demand [J]. Jounral of Operational Research Society,1981,32:137-142.

[7] LIN C H, LIN Y S. A cooperative inventory policy with deteriorating items for a two-echelon model[J]. European Journal of Operational Research,2007,178:92-111.

[8] 司书宾,贾大鹏,兑红炎,等. 带有横向调度的两级维修备件库存系统优化方法研究[J]. 西北工业大学学报,2008,26(6):765-770.