第 29 卷 第 7 期
Vol. 29 No. 7

控 制 与 决 策
Control and Decision

2014 年 7 月
Jul. 2014

文章编号: 1001-0920 (2014) 07-1335-05 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2013.0502

基于粗糙集的犹豫模糊多属性决策方法

朱 丽[1,2], 朱传喜[1], 张小芝[1]

(1. 南昌大学 理学院，南昌 330031；2. 江西农业大学 理学院，南昌 330045)

摘 要: 针对属性值为犹豫模糊元的决策问题, 提出一种基于粗糙集理论的多属性决策方法. 首先, 依据属性值与理想点的贴近度和给定的阀值得到判断矩阵; 然后, 根据判断矩阵对属性集进行约简, 确定属性权重; 最后, 基于 TOPSIS 思想, 计算各方案与理想点的综合贴近度, 得到方案的优劣次序, 并通过算例分析表明了该方法的有效性.

关键词: 犹豫模糊集；粗糙集；理想点；贴近度

中图分类号: C934 **文献标志码:** A

Method for hesitant fuzzy multi-attribute decision making based on rough sets

ZHU LI[1,2], *ZHU Chuan-xi*[1], *ZHANG Xiao-zhi*[1]

(1. College of Science，Nanchang University，Nanchang 330031，China；2. College of Science，Jiangxi Agricultural University，Nanchang 330045，China．Correspondent：ZHU Li，E-mail：zflcz@163.com)

Abstract: A decision method based on rough sets is proposed for multi-attribute decision making, in which the attribute values are in the form of hesitant fuzzy elements. Firstly, the discernibility matrix is acquired according to the given threshold and the similarity degree between attribute values and ideal points. Then, the attribute reduction is operated and the weight of core attribute is determined by the discernibility matrix. Finally, the weighted similarity degree of every alternative with ideal points is displayed to rank all the alternatives. An example is given to illustrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: hesitant fuzzy set；rough set；ideal point；similarity degree

0 引 言

自从模糊集理论[1]被提出以来, 多种拓展的模糊集概念相继被引入. 文献 [2-3] 介绍了犹豫模糊集, 该模糊集允许集合中元素的隶属度不止一个, 从而很好地解决了多属性决策中决策专家的犹豫不决以及多个决策专家很难达成一致意见的问题. 文献 [4-5] 提出了一系列犹豫模糊信息集结算子以及在多属性决策中的应用. 文献 [6] 将犹豫模糊集进一步推广, 介绍了区间犹豫模糊集概念及其在群决策中的应用. 文献 [7] 提出了若干区间犹豫模糊信息集结算子. 犹豫模糊集理论在多属性决策分析中得到了广泛的重视[8-11]. 以上关于犹豫模糊信息的多属性决策研究中, 大多是假设属性权重已知或部分已知. 然而常见的多属性决策中, 决策专家对决策方案的各属性存在认识上的不足和模糊性, 属性权重往往是未知的, 因此有必要讨论属性权重未知的犹豫模糊信息的多属性决策问题.

粗糙集理论与方法[12]是处理复杂信息系统的有效方法, 其显著优点是无需提供问题所要处理的数据集合之外的任何先验信息. 粗糙集理论在属性权重确定等相关多属性决策问题中的研究已取得了不少成果[13-16]. 本文将粗糙集理论与 TOPIS 方法相结合, 利用属性值与理想点的贴近度大小进行属性约简和属性权重的确定, 得到了一种新的属性权重确定方法及其在多属性决策中的应用.

1 粗糙集的基本知识[17]

粗糙集理论采用一种基于信息系统的知识表达形式. 一个信息系统可被定义为四元组 (U, C, V, f), 其中: U 是非空有限对象集, C 是非空有限属性集, V 是属性值值域, $f: U \times C \to V$ 是信息函数. 设 R 是 V 上的一个等价关系, 记 $[x]_B^R = \{y \in U | (f(x,b), f(y,b))$

收稿日期: 2013-04-23；**修回日期:** 2013-11-02.

基金项目: 国家自然科学基金项目(11071108, 11361042)；江西省自然科学基金项目(2010GZS0147, 20132BAB201001)；江西省研究生创新专项资金项目(YC2012-B004).

作者简介: 朱丽(1980−), 女, 博士生, 从事决策分析的研究；朱传喜(1956−), 男, 教授, 博士生导师, 从事决策分析、非线性分析等研究.

$\in R, \forall b \in B\}$, $R_B = \{[x]_B^R : x \in U\}$, 即 R_B 为 U 中所有等价类的集合.

设 $B \subseteq C$, 则集合 $X \subseteq U$ 关于 B 的下近似集和上近似集分别为

$$\underline{R}(X) = \{x \in X : [x]_B^R \subseteq X\},$$

$$\overline{R}(X) = \{x \in X : [x]_B^R \bigcap X \neq \varnothing\}.$$

由下近似集定义的 X 关于 B 的近似质量为

$$r_B(X) = \frac{|\underline{R}(X)|}{|X|},$$

表示应用关系 R 能正确分类的对象的百分比.

设 (U, C, V, f) 为一信息系统, $c \in C$, 若 $R_C = R_{C-\{c\}}$, 则称属性 c 在 C 中是冗余的, 否则称 c 在 C 中是必要的. 去除冗余属性的过程, 称为属性约简. 属性集 C 的约简可能有多个, C 的所有必要属性组成的集合称为 C 的核, 记为 $\mathrm{core}(C)$.

2 犹豫模糊集的基本知识

定义 1 令 X 为一个给定的集合, 称 $E = \{\langle x, h_E(x)\rangle | x \in X\}$ 为 X 上的犹豫模糊集, 其中 $h_E(x) \subseteq [0,1]$ 由元素 $x \in X$ 对于集合 E 的所有可能隶属度构成, 并且称 $h_E(x)$ 为一个犹豫模糊元 (HFE), 用 H 表示所有犹豫模糊元的全体[2].

本文讨论 $h_E(x)$ 是 $[0,1]$ 的有限子集的情况.

下面介绍犹豫模糊元的距离测度. 设 $h_1, h_2 \in H$, h_1 和 h_2 中所含元素的个数分别为 $l(h_1)$ 和 $l(h_2)$, 不妨设 $l(h_1) = l(h_2)$. 事实上, 如果 $l(h_1) > l(h_2)$, 可以在 h_2 中增加元素直到 $l(h_1)$ 与 $l(h_2)$ 相等, 其中增加的元素由具体情况而定. 依据文献 [9], 本文给出犹豫模糊元的距离测度如下.

定义 2 设 $h_1, h_2 \in H$, 且设 $l = l(h_1) = l(h_2)$, 则 h_1 与 h_2 的距离定义为

$$d(h_1, h_2) = \sqrt{\frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l} |r_1^{\sigma(j)} - r_2^{\sigma(j)}|^2},$$

其中 $r_1^{\sigma(j)}$ 和 $r_2^{\sigma(j)}$ 分别为 h_1 和 h_2 中第 j 大的元素.

在文献 [4] 的基础上给出如下改进的犹豫模糊元的比较方法.

定义 3 设 $h \in H$, $s(h) = \dfrac{1}{l(h)}\sum\limits_{r \in h} r$ 为 h 的得分函数, 其中 $l(h)$ 表示 h 中所含元素的个数, 称 $h^0 = \{s(h), s(h), \cdots, s(h)\}$ 为 h 的理想元.

定义 4 设 $h_1, h_2 \in H$, 则 h_1 与 h_2 的大小关系判断方法为:

1) 若 $s(h_1) > s(h_2)$, 则 $h_1 > h_2$;

2) 若 $s(h_1) = s(h_2)$, 则假设 $l = l(h_1) = l(h_2)$, 令 $s = s(h_1) = s(h_2)$, 记 $h^0 = \{s, s, \cdots, s\}$, 有:

① 若 $d(h_1, h^0) > d(h_2, h^0)$, 则 $h_1 < h_2$;

② 若 $d(h_1, h^0) < d(h_2, h^0)$, 则 $h_1 > h_2$;

③ 若 $d(h_1, h^0) = d(h_2, h^0)$, 则 $h_1 \approx h_2$.

下面介绍区间犹豫模糊集的概念和相关运算.

定义 5 设 R 为实数域, 记 $\tilde{a} = [a^L, a^U] = \{x | a^L \leqslant x \leqslant a^U,\ a^L, a^U \in R\}$, 称 $\tilde{a}$ 为一个区间数. 特别地, 若 $a^L = a^U$, 则 $\tilde{a}$ 退化为一个实数[18].

定义 6 设 $\tilde{a} = [a^L, a^U]$ 和 $\tilde{b} = [b^L, b^U]$, 记 $l_{\tilde{a}} = a^U - a^L, l_{\tilde{b}} = b^U - b^L$, 设 $l_{\tilde{a}} + l_{\tilde{b}} > 0$, 称

$$p(\tilde{a} \geqslant \tilde{b}) = \max\left\{1 - \max\left(\frac{b^U - a^L}{l_{\tilde{a}} + l_{\tilde{b}}}, 0\right), 0\right\}$$

为 $\tilde{a} \geqslant \tilde{b}$ 的可能度[19].

定义 7 设 $D[0,1]$ 为区间 $[0,1]$ 的所有闭子区间的全体. 令 X 为一个给定的集合, 称 $\tilde{E} = \{\langle x, \tilde{h}_{\tilde{E}}(x)\rangle | x \in X\}$ 为 X 上的区间犹豫模糊集, 其中 $\tilde{h}_{\tilde{E}}(x) \subseteq D[0,1]$ 由元素 $x \in X$ 对于集合 E 的所有可能区间隶属度构成, 称 $\tilde{h}_{\tilde{E}}(x)$ 为一个区间犹豫模糊元 (IVHFE), 用 $\widetilde{H}$ 表示所有区间犹豫模糊元的全体[6].

本文讨论 $\tilde{h}_{\tilde{E}}(x)$ 是 $D[0,1]$ 的有限子集的情况.

定义 8 设 $\tilde{h} \in \widetilde{H}$, 称 $s(\tilde{h}) = \dfrac{1}{l(\tilde{h})}\sum\limits_{\tilde{r} \in \tilde{h}} \tilde{r}$ 为 $\tilde{h}$ 的得分函数, 其中 $l(\tilde{h})$ 表示 $\tilde{h}$ 中所含区间的个数[6].

为了比较两个区间犹豫模糊元的大小, 给出如下定义.

定义 9 设 $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2 \in \widetilde{H}$, 有:

1) 若 $p\big(s(\tilde{h}_1) \geqslant s(\tilde{h}_2)\big) > 0.5$, 则称 $\tilde{h}_1 > \tilde{h}_2$;

2) 若 $p\big(s(\tilde{h}_1) \geqslant s(\tilde{h}_2)\big) < 0.5$, 则称 $\tilde{h}_1 < \tilde{h}_2$;

3) 若 $p\big(s(\tilde{h}_1) \geqslant s(\tilde{h}_2)\big) = 0.5$, 则称 $\tilde{h}_1 \approx \tilde{h}_2$.

定义 10 设 $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2 \in \widetilde{H}$, 且设 $\tilde{l} = l(\tilde{h}_1) = l(\tilde{h}_2)$, 则 $\tilde{h}_1$ 与 $\tilde{h}_2$ 的距离定义为

$$d(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) = \sqrt{\frac{1}{2\tilde{l}}\sum_{j=1}^{\tilde{l}} (|\tilde{r}_{1,\sigma(j)}^L - \tilde{r}_{2,\sigma(j)}^L|^2 + |\tilde{r}_{1,\sigma(j)}^U - \tilde{r}_{2,\sigma(j)}^U|^2)},$$

其中 $\tilde{r}_{1,\sigma(j)}$ 和 $\tilde{r}_{2,\sigma(j)}$ 分别为 $\tilde{h}_1$ 和 $\tilde{h}_2$ 中第 j 大的元素[6].

注 1 设 $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2 \in \widetilde{H}$, 有

$$s(\tilde{h}_1) = \left[\frac{1}{l(\tilde{h}_1)}\sum_{\tilde{r} \in \tilde{h}_1} \tilde{r}^L, \frac{1}{l(\tilde{h}_1)}\sum_{\tilde{r} \in \tilde{h}_1} \tilde{r}^U\right],$$

$$s(\tilde{h}_2) = \left[\frac{1}{l(\tilde{h}_2)}\sum_{\tilde{r} \in \tilde{h}_2} \tilde{r}^L, \frac{1}{l(\tilde{h}_2)}\sum_{\tilde{r} \in \tilde{h}_2} \tilde{r}^U\right].$$

当 $p\big(s(\tilde{h}_1) \geqslant s(\tilde{h}_2)\big) = 0.5$, 即 $\tilde{h}_1 \approx \tilde{h}_2$ 时, 有

$$\frac{1}{2l(\tilde{h}_1)}\Big(\sum_{\tilde{r} \in \tilde{h}_1} \tilde{r}^L + \sum_{\tilde{r} \in \tilde{h}_1} \tilde{r}^U\Big) = \frac{1}{2l(\tilde{h}_2)}\Big(\sum_{\tilde{r} \in \tilde{h}_2} \tilde{r}^L + \sum_{\tilde{r} \in \tilde{h}_2} \tilde{r}^U\Big).$$

假设 $\tilde{l}=l(\tilde{h}_1)=l(\tilde{h}_2)$, 记

$$\tilde{r}^0=\Big[\frac{1}{2\tilde{l}}\Big(\sum_{\tilde{r}\in\tilde{h}_1}\tilde{r}^L+\sum_{\tilde{r}\in\tilde{h}_1}\tilde{r}^U\Big),\frac{1}{2\tilde{l}}\Big(\sum_{\tilde{r}\in\tilde{h}_1}\tilde{r}^L+\sum_{\tilde{r}\in\tilde{h}_1}\tilde{r}^U\Big)\Big],$$

则称 $\tilde{h}^0=\{\tilde{r}^0,\tilde{r}^0,\cdots,\tilde{r}^0\}$ 为 $\tilde{h}_1$ 与 $\tilde{h}_2$ 的理想元.

3　基于粗糙集的多属性决策方法

3.1　问题描述

设犹豫模糊多属性群决策问题中, 方案集 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 令 $N=\{1,2,\cdots,n\}$; 属性集 $C=\{c_1,c_2,\cdots,c_m\}$, 令 $M=\{1,2,\cdots,m\}$, 各属性的权重构成的权重向量 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$ 未知, 满足 $0\leqslant\omega_j\leqslant 1,\sum\limits_{j=1}^{n}=1$. 各专家对每个方案的各属性进行匿名评估, 对每个方案, 将所有专家对同一属性 c_j 给出的评估值构成的犹豫模糊元或区间犹豫模糊元 a_{ij} 作为该属性的属性值. 于是有决策矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times m}$. 设 $f(x_i,c_i)=a_{ij}$, $V=\{a_{ij}:i\in N,j\in M\}$, 从而有信息系统 (U,C,V,f).

3.2　决策方法

Step 1　确定属性 c_j 的正、负理想点 a_j^+ 和 a_j^-. 设

$$\max_{i\in N}a_{ij}=\{a_{sj}:\forall i\in N,\text{有}a_{sj}>a_{ij}\vee a_{sj}\approx a_{ij}\},$$

$$\min_{i\in N}a_{ij}=\{a_{sj}:\forall i\in N,\text{有}a_{sj}<a_{ij}\vee a_{sj}\approx a_{ij}\}.$$

若存在 $k,l\in N,k\neq l$ 使得 $a_{kj}\approx a_{lj}\approx\max\limits_{i\in N}a_{ij}$, 则 $a_j^+=a_{kj}^0$, 否则 $a_j^+=\max\limits_{i\in N}a_{ij}$, 其中 a_{kj}^0 为 a_{kj} 的理想元. 同理, 若存在 $k,l\in N,k\neq l$ 使得 $a_{kj}\approx a_{lj}\approx\min\limits_{i\in N}a_{ij}$, 则 $a_j^-=a_{kj}^0$, 否则 $a_j^-=\min\limits_{i\in N}a_{ij}$, 其中 a_{kj}^0 为 a_{kj} 的理想元.

Step 2　求解方案 x_i 在属性 c_j 下的属性值 a_{ij} 到正、负理想点的距离, 即

$$d_{ij}^+=d(a_{ij},a_j^+),\tag{1}$$

$$d_{ij}^-=d(a_{ij},a_j^-).\tag{2}$$

Step 3　计算方案 x_i 在属性 c_j 下的属性值 a_{ij} 对理想点的贴近度

$$t_{ij}=\frac{d_{ij}^-}{d_{ij}^-+d_{ij}^+},\tag{3}$$

得到贴近度矩阵 $T=(t_{ij})_{n\times m}$.

Step 4　确定属性 c_j 的权重 w_j.

根据实际情况, 设定阀值 λ, 构造判断矩阵 $M=(m_{ij})_{n\times m}$, 其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1,\ t_{ij}\geqslant\lambda;\\0,\ t_{ij}<\lambda.\end{cases}\tag{4}$$

在信息系统 (U,C,V,f) 中建立关于集合 $B\subseteq C$ 的等价关系 R_B, 使任意 $x_i\in U$ 的关于 B 的等价类 $[x_i]_B^R=\{x_k:m_{kj}=m_{ij},\forall c_j\in B\}$. 所有等价类的集合仍记为 $R_B=\{[x_i]_B^R:i\in N\}$.

U 关于 B 的下近似集定义为

$$\underline{U}=\{x_i:[x_i]_B^R\subseteq[x_i]_C^R,i\in N\},$$

则近似质量

$$r_B(U)=\frac{|\underline{U}|}{|U|}.$$

属性约简是在保证分类不变的条件下去除冗余的属性. 由于 $r_C(U)=1$, 若存在 $k\in M$, 使得 $r_{C-\{c_k\}}(U)=1$, 则 c_k 为冗余属性. 所有非冗余属性组成的集合为属性的核, 记为 $\mathrm{core}(C)$. 对于任意非冗余属性 $c_j\in\mathrm{core}(C)$, 其权重

$$w_j=\frac{1-r_{\mathrm{core}(C)-\{c_j\}}(U)}{\sum\limits_{c_j\in\mathrm{core}(C)}[1-r_{\mathrm{core}(C)-\{c_j\}}(U)]},\tag{5}$$

故有:

1) $w_k=0,c_k\in C-\mathrm{core}(C)$;

2) $0\leqslant w_j\leqslant 1$, 且 $\sum\limits_{c_j\in\mathrm{core}(C)}w_j=1$.

Step 5　计算各方案的加权贴近度

$$T_i=\frac{\sum\limits_{c_j\in\mathrm{core}(C)}w_jd_{ij}^-}{\sum\limits_{c_j\in\mathrm{core}(C)}w_jd_{ij}^-+\sum\limits_{c_j\in\mathrm{core}(C)}w_jd_{ij}^+}.\tag{6}$$

根据 T_i 的大小对方案进行排序, T_i 越大, 相应的方案 x_i 越优.

4　算例分析

设某多属性群决策问题的方案集 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_8\}$; 属性集合 $C=\{c_1,c_2,\cdots,c_5\}$, 属性权重向量 $w=\{w_1,w_2,\cdots,w_5\}$ 未知. 所有专家对方案 x_i 在属性 c_j 下的评估值由犹豫模糊元或区间犹豫模糊元 a_{ij} 表示. 决策矩阵如表 1 所示.

确定正、负理想点

$a_1^+=\{0.3,0.7,0.8\},\ a_1^-=\{0.1,0.3,0.4\}$;

$a_2^+=\{[0.4,0.7],[0.5,0.8],[0.6,0.8]\}$,

$a_2^-=\{[0.1,0.4],[0.2,0.5],[0.3,0.4]\}$;

$a_3^+=\{0.4,0.7,0.8\},\ a_3^-=\{0.1,0.3,0.4\}$;

$a_4^+=\{[0.6,0.7],[0.5,0.8],[0.6,0.8]\}$,

$a_4^-=\{[0.2,0.3],[0.2,0.4],[0.3,0.4]\}$;

$a_5^+=\{0.3,0.7,0.8\},\ a_5^-=\{0.1,0.2,0.3\}$.

分别用式 (1) 和 (2) 计算各方案在每个属性下的属性值到正、负理想点的距离 d_{ij}^+ 和 d_{ij}^-. 记 $D^+=(d_{ij}^+)_{n\times m}$, $D^-=(d_{ij}^-)_{n\times m}$.

表 1 犹豫模糊决策矩阵

U	C				
	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
x_1	$\{0.2, 0.5, 0.6\}$	$\{[0.1, 0.4], [0.2, 0.5], [0.3, 0.4]\}$	$\{0.2, 0.7, 0.8\}$	$\{[0.3, 0.5], [0.4, 0.6], [0.4, 0.5]\}$	$\{0.2, 0.4, 0.6\}$
x_2	$\{0.3, 0.7, 0.8\}$	$\{[0.2, 0.5], [0.3, 0.5], [0.4, 0.6]\}$	$\{0.4, 0.6, 0.7\}$	$\{[0.2, 0.3], [0.2, 0.4], [0.3, 0.4]\}$	$\{0.3, 0.7, 0.8\}$
x_3	$\{0.3, 0.4, 0.6\}$	$\{[0.4, 0.7], [0.5, 0.8], [0.6, 0.8]\}$	$\{0.4, 0.7, 0.8\}$	$\{[0.3, 0.5], [0.3, 0.6], [0.4, 0.5]\}$	$\{0.1, 0.3, 0.4\}$
x_4	$\{0.1, 0.3, 0.4\}$	$\{[0.3, 0.5], [0.4, 0.6], [0.5, 0.7]\}$	$\{0.4, 0.5, 0.7\}$	$\{[0.2, 0.4], [0.3, 0.5], [0.4, 0.6]\}$	$\{0.2, 0.4, 0.4\}$
x_5	$\{0.2, 0.6, 0.7\}$	$\{[0.3, 0.6], [0.3, 0.7], [0.3, 0.8]\}$	$\{0.1, 0.3, 0.4\}$	$\{[0.3, 0.4], [0.2, 0.5], [0.2, 0.4]\}$	$\{0.1, 0.2, 0.3\}$
x_6	$\{0.4, 0.5, 0.6\}$	$\{[0.4, 0.7], [0.3, 0.7], [0.5, 0.7]\}$	$\{0.1, 0.3, 0.5\}$	$\{[0.6, 0.7], [0.5, 0.8], [0.6, 0.8]\}$	$\{0.2, 0.4, 0.5\}$
x_7	$\{0.3, 0.6, 0.6\}$	$\{[0.5, 0.6], [0.4, 0.6], [0.5, 0.6]\}$	$\{0.2, 0.3, 0.4\}$	$\{[0.4, 0.6], [0.5, 0.7], [0.5, 0.8]\}$	$\{0.3, 0.4, 0.7\}$
x_8	$\{0.3, 0.4, 0.7\}$	$\{[0.4, 0.7], [0.5, 0.7], [0.6, 0.8]\}$	$\{0.5, 0.6, 0.7\}$	$\{[0.4, 0.5], [0.2, 0.3], [0.3, 0.4]\}$	$\{0.2, 0.4, 0.4\}$

$$D^+ = \begin{bmatrix} 0.1732 & 0.3189 & 0.1155 & 0.2273 & 0.2160 \\ 0 & 0.2198 & 0.0816 & 0.3697 & 0 \\ 0.2082 & 0 & 0 & 0.2380 & 0.3464 \\ 0.3464 & 0.1414 & 0.1291 & 0.2769 & 0.2944 \\ 0.1 & 0.1633 & 0.3697 & 0.3367 & 0.4243 \\ 0.1732 & 0.1080 & 0.3367 & 0 & 0.2517 \\ 0.1291 & 0.1414 & 0.3464 & 0.1080 & 0.1826 \\ 0.1826 & 0.0408 & 0.1 & 0.3342 & 0.2944 \end{bmatrix},$$

$$D^- = \begin{bmatrix} 0.1732 & 0 & 0.3317 & 0.1581 & 0.2160 \\ 0.3464 & 0.1155 & 0.3 & 0 & 0.4243 \\ 0.1732 & 0.3189 & 0.3697 & 0.1414 & 0.0816 \\ 0 & 0.1958 & 0.2708 & 0.1155 & 0.1414 \\ 0.2517 & 0.2198 & 0 & 0.0816 & 0 \\ 0.2380 & 0.2449 & 0.0577 & 0.3697 & 0.1732 \\ 0.2380 & 0.2345 & 0.0577 & 0.2915 & 0.2828 \\ 0.2160 & 0.3055 & 0.3367 & 0.1225 & 0.1414 \end{bmatrix}.$$

用式(3)求各方案的各属性值对理想点的贴近度 t_{ij}, 得到贴近度矩阵 $T = (t_{ij})_{n\times m}$, 即

$$T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.7417 & 0.4102 & 0.5 \\ 1 & 0.3445 & 0.7862 & 0 & 1 \\ 0.4541 & 1 & 1 & 0.3727 & 0.1907 \\ 0 & 0.5807 & 0.6772 & 0.2943 & 0.3245 \\ 0.7157 & 0.5737 & 0 & 0.1951 & 0 \\ 0.5787 & 0.6940 & 0.1463 & 1 & 0.4076 \\ 0.6483 & 0.6238 & 0.1428 & 0.7297 & 0.6076 \\ 0.5419 & 0.8822 & 0.7710 & 0.2682 & 0.3245 \end{bmatrix}.$$

设定阈值 $\lambda = 0.4541$, 根据式(4)构造判断矩阵 $M = (m_{ij})_{n\times m}$ 如下所示:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

于是

$R_C =$

$\{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_8\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_6\}, \{x_7\}\}$,

$R_{C-\{c_1\}} =$

$\{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4, x_8\}, \{x_5\}, \{x_6\}, \{x_7\}\}$,

$R_{C-\{c_2\}} =$

$\{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_8\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_6\}, \{x_7\}\}$,

$R_{C-\{c_3\}} =$

$\{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_5, x_8\}, \{x_4\}, \{x_6\}, \{x_7\}\}$,

$R_{C-\{c_4\}} =$

$\{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_8\}, \{x_4\}, \{x_5, x_6\}, \{x_7\}\}$,

$R_{C-\{c_5\}} =$

$\{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_8\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_6, x_7\}\}$,

$R_{C-\{c_2,c_1\}} =$

$\{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4, x_8\}, \{x_5\}, \{x_6\}, \{x_7\}\}$,

$R_{C-\{c_2,c_3\}} =$

$\{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_5, x_8\}, \{x_4\}, \{x_6\}, \{x_7\}\}$,

$R_{C-\{c_2,c_4\}} =$

$\{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_8\}, \{x_4\}, \{x_5, x_6\}, \{x_7\}\}$,

$R_{C-\{c_2,c_5\}} =$

$\{\{x_1, x_2, x_3, x_8\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_6, x_7\}\}$.

因为 $r_{C-\{c_2\}}(U) = 1$, 所以 c_2 为冗余属性, $w_2 = 0$, $\mathrm{core}(C) = \{c_1, c_3, c_4, c_5\}$, 且有

$$r_{\mathrm{core}(C)-\{c_1\}}(U) = \frac{5}{8},\ r_{\mathrm{core}(C)-\{c_3\}}(U) = \frac{5}{8},$$

$$r_{\mathrm{core}(C)-\{c_4\}}(U) = \frac{6}{8},\ r_{\mathrm{core}(C)-\{c_5\}}(U) = \frac{2}{8}.$$

由式(5)得

$$w_1 = \frac{1-\dfrac{5}{8}}{\left(1-\dfrac{5}{8}\right)+\left(1-\dfrac{5}{8}\right)+\left(1-\dfrac{6}{8}\right)+\left(1-\dfrac{2}{8}\right)} = \frac{3}{14},$$

同理

$$w_3 = \frac{3}{14},\ w_4 = \frac{2}{14},\ w_5 = \frac{6}{14}.$$

根据式(6)计算各方案的加权贴近度, 有

$$T_1 = 0.5444,\ T_2 = 0.8200,$$

$$T_3 = 0.4303,\ T_4 = 0.3355,$$

$$T_5 = 0.165\,6,\ T_6 = 0.467\,2,$$

$$T_7 = 0.536\,3,\ T_8 = 0.456\,0.$$

因此方案的优劣顺序为 $x_2 \succ x_1 \succ x_7 \succ x_6 \succ x_8 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_5$.

5 结　论

在多属性决策中, 存在一类属性的权重信息未知、属性值为犹豫模糊元的群决策问题. 针对此类问题, 本文利用粗糙集理论的近似方法和属性约简方法, 去除冗余属性并得到非冗余属性的属性权重. 进一步依据 TOPIS 思想实现决策方案的排序. 该决策方法同样适应于属性值为其他不同类型数据的混合型多属性决策问题.

参考文献(References)

[1] Zadeh A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[2] Torra V, Narukawa Y. On hesitant fuzzy sets and decision[C]. The 18th IEEE Int Conf on Fuzzy Systems. Jeju Island, 2009: 1378-1382.

[3] Torra V. Hesitant fuzzy sets[J]. Int J of Intelligent Systems, 2010, 25(6): 529-539.

[4] Xia M M, Xu Z S. Hesitant fuzzy information aggregation in decision making[J]. Int J of Approximate Reasoning, 2011, 52(3): 395-407.

[5] Xu Z S, Xia M M, Chen N. Some hesitant fuzzy aggregation operators with their application in group decision making[J]. Group Decision and Negotiation, 2013, 22(2): 259-279.

[6] Chen N, Xu Z S, Xia M M. Interval-valued hesitant preference relations and their applications to group decision making[J]. Knowledge Based Systems, 2013, 37: 528-540.

[7] Wei G W, Zhao X F, Lin R. Some hesitant interval-valued fuzzy aggregation operators and their applications to multiple attribute decision making[J]. Knowledge Based Systems, 2013, 46: 43-53.

[8] Qian G, Wang H, Feng X Q. Generalized hesitant fuzzy sets and their application in decision support system[J]. Knowledge Based Systems, 2013, 37: 357-365.

[9] Xu Z S, Xia M M. Distance and similarity measures for hesitant fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2011, 181(11): 2128-2138.

[10] Yu D J, Wu Y Y, Zhou W. Multi-criteria decision making based on Choquet integral under hesitant fuzzy environment[J]. J of Computational Information Systems, 2011, 7(12): 4506-4531.

[11] Zhang Z M. Hesitant fuzzy power aggregation operators and their application to multiple attribute group decision making[J]. Information Sciences, 2013, 234: 150-181.

[12] Pawlak Z. Rough sets-theoretical aspects of reasoning about data[M]. London: Kluwer Academic Publishers, 1991:9-11.

[13] 鲍新中, 张建斌, 刘澄. 基于粗糙集条件信息熵的权重确定方法[J]. 中国管理科学, 2009, 17(3): 131-135.
(Bao X Z, Zhang J B, Liu C. A new method of ascertaining attribute weight based on rough sets conditional information entropy[J]. Chinese J of Management Science, 2009, 17(3): 131-135.)

[14] 曹秀英, 梁静国. 基于粗集理论的属性权重确定方法[J]. 中国管理科学, 2002, 10(5): 98-100.
(Cao X Y, Liang J G. The method of ascertaining attribute weight based on rough sets theory[J]. Chinese J of Management Science, 2002, 10(5): 98-100.)

[15] 姜艳萍, 梁海明. 一种基于粗集的残缺语言区间信息的多属性群决策方法[J]. 系统管理学报, 2011, 20(4): 485-489.
(Jiang Y P, Liang H M. A method based on rough sets for multi-attribute group decision-making with incomplete interval linguistic information[J]. J of Systems & Management, 2011, 20(4): 485-489.)

[16] 柳炳祥, 李海林. 基于模糊粗糙集的因素权重分配方法[J]. 控制与决策, 2007, 22(12): 1437-1440.
(Liu B X, Li H L. Method of factor weights allocation based on combination of fuzzy and rough set[J]. Control and Decision, 2007, 22(12): 1437-1440.)

[17] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. Rough sets theory for multicriteria decision analysis[J]. European J of Operational Research, 2001, 129(1): 1-47.

[18] Sengupta A, Pal T K. On comparing interval number[J]. European J of Operational Research, 2000, 127(1): 28-43.

[19] 徐泽水, 达庆利. 区间数排序的可能度法及其应用[J]. 系统工程学报, 2003, 18(1): 67-70.
(Xu Z S, Da Q L. Possibility degree method for ranking interval numbers and its application[J]. J of Systems Engineering, 2003, 18(1): 67-70.)

(责任编辑：孙艺红)