第 29 卷 第 7 期
Vol. 29 No. 7

控 制 与 决 策
Control and Decision

2014 年 7 月
Jul. 2014

文章编号: 1001-0920 (2014) 07-1316-05 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2013.0529

时变时滞连续切换奇异系统的一致有限时间稳定分析

杨 坤[1,2], 沈艳霞[1], 纪志成[1]

(1. 江南大学 轻工过程先进控制教育部重点实验室，江苏 无锡 214122；2. 鲁东大学 信息与电气工程学院，山东 烟台 264025)

摘 要: 讨论一类含有时变时滞的连续时间切换奇异系统的一致有限时间稳定、有限时间有界和状态反馈镇定问题. 在给定任意的切换规则下, 运用多 Lyapunov 函数和平均驻留时间方法设计使得闭环系统一致有限时间稳定和有限时间有界的状态反馈控制器, 同时给出基于线性矩阵不等式表示的控制器存在的充分条件. 最后通过数值算例表明了所提出方法的合理性和有效性.

关键词: 切换奇异系统；线性矩阵不等式；有限时间稳定；有限时间有界

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

Uniform finite-time stability for a class of continuous-time switched descriptor systems with time-varying delay

YANG Kun[1,2], *SHEN Yan-xia*[1], *JI Zhi-cheng*[1]

(1. Key Laboratory of Advanced Process Control for Light Industry，Ministry of Education，Jiangnan University, Wuxi 214122，China；2. School of Information and Electrical Engineering，Ludong University，Yantai 264025, China．Correspondent：YANG Kun，E-mail：ytyangkun@163.com)

Abstract: The issue of uniform finite-time stability, finite-time boundedness and state feedback stabilization for a class of continuous-time switched descriptor systems with time-varying delay is considered. Based on the multiple Lyapunov function and the average dwell-time approach, sufficient conditions for the existence of state feedback controllers in terms of linear matrix inequalities(LMIs) are given with arbitrary switching rules, which ensure that the closed-loop systems are finite-time stable and finite-time bounded respectively. Finally, a numerical example illustrates the reasonableness and effectiveness of the proposed method.

Key words: switched descriptor systems；linear matrix inequality；finite-time stability；finite-time boundedness

0 引 言

切换奇异系统由若干连续或离散动态奇异子系统组成, 通过按照描述其关系的切换策略在子系统间切换以达到控制目的, 具有较强的工程应用背景[1]. 与正常切换系统相比, 由于正则性、脉冲模消除、一致初始状态等问题的存在, 对切换奇异系统的稳定性分析和控制器设计更复杂且更具挑战性[2]. 目前, 对切换奇异系统鲁棒指数稳定、输入-状态稳定、能观性等控制问题的研究已经备受众多学者关注[3-6], 但关于有限时间稳定和有限时间有界的研究成果尚不多见.

关于系统有限时间稳定的研究起步于 20 世纪 60 年代[7-8], 目前关于切换系统[9-11]和奇异系统[12-14]有限时间稳定性的研究均已取得了一些进展. 文献 [9] 利用 Lyapunov-like 函数结合线性矩阵不等式方法对一类离散时间线性切换系统的一致有限时间稳定和状态反馈镇定问题进行了讨论, 给出了该类系统有限时间稳定及有限时间有界的充分条件和状态反馈控制器的设计方案, 并在网络控制系统中进行了应用. 文献 [12] 将有限时间稳定的概念推广到一类含有不确定参数和时变范数有界外部扰动的奇异随机系统, 通过设计静态输出反馈控制器, 研究了鲁棒 H_∞ 有限时间控制问题, 并给出了基于严格线性矩阵不等式表示的保证闭环系统 H_∞ 有限时间有界的充分条件.

收稿日期: 2013-04-28；**修回日期:** 2013-08-27.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61174032, 61104183)；国家 863 计划项目(2013AA040405)；中央高校基本科研业务费专项基金项目(JUDCF11040).

作者简介: 杨坤(1983−), 男, 博士生, 从事鲁棒控制、切换系统的研究；纪志成(1959−), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂非线性系统控制、智能控制等研究.

本文将有限时间稳定和有限时间有界的概念推广到连续切换奇异系统, 利用多Lyapunov函数方法和平均驻留时间技术考虑了一类含有时变时滞的连续时间切换奇异系统的有限时间稳定、有限时间有界和状态反馈镇定问题. 设计相应的状态反馈控制器, 并分别给出了保证闭环系统在任意给定的切换规则下有限时间有界和有限时间稳定的充分条件.

1 问题描述

考虑如下一类时变时滞连续切换奇异系统:

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + A_{\tau\sigma(t)}x(t-\tau(t))+ \\ \qquad B_{\sigma(t)}u(t) + G_{\sigma(t)}\omega(t), \\ x(t) = \phi(t),\ t \in [-h,\ 0], \\ \dot{\omega}(t) = C_{\sigma(t)}\omega(t). \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x(t) \in \boldsymbol{R}^n$ 为状态变量; $u(t) \in \boldsymbol{R}^m$ 为控制输入; $\omega(t) \in \boldsymbol{R}^p$ 为属于 $L_2[0,+\infty)$ 空间的外部扰动输入, $\forall t \in [0,T_f]$, 且满足 $\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t) \leqslant d$, $\int_0^{T_f}\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)\mathrm{d}t \leqslant l$, $d \geqslant 0$, $l \geqslant 0$; $\tau(t)$ 为时变的状态时滞, 且满足 $0 < b \leqslant \tau(t) \leqslant h$, $\dot{\tau}(t) \leqslant \rho < 1$, 即 h, ρ 分别为时滞和时滞变化率的上界; $\sigma : Z^+ \to \boldsymbol{M} = \{1,2,\cdots,m\}$ 为分段常值切换信号, $\sigma(t) = i$ 表示在时刻 t 第 i 个子系统被激活; $A_i, A_{\tau i}, B_i, G_i, C_i$ 为具有适当维数的常数矩阵; $\phi(t)$ 为系统的初始条件; $E = \mathrm{diag}\{I_r, 0\} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ 为奇异矩阵, 且满足 $\mathrm{rank}E = r < n$.

定义 1 连续时间切换奇异系统

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + A_{\tau\sigma(t)}x(t-\tau(t))+ \\ \qquad G_{\sigma(t)}\omega(t), \\ \dot{\omega}(t) = C_{\sigma(t)}\omega(t) \end{cases} \tag{2}$$

关于 (c_1, c_2, d, l, R, T_f) 是一致有限时间有界的 (“一致”不是指时间而是对切换信号的一致性), 若给定切换信号 $\sigma(t)$, 则有

$$x^{\mathrm{T}}(t_0)E^{\mathrm{T}}REx(t_0) \leqslant c_1 \Rightarrow x^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}REx(t) < c_2,$$
$$\forall\, t \in [0, T_f].$$

其中

$$x^{\mathrm{T}}(t_0)E^{\mathrm{T}}REx(t_0) = \sup_{-h\leqslant\theta\leqslant 0}\{x^{\mathrm{T}}(\theta)E^{\mathrm{T}}REx(\theta)\},$$
$$0 < c_1 < c_2,\ d \geqslant 0,\ l \geqslant 0,\ R > 0,\ T_f > 0.$$

定义 2 连续时间切换奇异系统

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + A_{\tau\sigma(t)}x(t-\tau(t)), \\ \dot{\omega}(t) = C_{\sigma(t)}\omega(t) \end{cases} \tag{3}$$

关于 (c_1, c_2, R, T_f) 是一致有限时间稳定的, 若给定切换信号 $\sigma(t)$, 则有

$$x^{\mathrm{T}}(t_0)E^{\mathrm{T}}REx(t_0) \leqslant c_1 \Rightarrow x^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}REx(t) < c_2,$$
$$\forall\, t \in [0, T_f].$$

其中

$$x^{\mathrm{T}}(t_0)E^{\mathrm{T}}REx(t_0) = \sup_{-h\leqslant\theta\leqslant 0}\{x^{\mathrm{T}}(\theta)E^{\mathrm{T}}REx(\theta)\},$$
$$0 < c_1 < c_2,\ R > 0,\ T_f > 0.$$

定义 3[11] 若存在 $\pi_a > 0$, $N_0 \geqslant 0$, 使得 $N_{\sigma(t)}(t_0, T) \leqslant N_0 + (T - t_0)/\pi_a$ 成立, 则称 π_a 为平均驻留时间. 其中: $N_{\sigma(t)}(t_0, T)$ 为在时间区间 $[t_0, T]$ 上系统的切换次数; N_0 为振颤界, 通常取 $N_0 = 0$.

假设本文讨论的系统状态 $x(t)$ 在切换时刻不发生跳变, 且在有限时间区间内发生切换的次数是有限的, 则系统 (1) 在状态反馈控制律 $u_{\sigma(t)} = K_{\sigma(t)}x(t)$ 作用下的闭环系统为

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = \bar{A}_{\sigma(t)}x(t) + A_{\tau\sigma(t)}x(t-\tau(t))+ \\ \qquad G_{\sigma(t)}\omega(t), \\ \dot{\omega}(t) = C_{\sigma(t)}\omega(t), \end{cases} \tag{4}$$

其中 $\bar{A}_{\sigma(t)} = A_{\sigma(t)} + B_{\sigma(t)}K_{\sigma(t)}$.

2 主要结论

定理 1 对于任意的 $i \in \boldsymbol{M}$, 若存在非奇异矩阵 P_i, 矩阵 $Z_i > 0$, $S_i > 0$, $Q_i > 0$, 标量 $\alpha \geqslant 0$, $\gamma > 0$, $\mu \geqslant 1$, 使得

$$E^{\mathrm{T}}P_i^{\mathrm{T}} = P_iE \geqslant 0, \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} \mathit{\Gamma}_i & P_iA_{\tau i} & P_iG_i & I \\ A_{\tau i}^{\mathrm{T}}P_i^{\mathrm{T}} & -(1-\rho)\mathrm{e}^{\alpha b}\bar{S}_iE & 0 & 0 \\ G_i^{\mathrm{T}}P_i^{\mathrm{T}} & 0 & \mathit{\Omega}_i & 0 \\ I & 0 & 0 & \bar{S}_i^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{6}$$

$$V_{\sigma(t_k)}(t_k) \leqslant \mu V_{\sigma(t_k^-)}(t_k^-), \tag{7}$$

$$\frac{(\lambda_1 + h\mathrm{e}^{\alpha h}\lambda_3)c_1 + \lambda_4(d+\gamma l)}{\lambda_2 c_2} < \mathrm{e}^{-\alpha T_f}, \tag{8}$$

同时平均驻留时间满足

$$\pi_a > \pi_a^* = \frac{T_f \ln\mu}{\ln(\lambda_2c_2) - \ln((\lambda_1 + he^{\alpha h}\lambda_3)c_1 + \lambda_4(d+\gamma l)) - \alpha T_f}, \tag{9}$$

则切换奇异系统(1)在状态反馈控制器 $u_{\sigma(t)} = K_{\sigma(t)}x(t)$ 作用下关于 (c_1, c_2, d, l, R, T_f) 是一致有限时间有界的. 其中

$$\mathit{\Gamma}_i = \bar{A}_i^{\mathrm{T}}P_i^{\mathrm{T}} + P_i\bar{A}_i - \alpha P_iE,$$
$$\mathit{\Omega}_i = C_i^{\mathrm{T}}Q_i + Q_iC_i - (\alpha+\gamma)Q_i,$$
$$P_iE = E^{\mathrm{T}}R^{\frac{1}{2}}Z_iR^{\frac{1}{2}}E,\ \bar{S}_i = E^{\mathrm{T}}R^{\frac{1}{2}}S_iR^{\frac{1}{2}}E,$$
$$\lambda_1 = \max_{i\in\boldsymbol{M}}\{\lambda_{\max}(Z_i)\},\ \lambda_2 = \min_{i\in\boldsymbol{M}}\{\lambda_{\min}(Z_i)\},$$
$$\lambda_3 = \max_{i\in\boldsymbol{M}}\{\lambda_{\max}(S_i)\},\ \lambda_4 = \max_{i\in\boldsymbol{M}}\{\lambda_{\max}(Q_i)\}.$$

证明 由式 (6) 可知 $\mathit{\Gamma}_i < 0$, 联合式 (5) 可推导出 $\det(sE - \bar{A}_i) \neq 0$, $\deg(\det(sE - \bar{A}_i)) = \mathrm{rank}E$, 因

此 $(E,\bar{A}_i)$ 即系统 (4) 是正则、无脉冲的[15]．构造多 Lyapunov 函数

$$V(t)=V_{\sigma(t)}(t)=V_{1\sigma(t)}(t)+V_{2\sigma(t)}(t).$$

其中

$$V_{1\sigma(t)}(t)=x^{\mathrm{T}}(t)P_{\sigma(t)}Ex(t)+\omega^{\mathrm{T}}(t)Q_{\sigma(t)}\omega(t),$$

$$V_{2\sigma(t)}(t)=\int_{t-\tau(t)}^{t}x^{\mathrm{T}}(\theta)\mathrm{e}^{\alpha(t-\theta)}\bar{S}_{\sigma(t)}x(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

由式 (5), 当 $t\in[t_k,t_{k+1})$ 时, $V(t)$ 关于时间 t 的导数为

$$\begin{aligned}
&\dot{V}_{1\sigma(t)}(t)=\\
&2(x^{\mathrm{T}}(t)P_{\sigma(t_k)}E\dot{x}(t)+\omega^{\mathrm{T}}(t)Q_{\sigma(t_k)}\dot{\omega}(t))=\\
&(\bar{A}_{\sigma(t_k)}x(t)+A_{\tau\sigma(t_k)}x(t-\tau(t))+\\
&G_{\sigma(t_k)}\omega(t))^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}_{\sigma(t_k)}x(t)+x^{\mathrm{T}}(t)P_{\sigma(t_k)}(\bar{A}_{\sigma(t_k)}x(t)+\\
&A_{\tau\sigma(t_k)}x(t-\tau(t))+G_{\sigma(t_k)}\omega(t))+\\
&\omega^{\mathrm{T}}(t)C^{\mathrm{T}}_{\sigma(t_k)}Q_{\sigma(t_k)}\omega(t)+\\
&\omega^{\mathrm{T}}(t)Q_{\sigma(t_k)}C_{\sigma(t_k)}\omega(t)=\\
&x^{\mathrm{T}}(t)(\bar{A}^{\mathrm{T}}_{\sigma(t_k)}P^{\mathrm{T}}_{\sigma(t_k)}+P_{\sigma(t_k)}\bar{A}_{\sigma(t_k)})x(t)+\\
&x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))A^{\mathrm{T}}_{\tau\sigma(t_k)}P^{\mathrm{T}}_{\sigma(t_k)}x(t)+\\
&x^{\mathrm{T}}(t)P_{\sigma(t_k)}A_{\tau\sigma(t_k)}x(t-\tau(t))+\\
&\omega^{\mathrm{T}}(t)(C^{\mathrm{T}}_{\sigma(t_k)}Q_{\sigma(t_k)}+Q_{\sigma(t_k)}C_{\sigma(t_k)})\omega(t)+\\
&\omega^{\mathrm{T}}(t)G^{\mathrm{T}}_{\sigma(t_k)}P^{\mathrm{T}}_{\sigma(t_k)}x(t)+x^{\mathrm{T}}(t)P_{\sigma(t_k)}G_{\sigma(t_k)}\omega(t), \quad (10)\\
&\dot{V}_{2\sigma(t)}(t)=\alpha V_{2\sigma(t)}(t)+x^{\mathrm{T}}(t)\bar{S}_{\sigma(t_k)}x(t)-\\
&(1-\dot{\tau}(t))x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\mathrm{e}^{\alpha\tau(t)}\bar{S}_{\sigma(t_k)}x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t)). \quad (11)
\end{aligned}$$

联合式 (10) 和 (11), 可得到

$$\begin{aligned}
&\dot{V}(t)-\alpha V(t)\leqslant\\
&\xi^{\mathrm{T}}(t)\begin{bmatrix}\varGamma_{\sigma(t_k)} & P_{\sigma t_k}A_{\tau\sigma(t_k)} & P_{\sigma(t_k)}G_{\sigma(t_k)}\\ A^{\mathrm{T}}_{\tau\sigma(t_k)}P^{\mathrm{T}}_{\sigma(t_k)} & \varPhi_{\sigma(t_k)} & 0\\ G^{\mathrm{T}}_{\sigma(t_k)}P^{\mathrm{T}}_{i} & 0 & \varOmega_{\sigma(t_k)}\end{bmatrix}\xi(t).
\end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$\xi^{\mathrm{T}}(t)=[x^{\mathrm{T}}(t),x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t)),\omega^{\mathrm{T}}(t)],$$

$$\varOmega_{\sigma(t_k)}=C^{\mathrm{T}}_{\sigma(t_k)}Q_{\sigma(t_k)}+Q_{\sigma(t_k)}C_{\sigma(t_k)}-\alpha Q_{\sigma(t_k)},$$

$$\varPhi_{\sigma(t_k)}=-(1-\rho)e^{\alpha b}\bar{S}_{\sigma(t_k)}E.$$

根据式 (6) 并利用 Schur 补引理得

$$\dot{V}(t)-\alpha V(t)<\gamma\omega^{\mathrm{T}}(t)Q_{\sigma(t_k)}\omega(t). \quad (13)$$

然后计算得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{-\alpha t}V(t))<\gamma\mathrm{e}^{-\alpha t}\omega^{\mathrm{T}}(t)Q_{\sigma(t_k)}\omega(t). \quad (14)$$

从 t_k 到 t 分别对式 (14) 两边积分得

$$\begin{aligned}
&V(t)<\mathrm{e}^{\alpha(t-t_k)}V_{\sigma(t_k)}(t_k)+\\
&\gamma\int_{t_k}^{t}\mathrm{e}^{\alpha(t-s)}\omega^{\mathrm{T}}(s)Q_{\sigma(t_k)}\omega(s)\mathrm{d}s. \quad (15)
\end{aligned}$$

由式 (7) 和 (15), 在切换时刻 t_k 有

$$\begin{aligned}
&V(t)<\mathrm{e}^{\alpha(t-t_k)}\mu V_{\sigma(t_k^-)}(t_k^-)+\\
&\gamma\int_{t_k}^{t}\mathrm{e}^{\alpha(t-s)}\omega^{\mathrm{T}}(s)Q_{\sigma(t_k)}\omega(s)\mathrm{d}s. \quad (16)
\end{aligned}$$

设 N 为系统在 $[0,T_f)$ 上的切换次数, 则对于任意的 $t\in[0,T_f)$ 有 $N_\sigma(0,t)\leqslant N$, 利用迭代法得到

$$\begin{aligned}
&V(t)<\\
&\mathrm{e}^{\alpha(t)}\mu^{N}V_{\sigma(0)}(0)+\\
&\gamma\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{\alpha(t-s)}\mu^{N_\sigma(s,t)}\omega^{\mathrm{T}}(s)Q_{\sigma(s)}\omega(s)\mathrm{d}s\leqslant\\
&\mathrm{e}^{\alpha(T_f)}\mu^{N}V_{\sigma(0)}(0)+\\
&\mathrm{e}^{\alpha(T_f)}\mu^{N}\gamma\lambda_{\max}(Q_{\sigma(s)})\int_{0}^{T_f}\omega^{\mathrm{T}}(s)\omega(s)\mathrm{d}s\leqslant\\
&\mathrm{e}^{\alpha(T_f)}\mu^{N}V_{\sigma(0)}(0)+\mathrm{e}^{\alpha(T_f)}\mu^{N}\lambda_4\gamma l. \quad (17)
\end{aligned}$$

考虑到 $N\leqslant T_f/\pi_a$, 由式 (17) 得

$$V(t)<\mathrm{e}^{\alpha(T_f)}\mu^{\frac{T_f}{\pi_a}}(V_{\sigma(0)}(0)+\lambda_4\gamma l). \quad (18)$$

另外有

$$\begin{aligned}
&V(t)\geqslant x^{\mathrm{T}}(t)P_{\sigma(t)}Ex(t)\geqslant\\
&\lambda_{\boldsymbol{min}}(Z_{\sigma(t)})x^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}REx(t)\geqslant\lambda_2x^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}REx(t),
\end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
&V_{\sigma(0)}(0)\leqslant\\
&x^{\mathrm{T}}(0)P_{\sigma(0)}Ex(0)+\omega^{\mathrm{T}}(0)Q_{\sigma(0)}\omega(0)+\\
&\int_{-h}^{0}x^{\mathrm{T}}(\theta)\mathrm{e}^{-\theta\alpha}\bar{S}_{\sigma(0)}x(\theta)\mathrm{d}\theta\leqslant\\
&\lambda_{\max}(Z_{\sigma(0)})x^{\mathrm{T}}(0)E^{\mathrm{T}}REx(0)+\lambda_{\max}(Q_{\sigma(0)})d+\\
&h\mathrm{e}^{\alpha h}\lambda_{\max}(S_{\sigma(0)})\sup_{-h\leqslant\theta\leqslant0}\{x^{\mathrm{T}}(\theta)E^{\mathrm{T}}REx(\theta)\}\leqslant\\
&\lambda_4d+(\lambda_1+h\mathrm{e}^{\alpha h}\lambda_3)x^{\mathrm{T}}(t_0)E^{\mathrm{T}}REx(t_0)\leqslant\\
&\lambda_4d+(\lambda_1+h\mathrm{e}^{\alpha h}\lambda_3)c_1. \quad (20)
\end{aligned}$$

综合式 (18)～(20)得到

$$\begin{aligned}
&x^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}REx(t)<\\
&\mathrm{e}^{\alpha T_f}\mu^{\frac{T_f}{\pi_a}}\Big(\frac{(\lambda_1+h\mathrm{e}^{\alpha h}\lambda_3)c_1+\lambda_4(d+\gamma l)}{\lambda_2}\Big). \quad (21)
\end{aligned}$$

再根据式 (8) 得到

$$\ln(\lambda_2c_2)-\ln((\lambda_1+h\mathrm{e}^{\alpha h}\lambda_3)c_1+\lambda_4(d+\gamma l))>\alpha T_f. \quad (22)$$

联合式 (9) 和 (22) 有

$$\mu^{\frac{T_f}{\pi_a}}\Big(\frac{(\lambda_1+h\mathrm{e}^{\alpha h}\lambda_3)c_1+\lambda_4(d+\gamma l)}{\lambda_2}\Big)<\mathrm{e}^{-\alpha T_f}c_2, \quad (23)$$

将式 (23) 代入 (21) 得

$$x^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}REx(t)<\mathrm{e}^{\alpha T_f}\mathrm{e}^{-\alpha T_f}c_2=c_2. \quad (24)$$

根据定义 1, 切换奇异系统 (1) 在控制器 $u_i(t)=K_ix(t)$ 的作用下关于 (c_1,c_2,d,l,R,T_f) 是一致有限时间有界的. □

定理 2 对于任意的 $i\in\boldsymbol{M}$, 若存在非奇异矩阵 X_i 和矩阵 W_i, $Z_i>0$, $S_i>0$, $Q_i>0$, 标量 $\alpha\geqslant0$,

$\gamma > 0$, $\mu \geqslant 1$, 使得定理 1 中式 (7)～(9) 和各相应条件成立, 且满足

$$X_i^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} = E X_i \geqslant 0, \tag{25}$$

$$\begin{bmatrix} \Xi_i & A_{\tau i} & G_i & X_i^{\mathrm{T}} \\ A_{\tau i}^{\mathrm{T}} & -(1-\rho)\mathrm{e}^{\alpha b}\bar{S}_i E & 0 & 0 \\ G_i^{\mathrm{T}} & 0 & \varOmega_i & 0 \\ X_i & 0 & 0 & \bar{S}_i^{-1} \end{bmatrix} < 0. \tag{26}$$

其中

$$\Xi_i = A_i X_i + X_i^{\mathrm{T}} A_i^{\mathrm{T}} + B_i W_i + W_i^{\mathrm{T}} B_i^{\mathrm{T}} - \alpha E X_i,$$

$$X_i^{-\mathrm{T}} E = E^{\mathrm{T}} R^{\frac{1}{2}} Z_i R^{\frac{1}{2}} E\ \bar{S} = E^{\mathrm{T}} R^{\frac{1}{2}} S_i R^{\frac{1}{2}} E.$$

则系统 (4) 在控制器 $u_i(t) = W_i X_i^{-1} x(t)$ 的作用下关于 (c_1, c_2, d, l, R, T_f) 是一致有限时间有界的.

证明　用 $A_i + B_i K_i$ 代替定理 1 中的 $\bar{A}_i$, 对式 (6) 两边分别左乘 $\varPsi$, 右乘 $\varPsi^{\mathrm{T}}$, 其中 $\varPsi = \{P_i^{-1}, I, I, I\}$. 令 $P_i^{-T} = X_i$, 则式 (25) 和 (26) 分别与式 (5) 和 (6) 等价, 且有 $W_i = K_i X_i$. □

另外, 考虑到易于 LMI 工具箱求解, 不等式 (8) 可由如下不等式保证, 即对于任意的 $i \in \boldsymbol{M}$, 存在正数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 使得

$$\varepsilon_1 I < Z_i < \varepsilon_2 I,\ 0 < S_i < \varepsilon_3 I,\ 0 < Q_i < \varepsilon_4 I, \tag{27}$$

$$(\varepsilon_2 + h\mathrm{e}^{\alpha h}\varepsilon_3)c_1 + \varepsilon_4(d + \gamma l) < c_2 \mathrm{e}^{-\alpha T_f}\varepsilon_1. \tag{28}$$

若 $\omega(t) = 0$ (即 d, l 均为 0 的情况), 则可得到如下一类时变时滞连续切换奇异系统的一致有限时间稳定的充分条件:

$$E\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t) + A_{\tau\sigma(t)} x(t - \tau(t)) + B_{\sigma(t)} u(t). \tag{29}$$

定理 3　对于任意的 $i \in \boldsymbol{M}$, 若存在非奇异矩阵 P_i, 矩阵 $S_i > 0$, $Z_i > 0$, 标量 $\alpha \geqslant 0$, $\gamma > 0$, $\mu \geqslant 1$, 使得式 (7) 和 (25) 成立, 且满足

$$\begin{bmatrix} \Xi_i & A_{\tau i} & X_i^{\mathrm{T}} \\ A_{\tau i}^{\mathrm{T}} & -(1-\rho)\mathrm{e}^{\alpha b}\bar{S}_i E & 0 \\ X_i & 0 & \bar{S}_i^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{30}$$

$$\frac{(\lambda_1 + h\mathrm{e}^{\alpha h}\lambda_3)c_1}{\lambda_2 c_2} < \mathrm{e}^{-\alpha T_f}, \tag{31}$$

同时平均驻留时间满足

$$\pi_a > \pi_a^* = \frac{T_f \ln \mu}{\ln(\lambda_2 c_2) - \ln((\lambda_1 + h\mathrm{e}^{\alpha h}\lambda_3)c_1)}, \tag{32}$$

则系统 (29) 在状态反馈控制器 $u_i(t) = W_i X_i^{-1} x(t)$ 的作用下关于 (c_1, c_2, R, T_f) 是一致有限时间稳定的. 其中

$$\Xi_i = A_i X_i + X_i^{\mathrm{T}} A_i^{\mathrm{T}} + B_i W_i + W_i^{\mathrm{T}} B_i^{\mathrm{T}} - \alpha E X_i,$$

$$X_i^{-\mathrm{T}} E = E^{\mathrm{T}} R^{\frac{1}{2}} Z_i R^{\frac{1}{2}} E,\ \bar{S}_i = E^{\mathrm{T}} R^{\frac{1}{2}} S_i R^{\frac{1}{2}} E,$$

$$\lambda_1 = \max_{i \in \boldsymbol{M}}\{\lambda_{\max}(Z_i)\},\ \lambda_2 = \min_{i \in \boldsymbol{M}}\{\lambda_{\min}(Z_i)\},$$

$$\lambda_3 = \max_{i \in \boldsymbol{M}}\{\lambda_{\max}(S_i)\}.$$

相应的不等式 (31) 可由如下不等式保证, 即对于任意的 $i \in \boldsymbol{M}$, 存在正数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 使得

$$\varepsilon_1 I < Z_i < \varepsilon_2 I,\ 0 < S_i < \varepsilon_3 I, \tag{33}$$

$$(\varepsilon_2 + h\mathrm{e}^{\alpha h}\varepsilon_3)c_1 < c_2 \mathrm{e}^{-\alpha T_f}\varepsilon_1. \tag{34}$$

3　数值算例

考虑时变时滞连续切换奇异系统 (1), 参数如下:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1.2 & -0.4 \\ -1 & -0.6 & 0.5 \\ -1 & 0.5 & 0.6 \end{bmatrix},$$

$$A_{\tau 1} = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.7 & 0.6 \\ -1 & 1 & 0.3 \\ 0.6 & -0.2 & 1 \end{bmatrix},\ B_1 = \begin{bmatrix} 0.8 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 \\ -0.2 & 0.4 \\ 0.2 & -0.1 \end{bmatrix},\ C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ -0.1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2.2 & -0.7 & 0.3 \\ 0.8 & 0.4 & -0.6 \\ -1 & 0.3 & 0.9 \end{bmatrix},\ A_{\tau 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & -0.8 \\ -2 & 1.2 & -0.5 \\ -0.6 & 0.3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1.2 \\ 1 \end{bmatrix},\ G_2 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.2 \\ 0.1 & -0.3 \\ -0.2 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$\omega(t) = \begin{bmatrix} 0.2\sin(0.1t) \\ 0.2\cos(0.2t) \end{bmatrix},\ \phi(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

选取 $\rho = 0.2$, $b = 0.05$, $\alpha = 0.1$, $h = 0.3$, $\mu = 1.2$. 当 $c_1 = 2$, $c_2 = 10$, $d = 0.5$, $l = 1$, $T_f = 10$, $R = I$ 时, 由定理 2 可得

$$X_1 = \begin{bmatrix} -0.4936 & 0.2478 & 0 \\ 0.2478 & 0.5904 & 0 \\ -0.5218 & 0.3529 & -0.6476 \end{bmatrix},$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0.8427 & 0.1761 & 0 \\ 0.1761 & 0.4419 & 0 \\ 1.1035 & -0.3982 & 0.8086 \end{bmatrix},$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0.4753 & -0.3044 & 0.1627 \\ -0.3044 & 0.5149 & -0.0792 \\ 0.1627 & -0.0792 & 0.2448 \end{bmatrix},$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} -0.5647 & 0.0443 & -0.9312 \\ 0.0443 & 1.121 & -0.2250 \\ -0.9312 & -0.2250 & 0.8022 \end{bmatrix},$$

$$W_1 = [0.3822\ \ 0.2407\ \ -0.633,3],$$

$$W_2 = [-0.1375\ \ -1.1614\ \ 0.7970].$$

通过计算得到

$$K_1 = [-3.4360\ \ 2.7970\ \ 0.9577],$$

$$K_2 = [1.7963\ \ -2.1313\ \ -0.7406].$$

另外, 由式(9)得到平均驻留时间 $\pi_a > \pi^* = 1.5210$, 因此可以保证系统是一致有限时间有界的. $x^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}REx(t)$ 和切换信号分别如图1和图2所示.

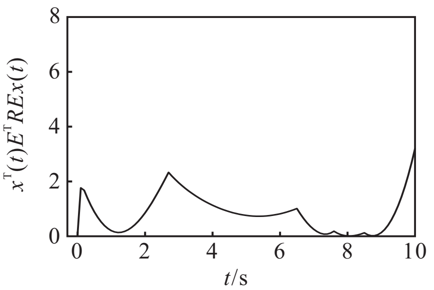

图 1 $x^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}REx(t)$ 曲线

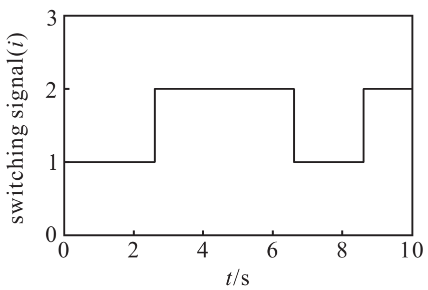

图 2 切换信号 σ

4 结 论

控制系统中由于时滞的存在导致产生振荡和不稳定, 同时给理论分析和实际工程应用增加了难度. 本文基于多Lyapunov函数结合平均驻留时间方法, 研究了一类含有时变时滞的连续切换奇异系统的有限时间稳定、有限时间有界和状态反馈镇定问题. 后续工作将围绕含有不确定性参数的切换奇异系统输出反馈镇定的研究展开.

参考文献(References)

[1] Shi S, Zhang Q, Yuan Z, et al. Hybrid impulsive control for switched singular systems[J]. IET Control Theory and Applications, 2011, 5(1): 103-111.

[2] Ding Y C, Zhu H, Zhong S M, et al. Exponential mean-square stability of time-delay singular systems with Markovian switching and nonlinear perturbations[J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 219(4): 2350-2359.

[3] Lin J X, Fei S M. Robust exponential admissibility of uncertain switched singular time-delay systems[J]. Int J of Control, 2011, 84(10): 1587-1600.

[4] 高在瑞, 沈艳霞, 纪志成. 非线性切换广义系统的输入-状态稳定性[J]. 控制理论与应用, 2013, 30(3): 385-391.
(Gao Z R, Shen Y X, Ji Z C. Input-to-state stability analysis for nonlinear switched descriptor systems[J]. Control Theory & Applications, 2013, 30(3): 385-391.)

[5] Zamani I, Shafiee M, Ibeas A. Exponential stability of hybrid switched nonlinear singular systems with time-varying delay[J]. J of the Franklin Institute, 2013, 350(1): 171-193.

[6] Koeniig D, Marx B, Jacquet D. Unknown input observers for switched nonlinear discrete time descriptor systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(1): 373-379.

[7] Weiss L, Infante E. Finite time stability under perturbing forces and on product spaces[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1967, 12(1): 54-59.

[8] Dorato P. Short-time stability in linear time varying systems[C]. Proc of the IRE Int Convention Record. New York: IEEE Press, 1961: 83-87.

[9] 林相泽, 都海波, 李世华. 离散线性切换系统的一致有限时间稳定分析和反馈控制及其在网络控制系统中的应用[J]. 控制与决策, 2011, 26(6): 841-846.
(Lin X Z, Du H B, Li S H. Uniform finite-time stability and feedback stabilization for discrete-time switched linear systems and its application to networked control systems[J]. Control and Decision, 2011, 26(6): 841-846.)

[10] Orlov Y. Finite time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems[J]. Siam J of Control Optimization, 2005, 43(4): 1253-1271.

[11] Wang Y J, Shi X M, Zuo Z Q, et al. On finite-time stability for nonlinear impulsive switched systems[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2013, 14(1): 807-814.

[12] Zhang Y Q, Liu C X, Mu X W. Robust finite-time H_∞ control of singular stochastic systems via static output feedback[J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 218(9): 5629-5640.

[13] Feng J E, Wu Z, Sun J B. Finite-time control of linear singular systems with parametric uncertainties and disturbances[J]. Acta Automatica Sinica, 2005, 31(4): 634-637.

[14] Zhang Y Q, Liu C X, Mu X W. Robust finite-time stabilization of uncertain singular Markovian jump systems[J]. Applied Mathematics Modelling, 2012, 36(10): 5109-5121.

[15] Fang M. Delay-dependent robust H_∞ control for uncertain singular systems with state delay[J]. Acta Automatica Sinica, 2009, 35(1): 65-70.

(责任编辑: 郑晓蕾)