

不确定多智能体互联动态系统分布式鲁棒 H_∞ 协同控制

刘建刚¹, 黄志武¹, 王 晶^{1,2}

(1. 中南大学 a. 信息科学与工程学院, b. 先进控制与智能自动化湖南省工程实验室, 长沙 410075; 2. 贝休恩-考克曼大学 数理科学工程学院, 得通纳 32114)

摘要: 研究一类具有时延和切换拓扑的不确定多智能体互联系统的分布式协同控制问题, 提出一类分布式鲁棒 H_∞ 协同控制器. 该控制器能够在满足期望的 H_∞ 性能指标的前提下, 使得所有智能体鲁棒地跟踪虚拟 Leader. 针对所提出的分布式 H_∞ 协同控制器, 借助 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 利用线性矩阵不等式, 推导出一系列充分(必要)条件, 并且在通信拓扑连通的前提条件下, 给出整个闭环系统的稳定性证明. 仿真实例表明了所提出方法的有效性.

关键词: 不确定多智能体互联系统; 分布式鲁棒 H_∞ 协同控制; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Distributed robust H_∞ cooperative control of uncertain multi-agent interconnected dynamic systems

LIU Jian-gang¹, HUANG Zhi-wu¹, WANG Jing^{1,2}

(1a. School of Information Science and Engineering, 1b. Hu'nan Engineering Laboratory for Advanced Control and Intelligent Automation, Central South University, Changsha 410075, China; 2. School of Science Engineering and Mathematics, Bethune-Cookman University, Daytona 32114, USA. Correspondent: HUANG Zhi-wu, E-mail: hzw@csu.edu.cn)

Abstract: The distributed cooperative control problem for a class of uncertain interconnected multi-agent systems with time-delays and switching topologies is investigated. A distributed robust H_∞ cooperative control is proposed to make sure that all agents robustly follow the virtual leader while satisfying the desired H_∞ performance. A set of conditions for the proposed distributed H_∞ control design are derived in details with the aid of Lyapunov-Krasovskii function and linear matrix inequality methods, and the rigorous stability proof of the overall closed-loop system is given under the assumption that the communication topology is connected. Simulation examples show the effectiveness of the proposed method.

Key words: uncertain interconnected multi-agent systems; distributed robust H_∞ cooperative control; linear matrix inequality

0 引言

近年来, 多智能体互联系统一致性和协同控制理论的相关研究, 受到了国内外学者的广泛关注^[1-2]. 智能电网中网络的负载均衡、智能交通系统中无人车辆的自动驾驶、无人机的编队飞行、卫星系统中航天器和飞行器的姿态调整与同步等, 都蕴含着多智能体互联系统的一致性和协同控制问题^[3].

一致性和分布式协同控制问题的相关研究主要与通信拓扑结构和系统模型特征密切相关, 其中文献

[4-8]的研究主要针对网络连通条件和时延分析系统的稳定性. 现实中系统会受到测量噪声、扰动和模型不确定性、通信不确定性等因素的影响, 如何设计鲁棒控制策略克服这些因素对系统稳定性和性能的影响已成为亟待解决的问题.

目前处理不确定性和扰动的方法主要集中在两个方面: 1) 利用 H_∞ 滤波、Kalman 滤波、粒子滤波等滤波方法滤除扰动的影响, 这种滤波方法结合一致性协同控制策略便形成了新的一致性滤波算法, 通过设

收稿日期: 2013-04-26; 修回日期: 2013-11-25.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61071096, 61073103, 61003233); 教育部博士点基金项目(20100162110012, 20110162110042).

作者简介: 刘建刚(1984-), 男, 博士生, 从事多智能体系统协同控制及其应用的研究; 黄志武(1966-), 男, 教授, 博士生导师, 从事协同控制、故障诊断等研究.

加权值更新律,使各节点的估计值尽可能地逼近真实值,以成功地解决移动传感网络中的目标追踪问题; 2)在系统存在不确定性和扰动的前提下,推导出实现一致性协同目标的条件^[7-14].当系统中存在扰动时,文献[9-12]在有向通信拓扑条件下,针对一阶积分器多智能体系统,基于经典的控制器结构将原系统模型降阶^[7-8],利用线性矩阵不等式推导出了满足系统鲁棒性的条件.文献[13-14]在无向通信拓扑条件下,针对广义线性多智能体系统,借助矩阵变换将整个闭环系统解耦,通过分析解耦后每个子系统的渐近稳定条件和鲁棒性能,得到整个系统的鲁棒性条件;定义了 H_∞ 性能域的概念,利用线性矩阵不等式推导出系统具有无界性能域的充要条件,当具有无界性能域时,所设计的包含控制增益和耦合强度的控制器对系统的拓扑变化是鲁棒的.

以上条件和方法^[7-14]主要解决的是平均一致性问题,即协同目标是初始状态的平均值,在现实中往往需要根据期望的要求设定协同目标.本文以此为出发点,针对一阶积分器多智能体系统,考虑模型的不确定性、外界扰动和通信噪声,针对固定拓扑和切换拓扑两类拓扑结构,结合有无时延两种情形,利用 H_∞ 范数刻画扰动对系统输出的影响.通过设计鲁棒的协同控制策略,利用线性矩阵不等式推导出一系列充分(必要)条件,当满足这些条件时系统能够渐近稳定,并且能够使所有的智能体能够在所设计的控制策略下鲁棒地收敛到期望的状态,最终解决一致性跟踪问题.

1 问题描述

考虑如下—阶线性不确定多智能体互联系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = u_i(t) + \omega_i(t), \\ z_i(t) = x_i(t) - \hat{r}_0. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $i = 1, 2, \dots, n$; $x_i(t) \in R$ 为智能体 i 的状态; $u_i(t) \in R$ 为控制输入; $\omega_i(t) \in L_2[0, \infty)$ 为外界扰动输入,且满足 $\int_0^{+\infty} |\omega_i(t)|^2 dt < +\infty$; $z_i(t) \in R$ 为系统性能变量; $\hat{r}_0 \in R$ 为虚拟 Leader.

注 1 为了分析的方便,本文考虑一维空间上的多智能体互联系统(1).然而,提出的设计和分析方法可以借助 Kronecker 积拓展到高维空间上的多智能体互联系统.

本文中, n 个智能体之间的通信拓扑利用图 $G(\nu, \varepsilon, A)$ 描述^[15], $\nu = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 为节点集, ε 为边集且 $\varepsilon \subseteq \nu \times \nu$, $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 为非负加权邻接矩阵,边 (v_i, v_j) 意味着节点 v_i 与节点 v_j 可彼此通信.

定义 1 如果图 $G(\nu, \varepsilon, A)$ 没有自环,则其是简单图^[4,15],即其邻接矩阵对角线元素 $a_{ii} = 0$,且拉普拉

斯矩阵为 $L_s = [l_{ij}]_{n \times n}$,其中

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1, k \neq i}^n a_{ik}, & j = i; \\ -a_{ij}, & j \neq i. \end{cases} \quad (2)$$

引理 1 若图 $G(\nu, \varepsilon, A)$ 是连通的,对于所有的 i ,至少有一个 $a_{i0} \neq 0$,则矩阵 $L = L_s + \text{diag}\{a_{i0}\}$ 是正定的.

本文的控制目标是设计协同控制律 $u_i(t)$,使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_i(t) - \hat{r}_0) = 0$,且满足 H_∞ 性能指标.

提出如下分布式协同控制律:

$$u_i = \sum_{v_j \in N_i} a_{ij}(x_j - x_i) - a_{i0}(x_i - \hat{r}_0). \quad (3)$$

其中: $N_i = \{v_j \in \nu : (v_j, v_i) \in \varepsilon\}$ 为节点 v_i 的邻居集; $a_{ij} > 0$ 表示第 i 个智能体知道第 j 个智能体的信息; $a_{i0} = 1$ 表示第 i 个智能体知道虚拟 Leader 的信息,否则 $a_{i0} = 0$.

定义局部跟踪误差 $e_i = x_i - \hat{r}_0$,分布式控制律(3)可以改写为

$$u_i = \sum_{v_j \in N_i} a_{ij}(x_j - x_i) - a_{i0}e_i. \quad (4)$$

系统(1)跟踪误差状态方程为

$$\begin{cases} \dot{e}_i(t) = u_i(t) + \omega_i(t), \\ z_i(t) = e_i(t), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

控制律(4)是典型的协同控制律.本文针对系统存在外界扰动 $\omega_i(t)$ 、传感器和通信噪声的情况下,给出系统的稳定性和鲁棒性分析.在现实情况下,由于传感器和通信噪声的影响,控制律(4)实际上变为

$$u_i = \sum_{v_j \in N_i} a_{ij}(x_j + \delta x_j - x_i - \delta x_i) - a_{i0}(x_i + \delta x_i - \hat{r}_0), \quad (6)$$

其中 δx_j 和 δx_i 为通信不确定性带来的信号噪声.进一步,对于智能体 i ,若 $a_{ij} > 0$,则 δx_j 和 x_j 满足 $\delta x_j = \Delta a_{ij}(t)x_j(t)$,其中 $\Delta a_{ij}(t)$ 是未知的.

至此,将控制律(6)代入(5),得到整个闭环系统跟踪误差状态方程如下:

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = -(L + \Delta L)e(t) + \omega(t), \\ z(t) = Ce(t). \end{cases} \quad (7)$$

其中: $e = [e_1, e_2, \dots, e_n]^T$, $\omega = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]^T$, $z = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T$; $C = I$, I 为 n 阶单位阵; $L = L_s + \text{diag}\{a_{i0}\}$ 为对应图 $G(\nu, \varepsilon, A)$ 变形后的拉普拉斯矩阵, $\Delta L = [\Delta l_{ij}]_{n \times n}$ 视为不确定拉普拉斯矩阵,代表网络通信造成的多智能体互联系统的不确定性,且有

$$\Delta l_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^n \Delta a_{ik}(t), & j = i; \\ -\Delta a_{ij}(t), & j \neq i. \end{cases} \quad (8)$$

对应某个常数 ρ_{ij} , 有 $|\Delta a_{ij}(t)| \leq \rho_{ij}$.

ΔL 可以进一步写成 $\Delta L = F\tilde{D}(t)F^T$. 其中: $F \in R^{n \times |e|}$; $\tilde{D}(t) \in R^{|e| \times |e|}$ 为对角阵, 对角线元素为 $\Delta a_{ij}(t)$.

定义

$$D(t) = \text{diag}\left\{\frac{a_{ij}}{\rho_{ij}}\right\}, \rho_\delta = \text{diag}\{\rho_{ij}\}.$$

ΔL 可以写作 $\Delta L = F_1 D(t) F_2$. 其中: $F_1 = F, F_2 = \rho_\delta F^T$. 注意到 $|a_{ij}|/\rho_{ij} \leq 1$, 可得到 $D^T(t)D(t) \leq I$. 另外, 存在时延的情况下, 控制律 (6) 可以改写为

$$u_i = \sum_{v_j \in N_i} a_{ij}(x_j(t-\tau) + \delta x_j(t-\tau) - x_i(t-\tau) - \delta x_i(t-\tau)) - a_{i0}(x_i(t-\tau) + \delta x_i(t-\tau) - \hat{r}_0), \quad (9)$$

其中 τ 为时延. 类似地, 在控制协议 (9) 下, 不确定多智能体互联系统的整个闭环系统跟踪误差状态方程为

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = -(L + \Delta L)e(t-\tau) + \omega(t), \\ z(t) = Ce(t). \end{cases} \quad (10)$$

H_∞ 协同控制问题描述如下: 对于给定的允许的 $\gamma > 0$, 在分布式控制律 (9) 下, 有:

1) 当 $\omega(t) \equiv 0$ 时, 多智能体互联系统 (1) 渐近稳定, 即智能体状态满足 $\lim_{t \rightarrow +\infty} e_i(t) = 0$, 所有智能体渐近跟踪虚拟 Leader;

2) 当 $\omega(t) \neq 0$ 时, 多智能体互联系统 (1) 满足 $\|T_{\omega z}\|_\infty < \gamma$, 其中 $\|T_{\omega z}\|_\infty$ 为 $T_{\omega z}$ 的 H_∞ 范数, $T_{\omega z}$ 为多智能体互联系统 (1) 扰动 ω 到 z 的传递函数矩阵.

注 2 对于 $i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j, \|T_{\omega z}\|_\infty < \gamma$ 等价于

$$\|z(t)\|_2^2 < \gamma^2 \|w(t)\|_2^2, \forall w(t) \in L_2(0, +\infty]. \quad (11)$$

对于给定的允许的 $\gamma > 0$, 定义 H_∞ 性能指标

$$J = \int_0^\infty [z^T(t)z(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t)] dt, \quad (12)$$

H_∞ 协同控制目标 $\|T_{\omega z}\|_\infty < \gamma$ 等价于 $J < 0$.

2 不确定多智能体互联系统稳定性和鲁棒性分析

首先分析无时延的不确定多智能体互联系统分别在固定拓扑结构和切换拓扑结构下的稳定性和鲁棒性, 进而分析具有时延的不确定多智能体互联系统在固定拓扑结构和切换拓扑结构下的稳定性和鲁棒性.

2.1 无时延固定拓扑和切换拓扑情形

引理 2 对于给定的对称矩阵 $A_1, P_1, Q_1, Q_1 = Q_1^T$ 和 $P_1^T = P_1 > 0$, 不等式 $Q_1 + A_1^T P_1 A_1 < 0$ 成立当且仅当

$$\begin{bmatrix} Q_1 & A_1^T \\ A_1 & -P_1^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (13)$$

引理 3 对于给定的实矩阵 $\Psi = \Psi^T, F_1, F_2, D^T(t)D(t) \leq I$, 不等式

$$\Psi + F_1 D(t) F_2 + F_2^T D^T(t) F_1^T < 0$$

成立, 当且仅当存在标量 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\Psi + \varepsilon^{-1} F_1 F_1^T + \varepsilon F_2^T F_2 < 0. \quad (14)$$

定理 1 考虑多智能体互联系统 (1) 具有固定的通信拓扑, 假定图 $G(\nu, \varepsilon, A)$ 是连通的, 且至少有一个智能体 i 满足 $a_{i0} \neq 0$, H_∞ 协同控制问题是可解的, 如果存在对称的正定矩阵 $P \in R^{n \times n}$ 和标量 $\varepsilon > 0$ 满足

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & P F_1 & P \\ F_1^T P & -\varepsilon I & 0 \\ P & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (15)$$

其中 $\Psi_{11} = -L^T P - PL + C^T C + \varepsilon F_2^T F_2$.

证明 首先证明如果 P 存在且满足条件 (15), 则当 $\omega(t) \equiv 0$ 时, 全局跟踪误差状态方程 (7) 是渐近稳定的, 当 $\omega(t) \neq 0$ 时, 系统具有鲁棒性能 $\|T_{\omega z}\| < \gamma$; 然后证明如果图是连通的, 则矩阵 P 的确存在.

考虑如下 Lyapunov 函数:

$$V(t) = e^T(t) P e(t) > 0. \quad (16)$$

当 $\omega(t) \equiv 0$ 时, 其沿全局跟踪误差状态方程 (7) 状态轨迹关于时间的导数为

$$\dot{V}(t) = e^T(-P(L + \Delta L) - (L + \Delta L)^T P)e. \quad (17)$$

根据引理 2 和引理 3, $\dot{V}(t) < 0$ 等价于

$$\begin{bmatrix} -PL - L^T P + \varepsilon F_2^T F_2 & P F_1 \\ F_1^T P & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0. \quad (18)$$

因此, 如果 P 满足式 (18), 则 $\dot{V} < 0$, 即全局跟踪误差状态方程 (7) 是渐近稳定的.

当 $\omega(t) \neq 0$ 时, 考虑如下 H_∞ 性能指标:

$$J = \int_0^\infty [z^T(t)z(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t)] dt = \int_0^\infty [z^T(t)z(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t) + \dot{V}(t)] dt - V(\infty) + V(0) < \int_0^\infty [z^T(t)z(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t) + \dot{V}(t)] dt.$$

注意到

$$z^T(t)z(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t) + \dot{V}(t) = [e^T(t) \ \omega^T(t)] \Theta \begin{bmatrix} e(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix},$$

于是, $J < 0$ 等价于 $\theta < 0$, 其中

$$\theta = \begin{bmatrix} -P(L + \Delta L) - (L + \Delta L)^T P + C^T C & P \\ P & -\gamma^2 I \end{bmatrix}.$$

根据引理 2 和引理 3, $\theta < 0$ 等价于

$$\begin{bmatrix} -PL - L^T P + C^T C + \varepsilon F_2^T F_2 & P \\ P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} PF_1 \\ 0 \end{bmatrix} (\varepsilon^{-1} I) [F_1^T P \ 0] < 0. \quad (19)$$

因此, 如果 P 满足式 (15), 则满足式 (19), 进而 $J < 0$ 成立, H_∞ 性能指标 $\|T_{\omega z}\|_\infty < \gamma$ 可达到.

下面证明若图是连通的, 且至少有一个 $a_{i0} \neq 0$, 则满足条件 (15) 的矩阵 P 的存在性. 根据引理 1, 可以知道若图是连通的, 并且至少有一个 $a_{i0} \neq 0$, 则对应的矩阵 L 是正定的, 即 $-L$ 是 Hurwitz 矩阵. 另一方面, 根据引理 2, 线性矩阵不等式 (15) 等价于

$$\begin{bmatrix} \chi & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon I & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned} \chi = & -L^T P - PL + C^T C + \varepsilon F_2^T F_2 + \\ & \frac{1}{\varepsilon} P F_1 F_1^T P + \frac{1}{\gamma^2} P P^T. \end{aligned}$$

由于 $-L$ 是 Hurwitz 矩阵, 对于任意的正定矩阵 $kQ_0 (k > 0)$, 存在正定矩阵 P 满足

$$-L^T P - PL = -kQ_0,$$

进而有

$$\begin{aligned} \chi = & -kQ_0 + C^T C + \varepsilon F_2^T F_2 + \\ & \frac{1}{\varepsilon} P F_1 F_1^T P + \frac{1}{\gamma^2} P P^T. \end{aligned}$$

因此, 如果正的标量 k 充分大, 则 $\chi < 0$. \square

推论 1 考虑多智能体互联系统 (1) 具有切换通信拓扑 $G_{s(t)}$, 假定在每个时间段, 图 $G_{s(t)}$ 是强连通且平衡的, 且至少有一个智能体 i 满足 $a_{i0} \neq 0$, H_∞ 协同控制问题是可解的, 如果存在公共的对称正定矩阵 $P \in R^{n \times n}$ 和标量 $\varepsilon > 0$ 满足

$$\Psi_s = \begin{bmatrix} \Psi_{11}^s & P F_{1s(t)} & P \\ F_{1s(t)}^T P & -\varepsilon I & 0 \\ P & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (21)$$

其中: $\Psi_{11}^s = -L_{s(t)}^T P - PL_{s(t)} + C^T C + \varepsilon F_{2s(t)}^T F_{2s(t)}$, $s(t)$ 为决定切换拓扑的有限个切换信号.

证明过程类似于定理 1, 用 $L_{s(t)}, F_{1s(t)}, F_{2s(t)}$ 分

别替代定理 1 中的 L, F_1, F_2 即可, 此略.

定理 1 中的 LMI 条件可以进一步简化, 假定图 $G(\nu, \varepsilon, A)$ 是连通的, 且至少有一个智能体 i 知道虚拟 Leader 的信息, 即对应的拉普拉斯矩阵 L_s 除特征根 0 外, 其余特征根实部均大于 0 (变形后的矩阵 L 所有特征根实部均大于 0). 如果存在正定的矩阵 P (特征根均大于 0) 和标量 $\varepsilon > 0$, 满足矩阵 Ψ 负定, 则当 $\omega(t) \equiv 0$ 时, 多智能体互联系统 (1) 渐近稳定; 当 $\omega(t) \neq 0$ 时, 多智能体互联系统 (1) 满足相应的 H_∞ 性能指标. 反之, 如果图的权重充分大, 对应的拉普拉斯矩阵 L_s 除特征根 0 外, 其余特征根实部均大于 0, 则矩阵 $P > 0$ 的确存在. 类似地, 推论 1 中的 LMI 条件也可以进一步简化, 假定在每个时间段, 图 $G_{s(t)}$ 是强连通且平衡的, 至少有一个智能体 i 知道虚拟 Leader 的信息, 即在每个时间段, 网络通信拓扑对应的拉普拉斯矩阵 L_s 除特征根 0 外, 其余特征根实部均大于 0. 如果存在公共的正定矩阵 P (特征根均大于 0) 和标量 $\varepsilon > 0$ 满足矩阵 Ψ_s 负定, 则 H_∞ 协同控制问题是可解的. 反之, 如果有限个图是强连通且平衡的, 则公共的正定矩阵 P 的确存在.

2.2 有时延固定拓扑和切换拓扑情形

本节分析在时延存在的情况下, 系统 (1) 的稳定性和鲁棒性. 定理 2 给出了时滞多智能体互联系统 (1) 的稳定性和鲁棒性条件.

定理 2 在固定的通信拓扑下, 考虑具有时延的多智能体互联系统 (1), 假定图是连通的, 且至少有一个智能体 i 满足 $a_{i0} \neq 0$, H_∞ 协同控制问题是可解的, 如果存在对称的正定矩阵 $P, Q, R \in R^{n \times n}$ 和标量 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 > 0$ 满足

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} \\ \Xi_{12}^T & \Xi_{22} \end{bmatrix} < 0. \quad (22)$$

其中

$$\Xi_{11} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & 0 & P \\ 0 & \Lambda_{22} & -\tau L^T R \\ P & -\tau R L & -\gamma^2 I + \tau R \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_{11} = -PL - L^T P + Q + C^T C,$$

$$\Lambda_{22} = -Q + (\xi_1 + \tau \xi_2 + \tau \xi_3 + \tau \xi_4) F_2^T F_2,$$

$$\Xi_{12} = \begin{bmatrix} PL & P F_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau L^T R & \tau L^T R F_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R F_2 \end{bmatrix},$$

$$\Xi_{22} = \text{diag} \left\{ -\frac{R}{\tau}, -\xi_1 I, -\tau R, -\tau \xi_2 I, \Pi, -\frac{\xi_4}{\tau} I \right\},$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} -\tau R & R F_1 \\ F_1^T R & -\frac{\xi_3 I}{\tau} \end{bmatrix}.$$

证明 首先证明如果矩阵 \$P, Q, R\$ 存在且满足条件 (22), 则当 \$\omega(t) \equiv 0\$ 时, 具有时延的全局跟踪误差状态方程 (10) 是渐近稳定的; 然后证明当 \$\omega(t) \neq 0\$ 时, 鲁棒性能 \$\|T_{\omega z}\| < \gamma\$ 可实现.

考虑如下 Lyapunov-Krasovskii 函数:

$$V(t) = e^T(t)Pe(t) + \int_{t-\tau}^t e^T(s)Qe(s)ds + \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{e}^T(s)R\dot{e}(s)dsd\theta, \quad (23)$$

其沿系统 (10) 关于时间的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & -2e^T(t)PLe(t-\tau) - 2e^T(t)P\Delta Le(t-\tau) + \\ & e^T(t)Qe(t) - e^T(t-\tau)Qe(t-\tau) - \\ & \int_{t-\tau}^t \dot{e}^T(s)R\dot{e}(s)ds + \tau e^T(t-\tau)L^T RLe(t-\tau) + \\ & 2\tau e^T(t-\tau)L^T R\Delta Le(t-\tau) + \\ & \tau e^T(t-\tau)\Delta L^T R\Delta Le(t-\tau). \end{aligned} \quad (24)$$

由 Newton-Leibniz 公式可得

$$e(t-\tau) = e(t) - \int_{t-\tau}^t \dot{e}(s)ds. \quad (25)$$

注意到, 对于任意的 \$x, y \in R^n\$ 和正定对称矩阵 \$\bar{R} \in R^{n \times n}\$, 有

$$2x^T y \leq x^T \bar{R}^{-1} x + y^T \bar{R} y. \quad (26)$$

借助式 (25) 和 (26), 可得

$$\begin{aligned} -2e^T(t)PLe(t-\tau) \leq & -2e^T(t)PLe(t) + \tau e^T(t)PLR^{-1}L^T Pe(t) + \\ & \int_{t-\tau}^t \dot{e}^T(s)R\dot{e}(s)ds, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} -2e^T(t)P\Delta Le(t-\tau) \leq & \frac{1}{\xi_1} e^T(t)PF_1 F_1^T Pe(t) + \xi_1 e^T(t-\tau)F_2^T F_2 e(t-\tau), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} 2\tau e^T(t-\tau)L^T R\Delta Le(t-\tau) \leq & e^T(t-\tau) \left(\frac{\tau}{\xi_2} L^T R F_1 F_1^T R L + \tau \xi_2 F_2^T F_2 \right) e(t-\tau). \end{aligned} \quad (29)$$

将式 (27)~(29) 代入 (24), 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & e^T(t)M_1 e(t) + e^T(t-\tau)M_2 e(t-\tau) = \\ & [e^T(t) \ e^T(t-\tau)] \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ e(t-\tau) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (30)$$

其中

$$\begin{aligned} M_1 = & -PL - L^T P + \frac{1}{\xi_1} P F_1 F_1^T P + \\ & \tau P L R^{-1} L^T P + Q, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2 = & \Phi_1 + \tau \Delta L^T R \Delta L, \\ \Phi_1 = & -Q + \tau L^T R L + \xi_1 F_2^T F_2 + \\ & \tau \left(\frac{1}{\xi_2} L^T R F_1 F_1^T R L + \xi_2 F_2^T F_2 \right). \end{aligned}$$

\$\dot{V}(t) < 0\$ 等价于

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} < 0. \quad (31)$$

通过变形, 利用引理 2, 不等式 \$M_1 < 0\$ 等价于

$$\bar{M}_1 = \begin{bmatrix} -L^T P - PL + Q & PL & P F_1 \\ L^T P & -R/\tau & 0 \\ F_1^T P & 0 & -\xi_1 I \end{bmatrix} < 0. \quad (32)$$

类似地, 重复利用引理 2 和引理 3, 不等式 \$M_2 < 0\$ 等价于

$$\bar{M}_2 = \begin{bmatrix} -\bar{Q} & \tau L^T R & \tau L^T R F_1 & 0 & 0 \\ \tau R L & -\tau R & 0 & 0 & 0 \\ \tau F_1^T R L & 0 & -\tau \xi_2 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\tau R & R F_1 \\ 0 & 0 & 0 & F_1^T R & -\xi_3/\tau I \end{bmatrix} < 0. \quad (33)$$

因此, 若存在正定矩阵 \$P, Q, R\$ 和标量 \$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 > 0\$ 满足式 (22), 即 \$P, Q, R\$ 满足式 (32) 和 (33), 则 \$\bar{M}_1 < 0\$ 且 \$\bar{M}_2 < 0\$. 根据式 (30) 可得, 如果 \$\bar{M}_1 < 0, \bar{M}_2 < 0\$, 则 \$M_1 < 0, M_2 < 0\$, 进而得到 \$\dot{V} < 0\$, 且具有时延的全局跟踪误差状态方程 (10) 渐近稳定.

为了讨论鲁棒性能, 当扰动 \$\omega(t)\$ 存在时, 考虑 \$H_\infty\$ 性能指标 \$J\$. 接下来有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & e^T(t)M_1 e(t) + e^T(t-\tau)M_2 e(t-\tau) + \\ & 2e^T(t)P\omega(t) + \tau\omega^T(t)R\omega(t) - 2\tau e^T(t-\tau)L^T R\omega(t) + \\ & \tau(\xi_4 e^T(t-\tau)F_2^T F_2 e(t-\tau) + \\ & \frac{1}{\xi_4} \omega^T(t)R F_1 F_1^T R \omega(t)), \\ J = & \int_0^\infty [z^T(t)z(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t)]dt = \\ & \int_0^\infty [z^T(t)z(t) - \\ & \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t) + \dot{V}(t)]dt - V(\infty) + V(0) < \\ & \int_0^\infty [z^T(t)z(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t) + \dot{V}(t)]dt. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} z^T(t)z(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t) + \dot{V}(t) = & [e^T(t) \ e^T(t-\tau) \ \omega^T(t)] \Omega \begin{bmatrix} e(t) \\ e(t-\tau) \\ \omega(t) \end{bmatrix} < 0, \end{aligned}$$

其中

$\Omega =$

$$\begin{bmatrix} M_1 + C^T C & 0 & P \\ 0 & M_2 + \tau \xi_4 F_2^T F_2 & -\tau L^T R \\ P & -\tau R L & -\gamma^2 I + \frac{\tau}{\xi_4} R F_1 F_1^T R \end{bmatrix}$$

于是, $J < 0$ 等价于

$$z^T(t)z(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t) + \dot{V}(t) < 0. \quad (34)$$

然而, 式(34)等价于 $\Omega < 0$, 重复利用引理2和引理3, 可得式(22). 因此, 如果存在正定矩阵 P, Q, R 和标量 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 > 0$ 满足式(22), 则 $\Omega < 0, H_\infty$ 性能指标 $\|T_{\omega z}\|_\infty < \gamma$ 可达. \square

下面讨论具有时延的不确定多智能体互联系统(1)在切换拓扑下的稳定性和鲁棒性.

推论 2 考虑具有时延的多智能体互联系统(1)在切换通信拓扑 $G_{s(t)}$ 下, 假定每个时间段内, 图 $G_{s(t)}$ 是强连通且平衡的, 且至少有一个智能体 i 满足 $a_{i0} \neq 0, H_\infty$ 协同控制问题是可解的, 如果存在公共的对称正定矩阵 $P, Q, R \in R^{n \times n}$ 和标量 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 > 0$ 满足

$$\Phi_s = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^T & \Phi_{22} \end{bmatrix} < 0. \quad (35)$$

其中: Φ_s 可以用 $L_{s(t)}, F_{1s(t)}, F_{2s(t)}$ 分别替换定理2中的 L, F_1, F_2 得到, $s(t)$ 为决定切换拓扑的有限个切换信号.

3 仿真分析

图1给出6个智能体之间的4种不同的网络通信拓扑, 且均为加权图. 由图1可见, 它们都是强连通且平衡的, 切换拓扑的切换顺序从 G_b 开始, 每隔1s切换到下一个状态.

在仿真中, 智能体的初始状态 $\hat{x}_i(0) = \tilde{r}i, i = 1, 2, \dots, 6$, 虚拟 Leader $\hat{r}_0 = |\tilde{r}| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{x}_i(0)$. 扰动信号 $\omega(t)$ 、噪声 δx_{ij} 和 \tilde{r} 都是均值为0方差为1的随机变量. 选取 H_∞ 性能指标 $\gamma = 1$, 权重 a_{ij} 依赖于通信拓扑 G_a, G_b, G_c, G_d , 即若结点 i 与结点 j 在通信拓扑图中有连接, 则 $a_{ij} > 0$, 为了方便取 $a_{ij} = 1$, 否则 $a_{ij} = 0$. 首先考虑系统(1)具有固定拓扑 G_b , 可以证明矩阵 $P = I$ 满足定理1的条件. 图2给出了在拓扑 G_b 下具有扰动的不确定多智能体互联系统的系统跟踪误差轨迹, 图3通过描绘 $\|z(t)\|^2$ 与 $\|\omega(t)\|^2$ 的瞬间变化, 给出了在拓扑 G_b 下的具有扰动的不确定多智能体互联系统性能, 显然系统实现了 H_∞ 性能指标.

多智能体互联系统(1)具有如图1所示的切换拓扑, 定理1中的可行解之一为 $P = I$. 图4给出了多智能体互联系统(1)在切换拓扑下的系统跟踪误差

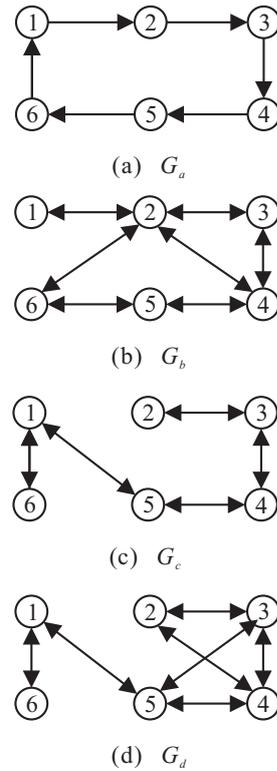


图 1 切换拓扑的4种连通图

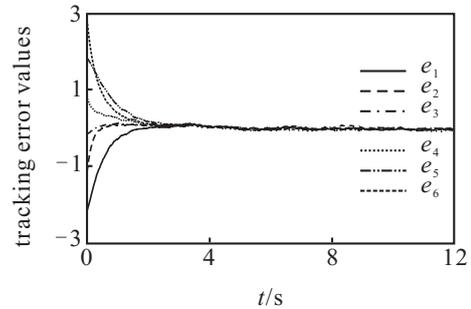


图 2 拓扑 G_b 下的系统跟踪误差轨迹

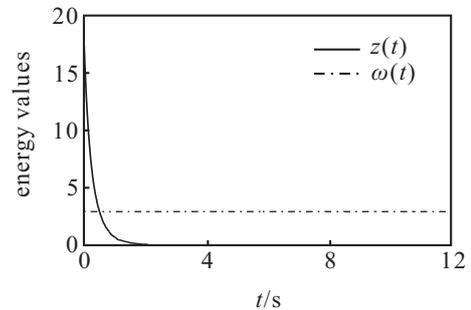


图 3 拓扑 G_b 下的 H_∞ 性能

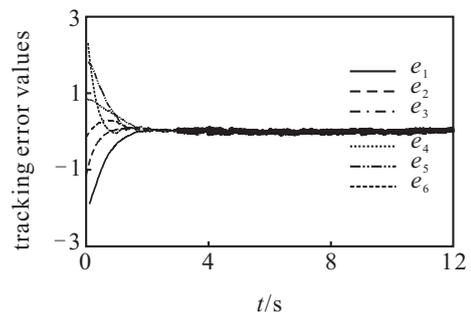


图 4 切换拓扑下不确定系统跟踪误差轨迹

差轨迹. 对于在固定拓扑 G_b 和切换拓扑下的时滞多智能体互联系统, 定理2和推论2中的可行解为 $P = Q = R = I$. 图5给出了在切换拓扑下, 时滞多智能体互联系统在时延 $\tau = 0.08$ 时的系统跟踪误差轨迹.

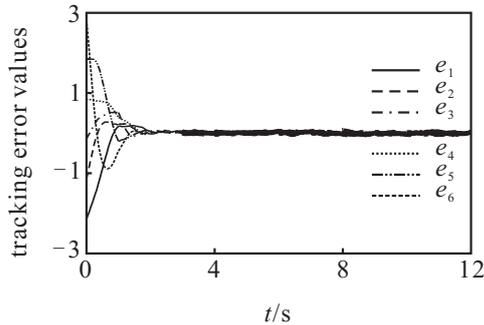


图5 切换拓扑下具有时滞的系统跟踪误差轨迹

4 结 论

本文探讨了在固定和切换拓扑下具有外界扰动和通信噪声的不确定多智能体互联系统的 H_∞ 协同控制问题. 考虑了有无时延两种类型, 借助 Lyapunov 函数, 利用线性矩阵不等式, 分析了系统的稳定性和鲁棒性, 并推导出一系列充分(必要)条件. 在有向图强连通且平衡的条件下, 当满足李亚谱诺夫函数正定和一些标量为正的条件时, 所有智能体能够在保证 H_∞ 性能的前提下, 渐近地跟踪虚拟 Leader. 仿真分析表明了所提出结论的有效性.

参考文献(References)

- [1] Antonelli G. Interconnected dynamic systems: An overview on distributed control[J]. IEEE Control System Magazine, 2013, 33(1): 76-88.
- [2] Cao Y, Yu W, Ren W, et al. An overview of recent progress in the study of distributed multi-agent coordination[J]. IEEE Trans on Industrial Informatics, 2013, 9(1): 427-438.
- [3] Murray R. Recent research in cooperative control of multivehicle systems[J]. J of Dynamical System Measurement Control, 2007, 129(5): 571-583.
- [4] Olfati-Saber R, Alex Faxand J, Murray R. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems[J]. Proc of the IEEE, 2007, 95(1): 215-233.
- [5] Ren W, Beard R W, Atkins E M. Information consensus in multivehicle cooperative control[J]. IEEE Control System Magazine, 2007, 27(2): 71-82.
- [6] Qu Z, Wang J, Chunyu J. Lyapunov design of cooperative control and its application to the consensus problem[C]. Proc of IEEE Multi-Conf on Systems and Control. Singapore, 2007: 100-107.
- [7] 张庆杰, 沈林成, 朱华勇. 多智能体系统实现鲁棒一致的时延相关稳定判据[J]. 控制与决策, 2012, 27(4): 584-592.
(Zhang Q J, Shen L C, Zhu H Y. Delay-dependent stability criteria for robust consensus of multi-agent systems[J]. Control and Decision, 2012, 27(4): 584-592.)
- [8] 刘学良, 胥布工. 具有多个通信时延的多智能体系统分布式 H_∞ 一致性控制[J]. 控制与决策, 2012, 27(4): 494-500.
(Liu X L, Xu B G. Distributed H_∞ consensus control for multiple-agent systems with communication delays[J]. Control and Decision, 2012, 27(4): 494-500.)
- [9] Lin P, Jia Y. Distributed robust H_∞ consensus control in directed networks of agents with time-delay[J]. Systems and Control Letters, 2008, 57(8): 643-653.
- [10] Lin P, Jia Y. Robust H_∞ consensus analysis of a class of second-order multi-agent systems with uncertainty[J]. IET Control Theory Application, 2010, 4(3): 487-498.
- [11] Liu Y, Jia Y. Consensus problems of high-order multi-agent systems with external disturbances: An H_∞ analysis approach[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2009, 20(14): 1579-1593.
- [12] Liu Y, Jia Y. H_∞ consensus control of multi-agent systems with switching topology: A dynamic output feedback protocol[J]. Int J of Control, 2010, 83(3): 527-537.
- [13] Li Z, Duan Z, Chen G. On H_∞ and H_2 performance regions of multi-agent systems[J]. Automatica, 2011, 47(4): 797-803.
- [14] Zhao Y, Duan Z, Chen G. Distributed H_∞ consensus of multi-agent systems: A performance region-based approach[J]. Int J of Control, 2012, 85(3): 332-341.
- [15] Diestel R. Graph theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1997: 1-451.

(责任编辑: 郑晓蕾)