

广义直觉模糊加权交叉影响平均算子 及其在多属性决策中的应用

陈华友, 何迎东, 周礼刚, 陶志富

(安徽大学 数学科学学院, 合肥 230601)

摘要: 针对不同直觉模糊集的隶属度与非隶属度可能存在交叉影响, 提出广义直觉模糊加权交叉影响平均(GIFWIA)算子, 推导出其数学表达式, 研究该算子的性质, 并探讨了基于 GIFWIA 算子的多属性决策方法. 通过实例表明了所提出广义算子在决策应用中的有效性, 并分析了不同参数 λ 对决策的影响. 通过灵敏度和相关比较分析, 解释了交叉影响对决策结果的影响, 表明了所提出广义算子的稳定性.

关键词: 直觉模糊集; 广义加权交叉影响平均算子; 稳定性; 多属性决策

中图分类号: C934; N945.25

文献标志码: A

Generalized intuitionistic fuzzy interaction averaging operators and their applications to multi-attribute decision making

CHEN Hua-you, HE Ying-dong, ZHOU Li-gang, TAO Zhi-fu

(School of Mathematical Science, Anhui University, Hefei 230601, China. Correspondent: CHEN Hua-you, E-mail: huayouc@126.com)

Abstract: The generalized intuitionistic fuzzy weighted interaction average operators are proposed based on the interactions between the membership function and the non-membership function of different intuitionistic fuzzy sets. The concrete expressions of these operators are obtained by derivation and some properties of these operators are investigated. A multi-attribute decision making method based on the proposed operators is investigated. An example shows the feasibility and validity of the proposed operator in the application of decision making problems and the influence of different parameters λ on decision making is analyzed. The influences of interactions on decision results are interpreted and the stability of the proposed generalized operators are illustrated by sensitivity and other corresponding analysis.

Key words: intuitionistic fuzzy set; the generalized weighted interaction average operator; stability; multi-attribute decision making

0 引言

多属性决策在工程设计、经济、管理和军事等诸多领域中有着广泛的应用, 是现代决策科学的一个重要组成部分, 其实质是利用已有的决策信息通过一定的方式对有限个或一组方案排序, 并选择最优方案^[1]. 多属性决策的核心问题之一是如何有效地、正确地进行信息的集成. 常规的信息集成算子为加权算术平均算子^[2], Yager^[3]提出了有序加权算术平均算子的概念, Xu 等^[4]提出了有序加权几何平均算子. 随着决策

系统复杂性的增加和多种不确定因素的影响, 决策信息的表达形式也越来越多样化. 作为模糊集理论^[5]的重要推广, 直觉模糊集成为决策信息的一种常见的表达形式, 在智能多属性决策^[6]和不确定多属性决策^[3,7-20]等领域有广泛的运用.

关于直觉模糊集和直觉模糊数的运算法则及其信息集结算子的研究, Atanassov^[21-22]和 Xu 等^[10-12]均做出了大量原创性的工作. Atanassov^[22]定义了直觉模糊集上的加法运算和乘法运算. De 等^[23]定义了直

收稿日期: 2013-05-09; 修回日期: 2013-08-11.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71071002, 71371011, 71301001, 71225006); 教育部人文社会科学研究青年基金项目(13YJC630092); 教育部高等学校博士点基金项目(20123401110001); 安徽省自然科学基金项目(1308085QG127); 安徽省教育厅人文社科项目(SK2013B041).

作者简介: 陈华友(1969—), 男, 教授, 博士, 从事预测、决策分析等研究; 何迎东(1987—), 男, 硕士生, 从事预测、决策分析的研究.

觉模糊集上的数乘运算和指数运算. Xu等^[10-12]提出了一系列直觉模糊集成算子和广义的直觉模糊加权平均算子, 探讨了直觉模糊信息的集成方式, 并应用于多属性决策领域^[18].

直觉模糊集均利用隶属度和非隶属度这两个二元参数进行刻画, 然而现有的直觉模糊信息集成算子大都没有考虑不同直觉模糊数的隶属度与非隶属度之间可能存在的交叉影响, 这会导致一些不合理的现象. 如, 若 $B = \langle u_B, v_B \rangle$ 的非隶属度 $v_B = 0$, 则无论 $A = \langle u_A, v_A \rangle$ 的非隶属度为多少, 按照文献^[10, 22-23]的定义, $A \oplus B$ 的非隶属度一定为 $v_A \times v_B = 0$. 以选举为例, 若一个团体反对某个候选人的比例为 0, 则无论另一个团体对此候选人的反对比例为多少, 按照前述集成结果, 反对该候选人的比例也为 0, 即这两个团体放在一起对候选人全部持赞成意见, 这一点往往与现实不符.

若 $A \oplus B$ 考虑隶属度与非隶属度的交叉影响, 即按照文献^[7-8]中的运算法则, 则能够避免这种现象的发生. 鉴于此, 本文将交叉影响的思想应用到广义直觉模糊信息集成算子中, 提出了广义直觉模糊加权交叉影响平均算子, 推导出其计算表达式, 证明了相关性质, 并将其应用到多属性决策中. 同时, 分析了决策者的态度参数 λ 对决策结果的影响, 从而为直觉模糊多属性决策问题的解决提供了新的思路, 尤其对于非隶属度出现 0 的特殊情形有非常好的可解释性.

1 直觉模糊集的定义及其运算法则

定义 1^[21] 设 X 为给定的有限论域, 则 X 上的直觉模糊集表示为

$$A = \{ \langle x, u_A(x), v_A(x) \rangle | x \in X \}.$$

其中: $u_A(x)$ 和 $v_A(x)$ 分别为 X 中元素 x 属于 A 的隶属度和非隶属度, $u_A: X \rightarrow [0, 1]$, $v_A: X \rightarrow [0, 1]$, 且满足条件 $0 \leq u_A(x) + v_A(x) \leq 1$; $\pi_A(x) = 1 - u_A(x) - v_A(x)$ 表示 X 中元素 x 属于 X 的犹豫度.

为了方便起见, 记 $A = \langle u_A, v_A \rangle$, 将有限论域 X 上的全体直觉模糊集记为 $\text{IFS}(X)$.

定义 2^[10-11] 若 $A = \langle u_A, v_A \rangle$ 和 $B = \langle u_B, v_B \rangle$ 为两个直觉模糊集, $S(A)$ 和 $S(B)$ 分别为 A 和 B 的得分函数^[4], 且 $S(A) = u_A - v_A$, $S(B) = u_B - v_B$, $H(A)$ 和 $H(B)$ 分别为 A 和 B 的精确函数^[24], $H(A) = u_A + v_A$, $H(B) = u_B + v_B$, 则有 $A < B$, 当且仅当:

$$1) S(A) < S(B);$$

或

$$2) S(A) = S(B) \text{ 且 } H(A) < H(B).$$

定义 3^[7-8] 设 X 为给定的有限论域, $A, B \in \text{IFS}(X)$, 考虑隶属度与非隶属度交叉影响的直觉

模糊集上的新的加法、数乘、乘法和幂运算分别定义为

$$A \hat{\oplus} B = \langle 1 - (1 - u_A)(1 - u_B), (1 - u_A)(1 - u_B) - (1 - (u_A + v_A))(1 - (u_B + v_B)) \rangle, \quad (1)$$

$$\lambda A = \langle 1 - (1 - u_A)^\lambda, (1 - u_A)^\lambda - (1 - (u_A + v_A))^\lambda \rangle, \quad (2)$$

$$A \hat{\otimes} B = \langle (1 - v_A)(1 - v_B) - (1 - (u_A + v_A))(1 - (u_B + v_B)), 1 - (1 - v_A)(1 - v_B) \rangle, \quad (3)$$

$$A^\lambda = \langle (1 - v_A)^\lambda - (1 - (u_A + v_A))^\lambda, 1 - (1 - v_A)^\lambda \rangle. \quad (4)$$

文献^[8]指出, 由于直觉模糊集 A 与 B 均利用隶属度和非隶属度这两个二元参数进行刻画, 式(3)中, 直觉模糊集 A 与 B 的积的隶属度增加考虑了 v_A 与 u_B 和 v_B 与 u_A 的交叉影响, 同时这种改动在某种程度上可以避免文献^[22]中“ $u_A = 0$, 恒有 $u_{A \otimes B} = 0$ ”的现象发生. 同理, 式(1)的改动在某种程度上可以避免文献^[22]中“ $v_A = 0$, 恒有 $v_{A \oplus B} = 0$ ”的现象发生.

定理 1^[7-8] 若 X 为给定的有限论域, $A, B \in \text{IFS}(X)$, 则 $C = A \oplus B$, $D = \lambda A (\lambda \geq 0)$, $E = A \otimes B$, $F = A^\lambda (\lambda \geq 0)$ 也为直觉模糊集, 即 $C, D, E, F \in \text{IFS}(X)$.

定理 2^[8] 若 X 为给定的有限论域, $A, B \in \text{IFS}(X)$, 令 $A = \langle u_A, v_A \rangle$, $B = \langle u_B, v_B \rangle$, $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 > 0$, 则有:

$$1) A \hat{\oplus} B = B \hat{\oplus} A;$$

$$2) A \hat{\otimes} B = B \hat{\otimes} A;$$

$$3) \lambda_1 A \hat{\oplus} \lambda_2 A = (\lambda_1 + \lambda_2)A.$$

2 广义直觉模糊加权交叉影响平均算子

在改进的直觉模糊集上的加法运算、数乘运算、乘积运算和幂运算^[7-8]的基础上, 提出广义直觉模糊加权交叉影响平均算子, 并研究其相关性质.

定义 4 设 X 为给定的有限论域, $\lambda > 0$, $A_i = \langle u_{A_i}, v_{A_i} \rangle \in \text{IFS}(X) (i = 1, 2, \dots, n)$, $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ 为 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的加权向量, 满足 $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, $0 \leq w_i \leq 1$, 则称函数

$$\text{GIFWIA}_\lambda(A_1, A_2, \dots, A_n) = \left(\bigoplus_{i=1}^n w_i A_i^\lambda \right)^{1/\lambda} \quad (5)$$

为广义直觉模糊加权交叉影响平均算子.

引理 1 若 X 为给定的有限论域, $\lambda > 0$, $A_i = \langle u_{A_i}, v_{A_i} \rangle \in \text{IFS}(X) (i = 1, 2, \dots, n)$, $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ 为 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的加权向量, 满足 $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, $0 \leq w_i \leq 1$, 则有

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i=1}^n w_i A_i^\lambda &= \left\langle 1 - \prod_{i=1}^n (1 - (1 - v_{A_i})^\lambda + (1 - (u_{A_i} + v_{A_i}))^\lambda)^{w_i}, \right. \\ &\quad \prod_{i=1}^n (1 - (1 - v_{A_i})^\lambda + (1 - (u_{A_i} + v_{A_i}))^\lambda)^{w_i} - \\ &\quad \left. \prod_{i=1}^n (1 - (u_{A_i} + v_{A_i}))^{\lambda w_i} \right\rangle. \end{aligned} \tag{6}$$

证明 用数学归纳法证明.

1) 当 $n = 1$ 时, $w_1 = 1$, 式(6)明显成立. 假设 $n = k$ 时, 式(6)也成立, 则当 $n = k + 1$ 时, 由归纳假设并根据式(1)得

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i=1}^{k+1} w_i A_i^\lambda &= \left(\bigoplus_{i=1}^k w_i A_i^\lambda \right) \hat{\oplus} w_{k+1} A_{k+1}^\lambda = \\ &\left\langle 1 - \prod_{i=1}^k (1 - (1 - v_{A_i})^\lambda + (1 - (u_{A_i} + v_{A_i}))^\lambda)^{w_i}, \right. \\ &\quad \prod_{i=1}^k (1 - (1 - v_{A_i})^\lambda + (1 - (u_{A_i} + v_{A_i}))^\lambda)^{w_i} - \\ &\quad \left. \prod_{i=1}^k (1 - (u_{A_i} + v_{A_i}))^{\lambda w_i} \right\rangle \hat{\oplus} \\ &\left\langle 1 - (1 - (1 - v_{A_{k+1}})^\lambda + (1 - (u_{A_{k+1}} + v_{A_{k+1}}))^\lambda)^{w_{k+1}}, \right. \\ &\quad (1 - (1 - v_{A_{k+1}})^\lambda + (1 - (u_{A_{k+1}} + v_{A_{k+1}}))^\lambda)^{w_{k+1}} - \\ &\quad \left. (1 - (u_{A_{k+1}} + v_{A_{k+1}}))^{\lambda \cdot w_{k+1}} \right\rangle = \\ &\left\langle 1 - \prod_{i=1}^{k+1} (1 - (1 - v_{A_i})^\lambda + (1 - (u_{A_i} + v_{A_i}))^\lambda)^{w_i}, \right. \\ &\quad \prod_{i=1}^{k+1} (1 - (1 - v_{A_i})^\lambda + (1 - (u_{A_i} + v_{A_i}))^\lambda)^{w_i} - \\ &\quad \left. \prod_{i=1}^{k+1} (1 - (u_{A_i} + v_{A_i}))^{\lambda w_i} \right\rangle. \end{aligned}$$

即当 $n = k + 1$ 时, 式(6)也成立. \square

定理 3 若 X 为给定的有限论域, $\lambda > 0$, $A_i = \langle u_{A_i}, v_{A_i} \rangle \in \text{IFS}(X) (i = 1, 2, \dots, n)$, 则 $\text{GIFWIA}_\lambda(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \text{IFS}(X)$, 且有

$$\begin{aligned} \text{GIFWIA}_\lambda(A_1, A_2, \dots, A_n) &= \\ &\left\langle \left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - (1 - v_{A_i})^\lambda + (1 - (u_{A_i} + v_{A_i}))^\lambda)^{w_i} + \right. \right. \\ &\quad \left. \prod_{i=1}^n (1 - (u_{A_i} + v_{A_i}))^{\lambda \cdot w_i} \right)^{1/\lambda} - \prod_{i=1}^n (1 - (u_{A_i} + v_{A_i}))^{w_i}, \\ &\quad 1 - \left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - (1 - v_{A_i})^\lambda + (1 - (u_{A_i} + v_{A_i}))^\lambda)^{w_i} + \right. \\ &\quad \left. \prod_{i=1}^n (1 - (u_{A_i} + v_{A_i}))^{\lambda w_i} \right)^{1/\lambda} \left. \right\rangle. \end{aligned} \tag{7}$$

证明 根据引理 1 和式(4), 有

$$\begin{aligned} \text{GIFWIA}_\lambda(A_1, A_2, \dots, A_n) &= \left(\bigoplus_{i=1}^n w_i A_i^\lambda \right)^{1/\lambda} = \\ &\left\langle \left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - (1 - v_{A_i})^\lambda + (1 - (u_{A_i} + v_{A_i}))^\lambda)^{w_i} + \right. \right. \\ &\quad \left. \prod_{i=1}^n (1 - (u_{A_i} + v_{A_i}))^{\lambda \cdot w_i} \right)^{1/\lambda} - \prod_{i=1}^n (1 - (u_{A_i} + v_{A_i}))^{w_i}, \\ &\quad 1 - \left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - (1 - v_{A_i})^\lambda + (1 - (u_{A_i} + v_{A_i}))^\lambda)^{w_i} + \right. \\ &\quad \left. \prod_{i=1}^n (1 - (u_{A_i} + v_{A_i}))^{\lambda w_i} \right)^{1/\lambda} \left. \right\rangle. \end{aligned}$$

由定义 1 得 $\text{GIFWIA}_\lambda(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \text{IFS}(X)$, 限于篇幅, 具体证明过程略. \square

定理 4 设 X 为给定的有限论域, $\lambda > 0$, $A_i = \langle u_{A_i}, v_{A_i} \rangle, B_i = \langle u_{B_i}, v_{B_i} \rangle \in \text{IFS}(X) (i = 1, 2, \dots, n)$, 若 $A_i = A = \langle u_A, v_A \rangle (i = 1, 2, \dots, n)$, 则 $\text{GIFWIA}_\lambda(A_1, A_2, \dots, A_n) = A$, 即幂等性成立.

证明 注意到 $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, 由式(7)可以直接得到结论成立. \square

定理 5 设 X 为给定的有限论域, $\lambda > 0$, $A_i = \langle u_{A_i}, v_{A_i} \rangle \in \text{IFS}(X) (i = 1, 2, \dots, n)$, 如果 $A'_i = \langle u_{A'_i}, v_{A'_i} \rangle$ 是 A_i 的任意一组置换, 则有 $\text{GIFWIA}_\lambda(A_1, A_2, \dots, A_n) = \text{GIFWIA}_\lambda(A'_1, A'_2, \dots, A'_n)$.

证明 根据式(7)和条件 $A'_i = \langle u_{A'_i}, v_{A'_i} \rangle$ 为 A_i 的任意一组置换, 可以直接得到结论成立. \square

3 广义直觉模糊有序加权交叉影响平均算子

在文献[3]的基础上, 针对改进的直觉模糊集上的加法运算、数乘运算、乘积运算和幂运算, 本节引入广义直觉模糊有序加权交叉影响平均算子的定义, 并证明了相关性质.

定义 5 若 X 为给定的有限论域, $\lambda > 0$, $A_i = \langle u_{A_i}, v_{A_i} \rangle \in \text{IFS}(X) (i = 1, 2, \dots, n)$, 则称函数

$$\text{GIFOWIA}_\lambda(A_1, A_2, \dots, A_n) = \left(\bigoplus_{i=1}^n w_i A_{\text{index}(i)}^\lambda \right)^{1/\lambda} \tag{8}$$

为广义直觉模糊有序加权交叉影响平均算子. 其中: $A_{\text{index}(i)}$ 为 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 中的第 i 大元素, $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ 为相应的加权向量, 满足

$$w_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^n w_i = 1.$$

定理 6 若 X 为给定的有限论域, $\lambda > 0$, $A_i \in \text{IFS}(X) (i = 1, 2, \dots, n)$, $A_i = \langle u_{A_i}, v_{A_i} \rangle$, 则有

$$\text{GIFOWIA}_\lambda(A_1, A_2, \dots, A_n) =$$

$$\left\langle \left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - (1 - v_{A_{\text{index}(i)}}))^{\lambda} + (1 - (u_{A_{\text{index}(i)}} + v_{A_{\text{index}(i)}}))^{\lambda} \right)^{w_i} + \prod_{i=1}^n (1 - (u_{A_{\text{index}(i)}} + v_{A_{\text{index}(i)}}))^{\lambda \cdot w_i} \right)^{1/\lambda} - \prod_{i=1}^n (1 - (u_{A_{\text{index}(i)}} + v_{A_{\text{index}(i)}}))^{\lambda} + \left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - (1 - v_{A_{\text{index}(i)}}))^{\lambda} + (1 - (u_{A_{\text{index}(i)}} + v_{A_{\text{index}(i)}}))^{\lambda} \right)^{w_i} + \prod_{i=1}^n (1 - (u_{A_{\text{index}(i)}} + v_{A_{\text{index}(i)}}))^{\lambda \cdot w_i} \right)^{1/\lambda} \right\rangle. \quad (9)$$

其中: $\text{GIFOWIA}_{\lambda}(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \text{IFS}(X)$, $A_{\text{index}(i)}$ 为 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 中的第 i 大元素.

证明过程与定理3相似, 此略.

定理7 设 X 为给定的有限论域, $A_i = \langle u_{A_i}, v_{A_i} \rangle \in \text{IFS}(X) (i = 1, 2, \dots, n)$, $A \in \text{IFS}(X)$, $\lambda > 0$. 若 $A_i = A = \langle u_A, v_A \rangle, i = 1, 2, \dots, n$, 则 $\text{GIFOWIA}_{\lambda}(A_1, A_2, \dots, A_n) = A$, 即幂等性成立.

证明过程与定理4相似, 此略.

定理8 设 X 为给定的有限论域, $A_i \in \text{IFS}(X) (i = 1, 2, \dots, n)$, $A_i = \langle u_{A_i}, v_{A_i} \rangle$. 如果 $A'_i = \langle u_{A'_i}, v_{A'_i} \rangle$ 为 A_i 的任意一组置换, $\lambda > 0$, 则有 $\text{GIFOWIA}_{\lambda}(A_1, A_2, \dots, A_n) = \text{GIFOWIA}_{\lambda}(A'_1, A'_2, \dots, A'_n)$.

证明过程与定理5相似, 此略.

4 基于广义直觉模糊加权交叉影响平均算子的多属性决策方法

假设有 m 个备选方案 $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$, n 个评价属性 $g_j (j = 1, 2, \dots, n)$, 属性的权重为 $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, $A_{ij} = \langle u_{A_{ij}}, v_{A_{ij}} \rangle$ 表示第 i 个备选方案在第 j 个属性下由决策者给出的评估值. 给出基于广义直觉模糊加权交叉影响平均算子的多属性决策方法如下.

Step 1: 将备选方案的属性决策信息进行综合集成:

1) 加权平均的情形. 根据式(7)的直觉模糊交叉影响平均算子, 有

$$A_i = \text{GIFOWIA}_{\lambda}(A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}) = \left\langle \left(1 - \prod_{j=1}^n (1 - (1 - v_{A_{ij}}))^{\lambda} + (1 - (u_{A_{ij}} + v_{A_{ij}}))^{\lambda} \right)^{w_j} + \prod_{j=1}^n (1 - (u_{A_{ij}} + v_{A_{ij}}))^{\lambda \cdot w_j} \right)^{1/\lambda} - \prod_{j=1}^n (1 - (u_{A_{ij}} + v_{A_{ij}}))^{\lambda} + \left(1 - \prod_{j=1}^n (1 - (1 - v_{A_{ij}}))^{\lambda} + (1 - (u_{A_{ij}} + v_{A_{ij}}))^{\lambda} \right)^{w_j} + \prod_{j=1}^n (1 - (u_{A_{ij}} + v_{A_{ij}}))^{\lambda \cdot w_j} \right)^{1/\lambda} \right\rangle. \quad (10)$$

2) 有序加权平均的情形. 根据式(9)的直觉模糊交叉影响平均算子, 有

$$A_i = \text{GIFOWIA}_{\lambda}(A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}) = \left\langle \left(1 - \prod_{j=1}^n (1 - (1 - v_{A_{\text{index}(ij)}}))^{\lambda} + (1 - (u_{A_{\text{index}(ij)}} + v_{A_{\text{index}(ij)}}))^{\lambda} \right)^{w_j} + \prod_{j=1}^n (1 - (u_{A_{\text{index}(ij)}} + v_{A_{\text{index}(ij)}}))^{\lambda \cdot w_j} \right)^{1/\lambda} - \prod_{j=1}^n (1 - (u_{A_{\text{index}(ij)}} + v_{A_{\text{index}(ij)}}))^{\lambda} + \left(1 - \prod_{j=1}^n (1 - (1 - v_{A_{\text{index}(ij)}}))^{\lambda} + (1 - (u_{A_{\text{index}(ij)}} + v_{A_{\text{index}(ij)}}))^{\lambda} \right)^{w_j} + \prod_{j=1}^n (1 - (u_{A_{\text{index}(ij)}} + v_{A_{\text{index}(ij)}}))^{\lambda \cdot w_j} \right)^{1/\lambda} \right\rangle. \quad (11)$$

Step 2: 根据文献[7-8]定义的直觉模糊数的大小比较规则, 比较 $A_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 的大小.

Step 3: 根据 $A_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 的大小对备选方案进行排序, 取最大的 A_i 所对应的方案作为最优方案.

Step 4: 调整参数 λ 值, 重复Step 1 ~ Step 3, 分析不同参数 λ 值下的排序和最优方案的选取.

Step 5: 利用 Matlab 画出得分函数随参数 λ 值改变而改变的图像, 在交点处标注精确函数值的大小, 作进一步分析.

5 实例分析和仿真分析

5.1 实例分析

假设一个投资公司^[7,23]有3个可能投资的项目: 项目1汽车公司; 项目2食品公司; 项目3计算机公司. 利用5个属性评价投资项目的优劣, 属性1表示风险情况, 反映了风险预测和回避能力、风险控制能力和损失发生后的恢复能力; 属性2表示盈利情况, 反映了投资项目的总收入与总成本之间的差额与总投入的比值大小; 属性3表示社会政策情况, 反映了国家对相关企业的技术发展进行扶持、鼓励或反对的程度; 属性4表示社会环境情况, 反映了该企业所处的地理位置对企业发展的促进或抑制程度; 属性5表示公司发展前景, 反映了企业扩大规模和壮大实力的潜在能力. 投资项目在5个属性下的决策信息均以直觉模糊集的形式给出, 对应的权重向量分别为 $w = (0.25, 0.20, 0.15, 0.18, 0.22)$, 如表1所示.

Step 1: 由于权重与属性直接相关, 选式(10)集成决策信息. 取 $\lambda = 0.3$, 有

$$\text{GIFOWIA}_{0.3}(A_1, A_2, \dots, A_5) = \langle 0.4299, 0.3105 \rangle,$$

表 1 直觉模糊信息的决策矩阵

	属性 1	属性 2	属性 3	属性 4	属性 5
项目 1	$A_1 = \langle 0.2, 0.5 \rangle$	$A_2 = \langle 0.4, 0.2 \rangle$	$A_3 = \langle 0.5, 0.4 \rangle$	$A_4 = \langle 0.3, 0.3 \rangle$	$A_5 = \langle 0.7, 0.1 \rangle$
项目 2	$B_1 = \langle 0.2, 0.7 \rangle$	$B_2 = \langle 0.6, 0.3 \rangle$	$B_3 = \langle 0.4, 0.3 \rangle$	$B_4 = \langle 0.4, 0.4 \rangle$	$B_5 = \langle 0.6, 0.1 \rangle$
项目 3	$C_1 = \langle 0.2, 0.7 \rangle$	$C_2 = \langle 0.5, 0.3 \rangle$	$C_3 = \langle 0.4, 0.5 \rangle$	$C_4 = \langle 0.3, 0.4 \rangle$	$C_5 = \langle 0.6, 0.2 \rangle$

表 2 不同参数 λ 对应的方案得分和排序

	GIFWIA _{0.3}	GIFWIA ₁	GIFWIA ₅	GIFWIA ₁₀
x_1	0.1195	0.1520	0.2878	0.3528
x_2	0.0097	0.0825	0.3332	0.4187
x_3	-0.0717	-0.0062	0.1744	0.2521
排序结果	$x_1 \succ x_2 \succ x_3$	$x_1 \succ x_2 \succ x_3$	$x_2 \succ x_1 \succ x_3$	$x_2 \succ x_1 \succ x_3$

	GIFWIA ₁₅	GIFWIA ₂₀	GIFWIA ₂₅	GIFWIA ₃₀
x_1	0.3929	0.4202	0.4397	0.4543
x_2	0.4702	0.5036	0.5263	0.5423
x_3	0.2966	0.3253	0.3450	0.3591
排序结果	$x_2 \succ x_1 \succ x_3$	$x_2 \succ x_1 \succ x_3$	$x_2 \succ x_1 \succ x_3$	$x_2 \succ x_1 \succ x_3$

$GIFWIA_{0.3}(B_1, B_2, \dots, B_5) = \langle 0.4198, 0.4104 \rangle$,

$GIFWIA_{0.3}(C_1, C_2, \dots, C_5) = \langle 0.3826, 0.4543 \rangle$.

Step 2: 由直觉模糊数的大小比较规则^[10-11], 有

$$GIFWIA_{0.3}(A_1, A_2, \dots, A_5) >$$

$$GIFWIA_{0.3}(B_1, B_2, \dots, B_5) >$$

$$GIFWIA_{0.3}(C_1, C_2, \dots, C_5).$$

Step 3: 项目 1 \succ 项目 2 \succ 项目 3, 因此项目 1 为最佳投资方案.

Step 4: 当参数 λ 取不同值时能得到不同的结果, 表 2 为不同参数值 λ 所对应的投资项目的得分函数.

由表 2 可见, 随着 λ 的增大, 各个方案的得分函数值也增大. 在实际决策中, 决策者可以根据自己的偏好程度选择不同的参数值 λ .

Step 5: 为了分析参数值 λ 对集成结果的影响, 考虑不同参数值 $\lambda = 0.1, 0.2, \dots, 30$, 这些参数值均由决策者提供, 得到不同方案的得分函数如图 1 所示.

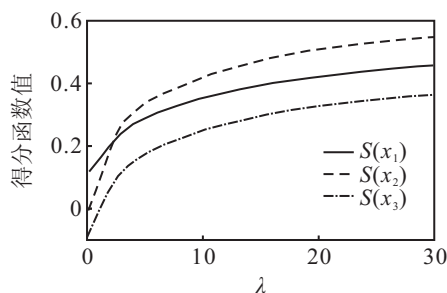


图 1 不同参数 λ 值对应方案的得分函数值

由图 1 可见, 随着 λ 的增大, 各个方案的得分函数值 $S(x_i)$ 也增大. 根据文献 [8-9] 中关于直觉模糊集的排序方法, 有如下结果:

1) 当 $\lambda \in (0, 2.1837]$ 时, 3 个投资方案的排序为 $x_1 \succ x_2 \succ x_3$, 项目 1 为最佳投资方案;

2) 当 $\lambda \in [2.1837, 30]$ 时, 3 个投资方案的排序

为 $x_2 \succ x_1 \succ x_3$, 项目 2 为最佳投资方案.

5.2 仿真分析

文献 [8] 利用直觉模糊交叉影响平均算子集成决策信息, 得到的最后排序结果为 $x_1 \succ x_2 \succ x_3$, 作为对文献 [8] 提出的算子的推广, 本文提出的广义交叉影响算子增加了考虑决策者态度的决策变量参数 λ , 且文献 [8] 即为本文算子参数 $\lambda = 1$ 时的特殊情形. 下面取 $\lambda = 1$ 附近的不同点对文献 [8] 的排序结果进行仿真分析. 取 $\lambda = 0.50 \sim 1.50$, 变化步长为 0.01, 利用 Matlab 软件得到文献 [8] 中 3 个方案的得分函数值随参数 λ 变动的仿真图像如图 2 所示.

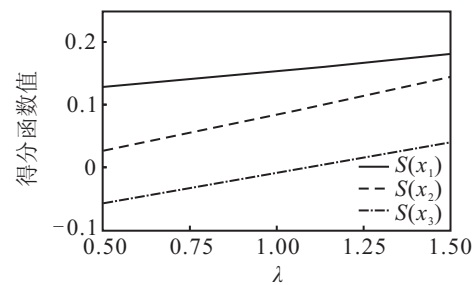


图 2 3 个方案的得分函数值随参数 λ 变动的曲线

由图 2 可见, 当 $\lambda \in [0.500, 1.500]$ 时, 3 个投资方案的排序为 $x_1 \succ x_2 \succ x_3$, 项目 1 为最佳投资方案. 这与文献 [8] 中 $\lambda = 1$ 的排序结果是一致的, 从而说明了当参数 λ 在 1 的周围发生变化时, 决策结果并没有发生改变, 表明本文提出的广义算子方法具有一定的有效性. 因此, 本文对文献 [8] 中的直觉模糊交叉影响平均算子进行推广是必要的, 这也是本文引入广义直觉模糊交叉影响平均算子的原因. 另外, 文献 [8] 中直觉模糊交叉影响平均算子实质是本文取 $\lambda = 1$ 时的广义直觉模糊交叉影响平均算子的特殊情形, $\lambda = 1$ 时的偏好程度称为中性的. 由图 1 可见, 当 $\lambda > 1$ 时, 各个方案的得分函数值 $S(x_i)$ 总体上也在增大, 即决策者的偏好程度的增加引起了方案得分值的增加.

当 $\lambda < 1$ 时, 各个方案的得分函数值 $S(x_i)$ 在减小, 因此 λ 变化的管理学意义表现为决策者偏好程度的变化对备选方案得分值的影响程度. 若针对不同的投资项目选取不同的参数 λ , 则可能会产生不公平的决策结果. 如, 若决策者由于主观原因更偏向于投资项目 x_3 , 则可取态度参数 $\lambda = 10$, 若对投资项目 x_1 并不偏爱, 则可取 $\lambda = 1$, 从而导致投资项目 x_3 的得分函数值高于 x_1 , 即 $x_3 \succ x_1$. 因此, 决策者对待不同投资方案的主观偏好态度可能会导致不公平的决策结果的产生. 为了克服这种现象的产生, 一般要求在评价决策时, 对于不同的投资项目需要取同一个偏好态度参数.

6 有效性及敏感性和鲁棒性分析

6.1 有效性分析

文献 [12] 提出了广义的直觉模糊加权平均算子, 其具体表达式如下:

$$\begin{aligned} \text{GIFWIA}_\lambda(A_1, A_2, \dots, A_n) = & \left\langle \left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - u_{A_i}^\lambda)^{w_i} \right)^{1/\lambda}, \right. \\ & \left. \left(1 - \left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - (1 - v_{A_i}^\lambda)^{w_i}) \right)^{1/\lambda} \right) \right\rangle. \quad (12) \end{aligned}$$

取 $\lambda = 0.3$, 利用式 (12) 集成 3 个投资方案在不同属性下评估值, 并根据集成结果选择最优方案, 同样有项目 1 \succ 项目 2 \succ 项目 3, 项目 1 为最佳投资方案. 显然, 本文方法与文献 [12] 的排序结果相同, 表明了本文方法的有效性.

6.2 敏感性和鲁棒性分析

由第 5.2 节的仿真分析可以看出, 当 $\lambda \in [0.500, 1.500]$ 时, 本文的决策结果与文献 [8] 相同, 因此 λ 的小范围波动对决策结果并没有大的影响, 即参数 λ 对决策结果不敏感, 鲁棒性较好.

在前文的实例分析中, 如果某个投资方案在某个属性下的评估值为 $\langle u, 0 \rangle$ 的形式, 例如将表 1 中的 C_5 换成 $C'_5 = \langle 0.6, 0 \rangle$, A_2 换成 $A'_2 = \langle 0.5, 0.2 \rangle$, 仍取 $\lambda = 0.3$, 利用式 (7) 进行计算, 则有

$$\begin{aligned} \text{GIFWIA}_{0.3}(A_1, A'_2, A_3, A_4, A_5) &= \langle 0.4463, 0.3086 \rangle, \\ \text{GIFWIA}_{0.3}(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5) &= \langle 0.4198, 0.4104 \rangle, \\ \text{GIFWIA}_{0.3}(C_1, C_2, C_3, C_4, C'_5) &= \langle 0.3761, 0.4340 \rangle. \end{aligned}$$

同样得到项目 1 \succ 项目 2 \succ 项目 3, 项目 1 为最佳投资方案.

若采用文献 [12] 的计算公式, 即不考虑不同直觉模糊集隶属度与非隶属度之间可能存在的交叉影响, 则有

$$\text{GIFWIA}_{0.3}(A_1, A'_2, A_3, A_4, A_5) = \langle 0.4489, 0.2636 \rangle,$$

$$\text{GIFWIA}_{0.3}(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5) = \langle 0.4433, 0.3201 \rangle,$$

$$\text{GIFWIA}_{0.3}(C_1, C_2, C_3, C_4, C'_5) = \langle 0.4029, 0 \rangle.$$

从而得到项目 3 \succ 项目 1 \succ 项目 2, 即项目 3 为最佳投资方案.

由文献 [10-11] 定义的直觉模糊数的比较规则可知, 项目 1 的各个属性值均大于项目 3, 即

$$A_1 > C_1, A'_2 > C_2, A_3 > C_3, A_4 > C_4, A_5 > C'_5.$$

由直觉模糊集上加权算术平均算子的单调性可知, 项目 1 \succ 项目 3 的结果更合理. 所以, 本文提出的广义直觉模糊加权交叉影响平均算子比较稳健, 即文献 [12] 提出的广义直觉模糊加权平均算子在集成时存在敏感直觉模糊信息 $\langle u, 0 \rangle$ 的情况下, 会出现与实际相悖的决策结果. 本文提出的广义直觉模糊加权交叉影响平均算子在决策信息集成时更具稳定性, 鲁棒性较好, 且集成后获得的结果满足单调性, 因此具有较好的解释.

6.3 交叉影响对决策结果的探讨

由于 $\text{GIFWIA}_{0.3}(C_1, C_2, C_3, C_4, C'_5) = \langle 0.4029, 0 \rangle$, 由文献 [12] 的运算规则可知, 项目 3 的 5 个属性最终集成结果的非隶属度为 0, 所以第 5 个属性值 C'_5 的非隶属度在集成结果中起着决定性的作用. 若采用交叉影响的运算公式 (7), 则有

$$\begin{aligned} \text{GIFWIA}_{0.3}(C_1, C_2, C_3, C_4, C'_5) = & \left(\left(\bigoplus_{i=1}^4 w_i C_i^{0.3} \right) \hat{\oplus} (w_5 C'_5) \right)^{1/0.3} = \\ & \langle 0.3761, 0.4340 \rangle. \end{aligned}$$

即 5 个属性最终集成结果的非隶属度为 0.4340, 且有

$$\begin{aligned} \min\{v_{C_1}, v_{C_2}, v_{C_3}, v_{C_4}, v_{C'_5}\} &= 0 < \\ v_{\text{GIFWIA}_{0.3}(C_1, C_2, C_3, C_4, C'_5)} &= 0.4340 < \\ 0.7 &= \max\{v_{C_1}, v_{C_2}, v_{C_3}, v_{C_4}, v_{C'_5}\}. \end{aligned}$$

因此, 本文提出的考虑交叉影响的集成规则具有介值性, 从平均的角度而言更具有可解释性, 在理论上更符合实际情况.

7 结 论

本文在直觉模糊集上改进加法运算、数乘运算、乘积运算和幂运算的基础上, 提出了广义直觉模糊加权交叉影响平均算子, 考虑了不同直觉模糊集的隶属度与非隶属度之间可能存在的交叉影响, 给出了具体的计算公式. 实例表明了新的广义集成算子在决策应用中的有效性, 分析了不同的参数 λ 对决策的影响. 同时, 本文提出的新的广义集成算子计算式的集成结果对于非隶属度出现 0 的特殊情形有较好的可解释性. 后续工作将把本文的理论结果推展到区间直觉模糊环境中, 提出广义区间直觉模糊加权交叉影响平均

算子,并将其运用于决策中.

参考文献(References)

- [1] Kai H G, Wen L L. Combination rule of D-S evidence theory based on the strategy of cross merging between evidences[J]. Expert Systems with Applications, 2011, 38(10): 13360-13366.
- [2] Harsanyi J C. Cardinal welfare, individualistic ethics and interpersonal comparisons of utility[J]. J of Political Economy, 1955, 63(4): 309-321.
- [3] Yager R R. On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making[J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, 1988, 18(1): 183-190.
- [4] Xu Z S, Da Q L. The ordered weighted geometric averaging operators[J]. Int J of Intelligent System, 2002, 17(7): 709-716.
- [5] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.
- [6] Yang X H, Yang Z F, Shen Z Y, et al. A multi-objective decision-making ideal interval method for comprehensive assessment on water resource renewability[J]. Science in China, 2004, 47(S): 42-49.
- [7] He Y D, Chen H Y, Zhou L G, et al. Intuitionistic fuzzy geometric interaction averaging operators and their application to multi-criteria decision making[J]. Information Sciences, 2014, 259(2):142-159.
- [8] 何迎东, 陈华友, 周礼刚. 基于隶属度与非隶属度交叉影响的直觉模糊集运算法则及其应用[J]. 模糊系统与数学, 2013, 27(3): 134-142.
(He Y D, Chen H Y, Zhou L G. Operational laws for the intuitionistic fuzzy sets and their application based on interaction between membership function and non-membership function[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2013, 27(3): 134-142.)
- [9] 何迎东, 邹委员, 陈华友, 等. 基于交叉影响的IFWGA算子及其在多属性决策中的应用[J]. 数学的实践与认识, 2013, 43(6): 55-61.
(He Y D, Zou W Y, Chen H Y, et al. The intuitionistic fuzzy weighted geometric aggregation(IFWGA) operator based on interactions and its application to the multiple attributes decision making[J]. J of Mathematics in Practice and Theory, 2013, 43(6): 55-61.)
- [10] Xu Z S, Yager R R. Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets[J]. Int J of General Systems, 2006, 35(4): 417-433.
- [11] Xu Z S. Intuitionistic fuzzy aggregation operators[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2007, 15(6): 1179-1187.
- [12] Zhao H, Xu Z S, Ni M F, et al. Generalized aggregation operators for intuitionistic fuzzy sets[J]. Int J of Intelligent Systems, 2010, 25(1): 1-30.
- [13] Zhou L G, Chen H Y. Continuous generalized OWA operator and its application to decision making[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2011, 168(1): 18-34.
- [14] Zhou L G, Chen H Y, Liu J P. Generalized power aggregation operators and their applications in group decision making[J]. Computers & Industrial Engineering, 2012, 62(4): 989-999.
- [15] Chen S M, Tan J M. Handling multi-criteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 67(2): 163-172.
- [16] Bustince H, Burillo P. Vague sets are intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 79(3): 403-405.
- [17] Li D F. Multi-attribute decision making models and methods using intuitionistic fuzzy sets[J]. J of Computer and System Sciences, 2005, 70(1): 73-85.
- [18] Xu Z S, Yager R R. Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets[J]. Int J of General Systems, 2006, 35(4): 417-433.
- [19] Li D F. The GOWA operator based approach to multi-attribute decision making using intuitionistic fuzzy sets[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2011, 53(6): 1182-1196.
- [20] Dymova L, Sevastjanov P. An interpretation of intuitionistic fuzzy sets in terms of evidence theory: Decision making aspect[J]. Knowledge-based Systems, 2010, 23(8): 772-782.
- [21] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems 1986, 20(1): 87-96.
- [22] Atanassov K. New operations defined over the intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 61(2): 137-142.
- [23] De S K, Biswas R, Roy A R. Some operations on intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Set and Systems, 2000, 114(3): 477-484.
- [24] Hong D H, Choi C H. Multicriteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 114(1): 103-113.

(责任编辑: 郑晓蕾)