第 29 卷 第 7 期
Vol. 29 No. 7

控 制 与 决 策
Control and Decision

2014 年 7 月
Jul. 2014

文章编号: 1001-0920 (2014) 07-1239-11 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2013.0075

基于前景M-V准则的正态三角模糊随机多属性决策方法

陈振颂，李延来

(西南交通大学 a. 交通运输与物流学院，b. 综合运输智能化国家地方联合国家工程实验室，成都 610031)

摘 要: 针对具有正态三角模糊随机变量且属性权重未知的多属性决策问题, 提出基于前景均值-方差(M-V)准则的正态三角模糊随机多属性决策方法. 该方法首先构建正态三角模糊随机决策矩阵, 进而通过运算得到属性值的期望与方差, 并将其转化为M-V决策矩阵; 然后, 通过定义前景效应构建前景M-V决策矩阵, 利用改进灰色系统理论模型求解属性权重值, 获取综合前景M-V决策矩阵; 最后, 定义前景序关系, 两两比较前景M-V价值获取方案排序. 在此基础上, 通过案例验证了所提出方法的可行性及有效性.

关键词: 前景理论；正态三角模糊随机变量；均值-方差；灰色系统理论

中图分类号: C934 **文献标志码:** A

Approach for normal triangular fuzzy stochastic multiple attribute decision making based on prospect mean-variance rule

CHEN Zhen-song, *LI Yan-lai*

(a. School of Transportation and Logistics，b. Nation and Region Combined Engineering Lab of Intelligentizing Integrated Transportation，Southwest Jiaotong University，Chengdu 610031，China．Correspondent：LI Yan-lai，E-mail：lyl_2001@163.com)

Abstract: With respect to the problem of multiple attribute decision making, in which attribute weights are unknown and attribute values are given in terms of normal triangular fuzzy stochastic variables, an approach for normal triangular fuzzy stochastic multi-attribute decision making is proposed based on the prospect mean-variance rule. Firstly, a normal triangular fuzzy stochastic decision matrix is constructed. A mean-variance decision matrix is then obtained by calculating the expectation and variance of the normal triangular fuzzy stochastic decision matrix. Secondly, a prospect effect is defined, and a prospect mean-variance matrix is built by setting an attribute reference point of each alternative. Moreover, an improved grey system theory model is built to determine the attribute weights. The prospect mean-value matrix is transformed into a comprehensive prospect mean-variance matrix. Finally, according to the prospect order relation defined, a ranking of alternatives is obtained. A practical example is given to show the feasibility and effectiveness of the proposed approach.

Key words: prospect theory；normal triangular fuzzy stochastic variable；mean-variance；grey system theory

0 引 言

模糊多属性决策(FMADM)是处理具有不确定信息的有限方案筛选问题的有效方法, 为解决客观事物的复杂化、模糊性以及决策者主观判断模式的不确定性而导致的属性决策困难等问题提供了较好的理论依据. 该方法已在项目管理、模式匹配及智能控制等诸多领域得到了广泛的应用[1-2]. 目前, 对于属性值为模糊随机变量的模糊随机多属性决策(FSMADM)的研究较少, 但针对属性值为正态随机变量的随机多属性决策(SMADM)问题已有部分研究成果[3]. 姜广田等[4]探讨了一类属性值为正态随机变量的多属性决策方法, 通过计算正态随机变量的期望与方差确定属性随机占优关系, 进而依据ELECTRE III方法进行方案的对比和筛选. Lahdelma等[5-6]关注属性值为正态随机变量且属性具有关联性的SMADM问题, 提出了基于蒙特卡洛仿真的随机多目标可接受性分析方法, 获取了不确定条件下具备一定置信意义的方案排序结果. 在此基础上, 刘洋等[7]通过集结正态随机变量的期望与方差及Choquet积分的规范化计算结果来获取综合评价值,

收稿日期: 2013-01-16；**修回日期:** 2013-03-23.

基金项目: 国家自然科学基金项目(70971017, 71371156)；西南交通大学优秀博士学位论文培育项目.

作者简介: 陈振颂(1988−), 男, 博士生, 从事决策理论与方法、智能控制与应用的研究；李延来(1971−), 男, 教授, 博士生导师, 从事交通信息工程、智能控制与应用等研究.

进行方案排序.

事实上, 在诸如“零部件使用寿命”、“产品维修周期”、“商品顾客体验评价”等实际问题中, 属性往往存在模糊性与随机性共存的并行特征 (即空间横剖面模糊性与纵剖面随机性的交叉融合). 这不仅更加符合实际问题的多重复杂性特征, 也为解决高维系统的决策问题提供了一种有别于二型模糊集系统[8]的新方法. 通常, 针对复杂决策问题, 模糊随机性决策信息的获取要求决策者在一次决策过程中提供多次决策评估值样本, 进而依据格里纹科定理对总体的分布函数进行统计推断[9], 对获取的密度函数信息模糊化, 即可得到初始模糊随机性决策信息.

此外, 对于 FSMADM 问题的决策方法, 存在针对 FMADM 问题与 SMADM 问题决策途径的相关研究可供参考. Nowak[10-11]借鉴随机多目标规划思想, 提出了基于随机占优、交互式途径以及偏好阈值等概念, 进而展开随机多属性决策分析, 依据随机占优准则确定两两方案之间的随机占优关系, 并通过引入 ELECTRE III 方法进行决策方案排序. Fan 等[12]考虑属性值为概率分布函数与概率密度函数均已知的随机变量, 通过计算方案成对比较所有结果的概率, 并定义了一致性规则划分结果的异化状态, 进而通过设计方案排序算法获取方案择优结论. Zhang 等[13]应用随机占优准则判别随机多属性决策问题中方案的随机占优关系, 通过 PROMETHEE-II 获得方案的排序结果. Zaras[14]在确定随机占优关系的基础上, 利用粗糙集理论方法获取最终的方案排序.

事实上, 在众多 SMADM 问题中, 绝大部分均以期望效用值理论为基础, 而且是在决策者行为完全理性的假设下进行的[15]. 然而, Kahneman 和 Tversky 等[16-17] 所提出的前景理论指出, 决策者的决策过程受到众多因素的影响而极易产生情绪和认知方面的系统性偏差, 进而导致决策者依赖于所选取的参考点在面临收益和损失 2 种不同状况下的异化风险态度与敏感性. 为此, 考虑决策者有限理性行为的多属性决策问题已经引起了众多学者的关注. Levy 等[18]基于前景理论与随机占优思想提出了前景随机占优准则, 通过综合考虑决策者依赖于参考点选取的决策态度、对于收益及损失存在异化风险态度等心理行为特征, 确立方案间的前景随机占优关系. 李鹏等[19]提出了集成前景理论与新的记分函数的随机多属性决策方法, 并通过引入灰色系统理论确定指标权重, 以解决指标权重未知、方案指标值为直觉模糊数的随机直觉模糊决策问题. Hu 等[20]考虑一类属性权重完全未知、属性值为离散随机变量的动态随机多属性决策问题, 基于累计前景理论与集对分析方法确定方案排序. 王坚强等[21]针对权重不完全确定情形且方案准则值为梯形模糊数的多准则决策问题, 提出基于前景理论的模糊多属性决策方法, 通过定义梯形模糊数的前景价值函数构建综合前景值最大化的非线性规划模型, 以获取方案排序. 樊治平等[22-23]考虑带有决策者期望的混合清晰数、区间数及语言短语 3 种信息形式的多属性决策问题, 依据累计前景理论获取综合前景值进行方案排序. 在此基础上, 考虑决策者行为的风险决策方法被进一步应用到突发事件的应急响应上, 案例分析反馈了基于前景理论的应急响应风险决策方法的有效性. 张晓等[24]考虑决策者行为因素, 将具有随机变量的决策矩阵转化为关于参考点的收益、损失矩阵, 依据前景随机占优准则构建相应的前景随机占优关系矩阵, 进而利用偏好顺序结构评估法获取方案的排序. 然而, 以上研究均未考虑属性值为模糊随机变量的多属性决策问题, 在解决具有模糊随机变量的方案排序中可能导致结果有失偏颇.

基于上述研究, 针对目前关于属性值为模糊随机变量且权重未知的多属性决策问题的相关研究较为匮乏等情况, 本文提出一种新的集成前景理论与均值-方差 (M-V) 准则的分析方法, 结合前景理论所刻画的决策者有限理性行为特征, 解决一类适用于决策环境中以服从正太分布的三角模糊随机变量 (简称正态三角模糊变量) 为属性评估值的多属性决策问题. 首先, 通过获取正态三角模糊随机变量的期望值与方差, 构建 M-V 决策矩阵, 并通过设定参考点和计算前景价值函数, 将其转化为前景 M-V 决策矩阵; 接着, 通过改进灰色系统理论模型计算属性权重向量, 获取综合的前景 M-V 决策矩阵; 然后, 依据本文所定义的前景序关系, 通过两两比较具有三角模糊随机变量的属性二元 (期望值与方差) 组合的前景序关系, 获取方案排序; 最后, 通过案例分析验证了本文方法的可行性和有效性.

1 相关知识

1.1 模糊变量及模糊随机变量

Zadeh[25-26]提出的可能性测度极大地促进了模糊数学的发展. 然而, 可能性测度不满足自对偶性, 这一缺陷限制了其进一步发展. Liu 等[27-28]以此为基础定义了可信性理论的公理化体系. 为了后续更为清晰地给出模糊变量及模糊随机变量的相关定义, 本文首先给出可信性测度的含义.

定义 1[27-28] 假定 θ 为一个非空集合, $\mathcal{P}(\theta)$ 为 θ 上的幂集, $\mathrm{Cr}\{A\}$ 为模糊事件 A 出现的可信性. 若 Cr 满足如下 4 条公理:

1) $\mathrm{Cr}\{\theta\}=1$;

2) $\mathrm{Cr}\{A\}\leqslant \mathrm{Cr}\{B\}$, 如果 $A\subset B$;

3) $\mathrm{Cr}\{A\}+\mathrm{Cr}\{A^c\}=1$, $\forall A\in\mathcal{P}(\theta)$;

4) $\mathrm{Cr}\left\{\bigcup_i A_i\right\}=\sup_i \mathrm{Cr}\{A_i\}$, $\forall\{A_i\}(i\in N)$ 且有 $\mathrm{Cr}\{A_i\}<0.5$.

则称 Cr 为可信性测度.

事实上, 可信性测度与 Zadeh 所提出的可能性测度存在如下关系:

$$\mathrm{Cr}\{A\}=\frac{1}{2}(1+\mathrm{Pos}\{A\}-\mathrm{Pos}\{A^c\}),\ A\in\mathcal{P}(\theta).\quad (1)$$

其中 $\mathrm{Pos}\{A\}$ 和 $\mathrm{Pos}\{A^c\}$ 分别为模糊事件 A 及其补事件的可能性测度.

定义 2[29]　如果 ξ 为一个从可信性空间 $(\theta,\mathcal{P}(\theta),\mathrm{Cr})$ 到实数集的函数, 则称它为一个模糊变量.

定义 3[29]　假定 ξ 为任一模糊变量, 则模糊变量 ξ 的期望值为

$$\mathrm{E}[\xi]=\int_0^\infty \mathrm{Cr}\{\xi(\omega)\geqslant r\}\mathrm{d}r-\int_{-\infty}^0 \mathrm{Cr}\{\xi(\omega)\leqslant r\}\mathrm{d}r.\quad (2)$$

其中 2 个积分至少 1 个有限.

假设 $(\Omega,\Sigma,\mathrm{Pr})$ 为一个概率空间, $\mathcal{F}_\nu$ 为一族定义在概率空间 $(\Omega,\Sigma,\mathrm{Pr})$ 上的模糊变量, 则给出模糊随机变量的相关定义如下.

定义 4[30-31]　假定存在映射 $\xi:\Omega\rightarrow\mathcal{F}_v$, 使任意 Borel 集 R 的子集 B, 满足对于任意 ω, 函数 $\xi^*(B)(\omega)=\mathrm{Pos}\{\gamma\in\Gamma|\xi(\omega)(\gamma)\in B\}$ 是可测的, 则 ξ 为一个模糊随机变量.

定义 5[30-31]　假定 ξ 为一个定义在概率空间 $(\Omega,\Sigma,\mathrm{Pr})$ 上的模糊随机变量, 则 ξ 的期望值为

$$\mathrm{E}[\xi]=\int_\Omega\left[\int_0^\infty \mathrm{Cr}\{\xi(\omega)\geqslant r\}\mathrm{d}r-\int_{-\infty}^0 \mathrm{Cr}\{\xi(\omega)\leqslant r\}\mathrm{d}r\right]\mathrm{Pr}(\mathrm{d}\omega).\quad (3)$$

1.2　三角模糊随机变量相关定义

定义 6[32]　对于任意的 r, 如果 $\xi(r)=[X(r)-\alpha, X(r),\ X(r)+\beta]$ 的隶属度函数满足

$$\mu_{\xi(r)}(x)=\begin{cases}\dfrac{[x-X(r)+\alpha]}{\alpha},\ X(r)-\alpha\leqslant x\leqslant X(r);\\ \dfrac{[-x+X(r)+\beta]}{\beta},\ X(r)\leqslant x\leqslant X(r)+\beta;\\ 0,\ \text{otherwise}.\end{cases}\quad (4)$$

其中: $\alpha>0$, $\beta>0$, $X(r)$ 为一个实值随机变量. 则称 $\xi(r)=[X(r)-\alpha,X(r),X(r)+\beta]$ 为一个三角模糊随机变量.

定义 7[32]　设 $\xi(r)=[X(r)-\alpha,X(r),X(r)+\beta]$ 为一个三角模糊随机变量, 则三角模糊随机变量 $\xi(r)$ 的期望值为

$$\mathrm{E}[\xi(r)]=\frac{4\mathrm{E}[X(r)]-\alpha+\beta}{4}.\quad (5)$$

例 1　假定随机模糊变量 $\xi(Y)(Y=Y_1,\ Y_2)$ 为一个离散三角模糊随机变量, 且分别以概率值 0.3 和 0.7 取模糊值

$$\xi(Y_1)=(2,5,9)=(5-3,5,5+4),$$

$$\xi(Y_2)=(8-2,8,8+6).$$

则由定义 3 可知, $\xi(Y_1)$ 以概率 0.3 获得期望值

$$\mathrm{E}[\xi(Y_1)]=\frac{4\times5-3+4}{4}=5.25,$$

$\xi(Y_2)$ 以概率 0.7 获得期望值

$$\mathrm{E}[\xi(Y_2)]=\frac{4\times8-2+6}{4}=9.$$

进一步, 由定义 5 可知

$$\mathrm{E}[\xi(Y)]=0.3\times\mathrm{E}[\xi(Y_1)]+0.7\times\mathrm{E}[\xi(Y_2)]=0.3\times5.25+0.7\times9=7.175.$$

定义 8[32]　设 $\xi(r)=[X(r)-\alpha,X(r),X(r)+\beta]$ 为定义在概率空间 $(\Omega,\Sigma,\mathrm{Pr})$ 上的一个三角模糊随机变量, 且其期望值 $\mathrm{E}[\xi(r)]$ 有限, 则三角模糊随机变量 $\xi(r)$ 的方差为

$$\mathrm{Var}[\xi(r)]=\mathrm{E}[(\xi(r)-\mathrm{E}[\xi(r)])^2].\quad (6)$$

例 2　文献 [32] 指出, 对于三角模糊随机变量 $\xi(r)=[X(r)-\alpha,\ X(r),\ X(r)+\beta]$, 若 $X(r)$ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 则三角模糊随机变量的方差按以下情形讨论给出.

情形 1: $\alpha=\beta$.

由于 $\alpha=\beta$, 由定义 7 可知, $\mathrm{E}[\xi(r)]=\mathrm{E}[X(r)]$, 即

$$\mathrm{Var}[\xi(r)]=\frac{2\sigma^3}{3\alpha\sqrt{2\pi}}+\frac{3}{2}\sigma^2+\frac{\sigma\alpha}{\sqrt{2\pi}}+\frac{1}{2}\alpha^2-\left(\sigma^2+\frac{1}{3}\alpha^2\right)\varPhi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)-\left(\frac{\sigma\alpha}{3\sqrt{2\pi}}+\frac{2\sigma^3}{3\alpha\sqrt{2\pi}}\right)\exp^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}}.\quad (7)$$

情形 2: $\alpha>\beta$.

$$\mathrm{Var}[\xi(r)]=\frac{7\alpha^2-14\alpha\beta-\beta^2}{8\alpha(\alpha-\beta)}\sigma^2+\frac{47\alpha^3+75\alpha^2\beta+69\alpha\beta^2+\beta^3}{384\alpha}-\left(\frac{27\alpha^3+27\alpha^2\beta+9\alpha\beta^2+\beta^3}{384\alpha}+\frac{3\alpha+\beta}{8\alpha}\sigma^2\right)\times$$

$$\Phi\Big(\frac{3\alpha+\beta}{4\sigma}\Big)-$$
$$\Big(\frac{\alpha^3+9\alpha^2\beta+27\alpha\beta^2+27\beta^3}{384\alpha}+\frac{\alpha+3\beta}{8\beta}\sigma^2\Big)\times$$
$$\Phi\Big(\frac{\alpha+3\beta}{4\sigma}\Big)+$$
$$\Big(\frac{\alpha^3+7\alpha^2\beta+7\alpha\beta^2+\beta^3}{8\alpha\beta(\alpha-\beta)}\sigma^2+$$
$$\frac{\alpha^4+22\alpha^3\beta-22\alpha\beta^3+\beta^4}{384\alpha\beta}\Big)\Phi\Big(\frac{\alpha+\beta}{4\sigma}\Big)-$$
$$\Big(\frac{(3\alpha+\beta)^2}{96\alpha\sqrt{2\pi}}\sigma+\frac{\sigma^3}{3\alpha\sqrt{2\pi}}\Big)\exp^{-\frac{(3\alpha+\beta)^2}{32\sigma^2}}-$$
$$\Big(\frac{(\alpha+3\beta)^2}{96\beta\sqrt{2\pi}}\sigma+\frac{\sigma^3}{3\beta\sqrt{2\pi}}\Big)\exp^{-\frac{(\alpha+3\beta)^2}{32\sigma^2}}+$$
$$\Big(\frac{(\alpha+\beta)^2}{3\alpha\beta\sqrt{2\pi}}\sigma^3+\frac{\alpha^3+23\alpha^2\beta+23\alpha\beta^2+\beta^3}{96\alpha\beta\sqrt{2\pi}}\sigma\Big)\times$$
$$\exp^{-\frac{(\alpha-\beta)^2}{32\sigma^2}}. \tag{8}$$

情形 3: $\alpha<\beta$.

$$\mathrm{Var}[\xi(r)]=$$
$$\frac{\alpha^2+14\alpha\beta-7\beta^2}{8\beta(\beta-\alpha)}\sigma^2+$$
$$\frac{\alpha^3+69\alpha^2\beta+75\alpha\beta^2+47\beta^3}{384\beta}-$$
$$\Big(\frac{27\alpha^3+27\alpha^2\beta+9\alpha\beta^2+\beta^3}{384\alpha}+\frac{3\alpha+\beta}{8\alpha}\sigma^2\Big)\times$$
$$\Phi\Big(\frac{3\alpha+\beta}{4\sigma}\Big)-$$
$$\Big(\frac{\alpha^3+9\alpha^2\beta+27\alpha\beta^2+27\beta^3}{384\alpha}+\frac{\alpha+3\beta}{8\beta}\sigma^2\Big)\times$$
$$\Phi\Big(\frac{\alpha+3\beta}{4\sigma}\Big)+$$
$$\Big(\frac{\alpha^3+7\alpha^2\beta+7\alpha\beta^2+\beta^3}{8\alpha\beta(\alpha-\beta)}\sigma^2-$$
$$\frac{\alpha^4+22\alpha^3\beta-22\alpha\beta^3-\beta^4}{384\alpha\beta}\Big)\Phi\Big(\frac{\beta-\alpha}{4\sigma}\Big)-$$
$$\Big(\frac{(3\alpha+\beta)^2}{96\alpha\sqrt{2\pi}}\sigma+\frac{\sigma^3}{3\alpha\sqrt{2\pi}}\Big)\exp^{-\frac{(3\alpha+\beta)^2}{32\sigma^2}}-$$
$$\Big(\frac{(\alpha+3\beta)^2}{96\beta\sqrt{2\pi}}\sigma+\frac{\sigma^3}{3\beta\sqrt{2\pi}}\Big)\exp^{-\frac{(\alpha+3\beta)^2}{32\sigma^2}}+$$
$$\Big(\frac{(\alpha+\beta)^2}{3\alpha\beta\sqrt{2\pi}}\sigma^3+\frac{\alpha^3+23\alpha^2\beta+23\alpha\beta^2+\beta^3}{96\alpha\beta\sqrt{2\pi}}\sigma\Big)\times$$
$$\exp^{-\frac{(\beta-\alpha)^2}{32\sigma^2}}. \tag{9}$$

定义 7、定义 8 及例 2 给出了正态三角模糊随机变量的期望值与方差的计算公式, 其中方差的计算较为复杂. 本文编制了相应的 Matlab 程序以辅助和简化计算.

2 前景均值-方差准则

2.1 前景理论

与预期效用理论中基于完全理性行为所假设的各种偏好公理不同, Kahneman 和 Tversky 等[16-17]考虑个体的特殊心理过程与规律, 基于有限理性的设想提出前景理论, 利用前景理论去解释决策者的行为对于决策结果的合理化具有重要作用. 事实上, 作为一种描述在不确定条件下个体选择行为的决策理论, 前景理论揭示了决策者具有参考点依赖、损失厌恶、边际效用递减及概率判断扭曲等特点[33].

在理性决策研究中, 决策者在不确定条件下更看重相对于某个参考点的收益和损失, 而非最终总价值, 因此充分考虑决策者的此项决策行为十分关键. 假定决策者基于某个参考点 T 对某一策略的结果 x 所导致的变化量 $\Delta x=x-T$ 进行分析, 分别定义 $\Delta x>0$ 和 $\Delta x<0$ 为收益和损失. 则依据前景理论, 其价值函数 $\nu(\Delta x)$ 亦可分为收益和损失 2 部分. 文献 [24] 指出, 对于收益情形, 当价值函数 $\nu(\Delta x)$ 满足 $\nu'(\Delta x)\geqslant 0$ 且 $\nu''(\Delta x)\leqslant 0$ 时, 表示决策者对收益是风险规避的; 对于损失情形, 当价值函数 $\nu(\Delta x)$ 满足 $\nu'(\Delta x)\geqslant 0$ 且 $\nu''(\Delta x)\geqslant 0$ 时, 表示决策者对损失是风险偏好的. 而对于决策敏感性, 考虑任意 $\Delta x>0$, 均有 $\nu(\Delta x)<-\nu(-\Delta x)$, 表示决策者是损失规避的. 下面将给出前景理论的一般形式.

前景理论主要考虑价值函数和决策权重, 决策的前景价值可表示为[21-24]

$$W=\sum_{i=1}^{n}h(p_i)v(\Delta x_i). \tag{10}$$

其中: $h(p_i)=\dfrac{p_i^\gamma}{[p_i^\gamma+(1-p_i^\gamma)]^{\frac{1}{\gamma}}}$ 为概率评价性的单调增函数, 称为决策权重. 而

$$\nu(\Delta x_i)=\begin{cases}(\Delta x_i)^\alpha,\ \Delta x_i\geqslant 0;\\ -\sigma(-\Delta x_i)^\beta,\ \Delta x_i<0\end{cases} \tag{11}$$

为 x 的价值函数, 是决策者主观感受的价值. Δx_i 为 x_i 偏离参考点的程度, 即为表征表面价值的收益与损失; 参数 α 和 β 分别为收益和损失区域价值幂函数的凹凸程度, $0\leqslant\alpha,\ \beta\leqslant 1$ 意味着决策者敏感性递减; σ 刻画风险厌恶程度, 依据决策者对损失敏感性强于收益的特性, 通常取 $\sigma>1$.

2.2 前景均值-方差准则

美国经济学家 Markowitz[34]于 1952 年提出了均值-方差准则 (M-VR). 目前, M-VR 分析方法已广泛应用于优化投资结构、资产配置及投资多样化等领域. M-VR 指出, 风险厌恶型投资者在具有相同的期望收

益率的诸多投资机会中, 倾向于选择收益率方差最小的投资机会. 而在具有相同收益率方差的诸多投资机会中, 倾向于选择期望收益率最大的投资机会[34-35].

本文将前景理论与 M-VR 构建前景均值-方差准则 (PM-VR) 融合, 将传统的 M-VR 推广为适用于政治、经济、技术和日常生活等各类决策环境的方案择优判别准则. 事实上, 传统 M-VR 仍然是以期望效用最大化理论为判别准则构建的基础, 并且仅考虑风险厌恶型决策者的决策行为. 而 PM-VR 设想风险厌恶型决策者在面临损失环境下的风险态度转变, 充分衡量决策者决策行为在面临收益与损失时的异化风险认知度与敏感性, 既有效克服了 M-VR 无法刻画决策者风险态度时变性的缺陷, 也充分考虑了决策者行为具备有限理性的特征.

本文所提出的 PM-VR 建立在前景理论的价值函数 $\nu(\Delta x)$ 的基础上, 对于三角模糊随机变量 $\xi(r) = [X(r)-\alpha, X(r), X(r)+\beta]$, 在计算得到其期望值 $\mathrm{E}[\xi(r)]$ 和方差 $\mathrm{Var}[\xi(r)]$ 之后, 依据 PM-VR 即可定义其序关系, 进而可应用于 FSMADM 的方案排序, 获得择优方案.

定义 9　设 G 为代表一族三角模糊随机变量的非空集合, 若满足以下条件, 则称二元序关系 "$\succ$", "$\prec$", "$=$" 为 G 上的严格偏序.

1) 自反性: $\xi(r) = \xi(r); \forall \xi(r) \in G$;

2) 对称性: $\xi(r) \prec \zeta(s), \zeta(s) \succ \xi(r); \forall \xi(r), \zeta(s) \in G$;

3) 传递性: 若 $\xi(r) \prec \zeta(s), \zeta(s) \prec \varsigma(t)$, 则 $\xi(r) \prec \varsigma(t), \forall \xi(r), \zeta(s), \varsigma(t) \in G$.

定义 10　设 $\xi(r) = [X(r)-\alpha, X(r), X(r)+\beta]$ (下文简称 $\xi(r)$), $\zeta(s) = [X(s)-\alpha', X(s), X(s)+\beta']$ (下文简称 $\zeta(s)$) 为 2 个三角模糊随机变量, 二者的数学期望分别为 $\mathrm{E}[\xi(r)]$, $\mathrm{E}[\zeta(s)]$, 方差分别为 $\mathrm{Var}[\xi(r)]$, $\mathrm{Var}[\zeta(s)]$, 则称:

1) 优序关系: "$\xi(r) \succ \zeta(s)$" 成立, 当且仅当 $\mathrm{E}[\xi(r)] \geqslant \mathrm{E}[\zeta(s)]$, $\mathrm{Var}[\xi(r)] \leqslant \mathrm{Var}[\zeta(s)]$, 不等号至少在一三角模糊点上成立;

2) 劣序关系: "$\xi(r) \prec \zeta(s)$" 成立, 当且仅当 $\mathrm{E}[\xi(r)] \leqslant \mathrm{E}[\zeta(s)]$, $\mathrm{Var}[\xi(r)] \geqslant \mathrm{Var}[\zeta(s)]$, 不等号至少在一三角模糊点上成立;

3) 一致序关系: "$\xi(r) = \zeta(s)$" 成立, 当且仅当 $\mathrm{E}[\xi(r)] = \mathrm{E}[\zeta(s)]$, $\mathrm{Var}[\xi(r)] = \mathrm{Var}[\zeta(s)]$.

对于任意给定的三角模糊随机变量, 在实际的决策问题中, 决策者总会依据一定的参考点给出基于某一方案的某一属性值的评估信息. 为此, 在这里给定任意一个参考点, 假设该参考点为三角模糊随机变量 $\Delta(u)$ 的期望值 $\mathrm{E}[\Delta(u)]$, 依据前景理论中价值函数与决策权重的含义, 定义属性值为三角模糊随机变量的前景期望效应及前景方差效应, 进而给出 PM-VR 的二元序关系.

定义 11　设 $\xi(r)$ 为 1 个三角模糊随机变量, 其数学期望和方差分别为 $\mathrm{E}[\xi(r)]$、$\mathrm{Var}[\xi(r)]$. 基于前景理论的参考点为三角模糊随机变量 $\Delta(u)$ 的期望值 $\mathrm{E}[\Delta(u)]$, 方差为 $\mathrm{Var}[\Delta(u)]$, 则三角模糊变量 $\xi(r)$ 的前景期望效应为

$$\Delta\mathrm{E}_{\xi(r)} = \mathrm{E}[\xi(r)] - \mathrm{E}[\Delta(u)];$$

$\xi(r)$ 的前景方差效应为

$$\Delta\mathrm{Var}_{\xi(r)} = \mathrm{Var}[\xi(r)] - \mathrm{Var}[\Delta(u)];$$

$\xi(r)$ 的前景期望价值函数为

$$\nu(\Delta\mathrm{E}_{\xi(r)}) = \begin{cases} (\Delta\mathrm{E}_{\xi(r)})^{\alpha}, \ \Delta\mathrm{E}_{\xi(r)} \geqslant 0; \\ -\sigma(-\Delta\mathrm{E}_{\xi(r)})^{\beta}, \ \Delta\mathrm{E}_{\xi(r)} < 0; \end{cases} \tag{12}$$

$\xi(r)$ 的前景方差价值函数为

$$\nu(\Delta\mathrm{Var}_{\xi(r)}) = \begin{cases} (\Delta\mathrm{Var}_{\xi(r)})^{\alpha}, \ \Delta\mathrm{Var}_{\xi(r)} \geqslant 0; \\ -\sigma(-\Delta\mathrm{Var}_{\xi(r)})^{\beta}, \ \Delta\mathrm{Var}_{\xi(r)} < 0. \end{cases} \tag{13}$$

根据定义 11 并结合式 (10), 可以给出三角模糊变量 $\xi(r)$ 的前景期望价值为

$$W(\Delta\mathrm{E}_{\xi(r)}) = h(p_{\xi(r)})\nu(\Delta\mathrm{E}_{\xi(r)}), \tag{14}$$

$\xi(r)$ 的前景方差价值为

$$W(\Delta\mathrm{Var}_{\xi(r)}) = h(p_{\xi(r)})\nu(\Delta\mathrm{Var}_{\xi(r)}), \tag{15}$$

其中 $h(p_{\xi(r)}) = \dfrac{p_{\xi(r)}^{\gamma}}{[p_{\xi(r)}^{\gamma} + (1-p_{\xi(r)}^{\gamma})]^{\frac{1}{\gamma}}}$.

定义 12　设 $\xi(r)$、$\zeta(s)$ 为 2 个三角模糊随机变量, 二者的前景期望价值为 $W(\Delta\mathrm{E}_{\xi(r)})$ 和 $W(\Delta\mathrm{E}_{\zeta(s)})$, 前景方差价值为 $W(\Delta\mathrm{Var}_{\xi(r)})$ 和 $W(\Delta\mathrm{Var}_{\zeta(s)})$, 则称:

1) 优前景序关系: "$\xi(r) \succ_{\mathrm{PM-VR}} \zeta(s)$" 成立, 当且仅当 $W(\Delta\mathrm{E}_{\xi(r)}) \geqslant W(\Delta\mathrm{E}_{\zeta(s)})$, $W(\Delta\mathrm{Var}_{\xi(r)}) \leqslant W(\Delta\mathrm{Var}_{\zeta(s)})$, 不等号至少在一三角模糊点上成立;

2) 劣前景序关系: "$\xi(r) \prec_{\mathrm{PM-VR}} \zeta(s)$" 成立, 当且仅当 $W(\Delta\mathrm{E}_{\xi(r)}) \leqslant W(\Delta\mathrm{E}_{\zeta(s)})$, $W(\Delta\mathrm{Var}_{\xi(r)}) \geqslant W(\Delta\mathrm{Var}_{\zeta(s)})$, 不等号至少在一三角模糊点上成立;

3) 一致前景序关系: "$\xi(r) =_{\mathrm{PM-VR}} \zeta(s)$" 成立, 当且仅当 $W(\Delta\mathrm{E}_{\xi(r)}) = W(\Delta\mathrm{E}_{\zeta(s)})$, $W(\Delta\mathrm{Var}_{\xi(r)}) = W(\Delta\mathrm{Var}_{\zeta(s)})$.

事实上, 定义 12 中的前景序关系并不完备, 在实际问题的探讨中, 往往存在 $W(\Delta\mathrm{E}_{\xi(r)}) > W(\Delta\mathrm{E}_{\zeta(s)})$ (或$<$) 和 $W(\Delta\mathrm{Var}_{\xi(r)}) > W(\Delta\mathrm{Var}_{\zeta(s)})$(或$<$) 不等号

方向一致成立的情况. 为了克服期望、方差一致性波动下无法判定期望、方差相对重要性的缺陷, 本文基于前景M-V准则下决策者行为模式, 给出如下定义.

定义 13 设$\xi(r)$, $\zeta(s)$为2个三角模糊随机变量, 二者的前景期望价值为$W(\Delta \mathrm{E}_{\xi(r)})$和$W(\Delta \mathrm{E}_{\zeta(s)})$, 前景方差价值为$W(\Delta \mathrm{Var}_{\xi(r)})$和$W(\Delta \mathrm{Var}_{\zeta(s)})$, 则称:

1) 优前景序关系"$\xi(r) \succ_{\mathrm{PM-VR}} \zeta(s)$"成立, 若下面2种情况有1种成立: ① $\Delta \mathrm{E}_{\xi(r)}, \Delta \mathrm{E}_{\zeta(s)} \in (-\infty, 0]$, 且有

$$W(\Delta \mathrm{E}_{\xi(r)}) > W(\Delta \mathrm{E}_{\zeta(s)}),$$
$$W(\Delta \mathrm{Var}_{\xi(r)}) > W(\Delta \mathrm{Var}_{\zeta(s)});$$

② $\Delta \mathrm{E}_{\xi(r)}, \Delta \mathrm{E}_{\zeta(s)} \in [0, +\infty)$, 且有

$$W(\Delta \mathrm{E}_{\xi(r)}) < W(\Delta \mathrm{E}_{\zeta(s)}),$$
$$W(\Delta \mathrm{Var}_{\xi(r)}) < W(\Delta \mathrm{Var}_{\zeta(s)}).$$

其中: $W'(\Delta \mathrm{E}_{\xi(r)})$, $W'(\Delta \mathrm{E}_{\zeta(s)})$, $W'(\Delta \mathrm{Var}_{\xi(r)})$, $W'(\Delta \mathrm{Var}_{\zeta(s)}) \geqslant 0$; $W''(\Delta \mathrm{E}_{\xi(r)})$, $W''(\Delta \mathrm{E}_{\zeta(s)})$, $W''(\Delta \mathrm{Var}_{\xi(r)})$, $W''(\Delta \mathrm{Var}_{\zeta(s)}) \leqslant 0$. 则表明决策者是风险规避的.

2) 劣前景序关系"$\xi(r) \prec_{\mathrm{PM-VR}} \zeta(s)$"成立, 若下面2种情况有1种成立: ① $\Delta \mathrm{E}_{\xi(r)}, \Delta \mathrm{E}_{\zeta(s)} \in (-\infty, 0]$, 且有

$$W(\Delta \mathrm{E}_{\xi(r)}) < W(\Delta \mathrm{E}_{\zeta(s)}),$$
$$W(\Delta \mathrm{Var}_{\xi(r)}) < W(\Delta \mathrm{Var}_{\zeta(s)});$$

② $\Delta \mathrm{E}_{\xi(r)}, \Delta \mathrm{E}_{\zeta(s)} \in [0, +\infty)$, 且有

$$W(\Delta \mathrm{E}_{\xi(r)}) > W(\Delta \mathrm{E}_{\zeta(s)}),$$
$$W(\Delta \mathrm{Var}_{\xi(r)}) > W(\Delta \mathrm{Var}_{\zeta(s)}).$$

其中: $W'(\Delta \mathrm{E}_{\xi(r)})$, $W'(\Delta \mathrm{E}_{\zeta(s)})$, $W'(\Delta \mathrm{Var}_{\xi(r)})$, $W'(\Delta \mathrm{Var}_{\zeta(s)}) \geqslant 0$; $W''(\Delta \mathrm{E}_{\xi(r)})$, $W''(\Delta \mathrm{E}_{\zeta(s)})$, $W''(\Delta \mathrm{Var}_{\xi(r)})$, $W''(\Delta \mathrm{Var}_{\zeta(s)}) \geqslant 0$. 则表明决策者是风险偏好的.

容易验证, 定义13在既有基础上构建了完备的前景序关系, 是定义12相应于实际问题的各种可能性的扩充. 值得说明的是, 在实际的决策问题中, 由于决策者的异化偏好信息, 一致前景序关系的存在几乎是不可能的.

文献[24]将前景随机占优准则(PSDR)应用于随机多属性决策. 事实上, 本文所提出的PM-VR与PSDR在模糊随机变量服从正态分布的情形下是一致的.

定理 1 设$\xi(r)$, $\zeta(s)$为2个三角模糊随机变量, 且$\xi(r) \sim N(W(\Delta \mathrm{E}_{\xi(\mathrm{r})}), W(\Delta \mathrm{Var}_{\xi(r)}))$, $\zeta(s) \sim N(W(\Delta \mathrm{E}_{\zeta(s)}), W(\Delta \mathrm{Var}_{\zeta(s)}))$, 二者的分布函数分别为$F_{\xi(r)}[t]$和$G_{\zeta(s)}[t]$, 则PM-VR与文献[24]中的前景随机占优准则等价, 即$F_{\xi(r)}[t] \mathrm{PM-VR} G_{\zeta(s)}[t] \Leftrightarrow F_{\xi(r)}[t] \mathrm{PSDR} G_{\zeta(s)}[t]$.

证明 分以下3类情形讨论:

1) 若有$W(\Delta \mathrm{Var}_{\xi(r)}) = W(\Delta \mathrm{Var}_{\zeta(s)}) = \sigma^2$, $W(\Delta \mathrm{E}_{\xi(r)}) > W(\Delta \mathrm{E}_{\zeta(s)})$, 则依据PM-VR, 有$\xi(r) \succ_{\mathrm{PM-VR}} \zeta(s)$成立. 因此, 对于任意$t$, 均有

$$\frac{t - W(\Delta \mathrm{E}_{\xi(r)})}{\sigma} < \frac{t - W(\Delta \mathrm{E}_{\zeta(s)})}{\sigma}.$$

依据标准正态分布的性质, 有

$$\varPhi\left[\frac{t - W(\Delta \mathrm{E}_{\xi(r)})}{\sigma}\right] < \varPhi\left[\frac{t - W(\Delta \mathrm{E}_{\zeta(s)})}{\sigma}\right],$$

即

$$F_{\xi(r)}[t] = \varPhi\left[\frac{t - W(\Delta \mathrm{E}_{\xi(r)})}{\sigma}\right] < \varPhi\left[\frac{t - W(\Delta \mathrm{E}_{\zeta(s)})}{\sigma}\right] = G_{\xi(s)}[t],$$

于是有

$$\int_{-\infty}^{t} F_{\xi(r)}[\mu]\mathrm{d}\mu < \int_{-\infty}^{t} G_{\zeta(s)}[\mu]\mathrm{d}\mu,$$

即依据PSDR也有$\xi(r) \succ_{\mathrm{PSDR}} \zeta(s)$成立.

2) 若$W(\Delta \mathrm{E}_{\xi(r)}) = W(\Delta \mathrm{E}_{\zeta(s)}) = u$, ${\sigma_{\xi(r)}}^2 = W(\Delta \mathrm{Var}_{\xi(r)}) < W(\Delta \mathrm{Var}_{\zeta(s)}) = {\sigma_{\zeta(s)}}^2$, 则依据PM-VR, 有$\xi(r) \succ_{\mathrm{PM-VR}} \zeta(s)$成立. 根据正态分布函数的性质, 分别讨论$t \leqslant u$和$t > u$两种情况.

① 若$t \leqslant u$, 则有

$$\frac{t-u}{\sigma_{\xi(r)}} < \frac{t-u}{\sigma_{\zeta(s)}},$$

即$F_{\xi(r)}[t] < G_{\zeta(s)}[t]$, 于是有

$$\int_{-\infty}^{t} F_{\xi(r)}[\mu]\mathrm{d}\mu < \int_{-\infty}^{t} G_{\zeta(s)}[\mu]\mathrm{d}\mu.$$

② 若$t > u$, 则有

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{t} (G_{\zeta(s)}[\mu] - F_{\xi(r)}[\mu])\mathrm{d}\mu = \\ &\int_{-\infty}^{u} (G_{\zeta(s)}[\mu] - F_{\xi(r)}[\mu])\mathrm{d}\mu + \int_{u}^{t} (G_{\zeta(s)}[\mu] - F_{\xi(r)}[\mu])\mathrm{d}\mu > \\ &\int_{-\infty}^{u} (G_{\zeta(s)}[\mu] - F_{\xi(r)}[\mu])\mathrm{d}\mu + \\ &\int_{u}^{+\infty} (G_{\zeta(s)}[\mu] - F_{\xi(r)}[\mu])\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

令$x = 2u - t$, 则

$$\begin{aligned}&\int_{u}^{+\infty} (G_{\zeta(s)}[\mu] - F_{\xi(r)}[\mu])\mathrm{d}\mu = \\ &-\int_{u}^{+\infty} (G_{\zeta(s)}[2u - x] - F_{\xi(r)}[2u - x])\mathrm{d}x = \\ &\int_{-\infty}^{u} (G_{\zeta(s)}[2u - x] - F_{\xi(r)}[2u - x])\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}&G_{\zeta(s)}[2u - \mu] + G_{\zeta(s)}[\mu] = \\ &\varPhi\Big(\frac{\mu - u}{\sigma_{\zeta(s)}}\Big) + \varPhi\Big(\frac{u - \mu}{\sigma_{\zeta(s)}}\Big) = 1, \\ &F_{\xi(r)}[2u - \mu] + F_{\xi(r)}[\mu] =\end{aligned}$$

$$\Phi\Big(\frac{\mu-u}{\sigma_{\xi(r)}}\Big)+\Phi\Big(\frac{u-\mu}{\sigma_{\xi(r)}}\Big)=1,$$

对于所有的 $t>u$, 均有

$$\int_{-\infty}^{t}(G_{\zeta(s)}[\mu]-F_{\xi(r)}[\mu])\mathrm{d}\mu>$$
$$\int_{-\infty}^{u}(G_{\zeta(s)}[\mu]-F_{\xi(r)}[\mu])\mathrm{d}\mu+$$
$$\int_{-\infty}^{u}(G_{\zeta(s)}[2u-\mu]-F_{\xi(r)}[2u-\mu])\mathrm{d}\mu=$$
$$\int_{-\infty}^{u}(G_{\zeta(s)}[\mu]+G_{\xi(r)}[2u-\mu])\mathrm{d}\mu-$$
$$\int_{u}^{+\infty}(F_{\zeta(s)}[\mu]+F_{\xi(r)}[2u-\mu])\mathrm{d}\mu=0,$$

即

$$\int_{-\infty}^{t}F_{\xi(r)}[\mu]\mathrm{d}\mu<\int_{-\infty}^{t}G_{\zeta(s)}[\mu]\mathrm{d}\mu,$$

于是有 $\xi(r)\succ_{\mathrm{PSDR}}\zeta(s)$ 成立.

3) 若 $W(\Delta\mathrm{E}_{\xi(r)})>W(\Delta\mathrm{E}_{\zeta(s)})$, $W(\Delta\mathrm{Var}_{\xi(r)})>W(\Delta\mathrm{Var}_{\zeta(s)})$, 则为已讨论的 2 类情形的合成. 无论是依据 PM-VR 还是 PSDR, 均有 $\xi(r)\succ\zeta(s)$ 成立. □

3　基于前景均值-方差准则的多属性决策模型构建

3.1　问题描述

考虑一个 FSMADM 问题, 记 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 为备选方案的集合. 其中: A_i 为第 i 个备选方案; $C=\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$ 为属性的集合, C_j 为第 j 个属性, 各属性之间不存在相依关系; $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$ 为属性权重向量, ω_j 为属性 C_j 的权重, 满足 $\omega_j\geqslant 0$ 且 $\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_j=1, j=1,2,\cdots,n$. 设决策者利用正态三角模糊随机变量$\xi_{ij}(r_{ij})=[X_{ij}(r_{ij})-\alpha_{ij},X_{ij}(r_{ij}),X_{ij}(r_{ij})+\beta_{ij}]$, $X_{ij}(r_{ij})\sim N(\mu_{ij},{\sigma_{ij}}^2)$ 为备选方案 $A_i\in A\,(i=1,2,\cdots,m)$ 下属性 $C_j\in C\,(j=1,2,\cdots,n)$ 的评价结果, 得到决策矩阵 $\mathrm{X}=[\xi_{ij}(r_{ij})]_{m\times n}$. 要求确定方案的排序并择优.

为解决上述问题, 本文给出一种基于 PM-VR 的正态三角模糊随机多属性决策方法. 该方法的基本思想是: 首先, 提取正态三角模糊随机评估信息的期望和方差统计特征信息, 获取 M-V 决策矩阵; 其次, 针对决策方案的不同属性, 设定相应的属性参考点, 通过定义前景期望和方差效应, 构建前景 M-V 决策矩阵; 最后, 依据本文所定义的完备前景序关系, 在利用改进灰色系统理论模型求解属性权重值的基础上, 将前景 M-V 决策矩阵转化为综合前景 M-V 决策矩阵, 获取方案排序.

下面基于 PM-VR 构建多属性决策模型.

3.2　基于 PM-VR 的模型构建

在实际的多属性决策中, 在不确定且复杂的环境下, 决策者难以给出准确的评估值, 而往往给出一类服从某种分布的模糊随机变量. 考虑决策者的实际决策环境, 评价过程可视为受到大量外界微小且独立的随机因素影响的决策行为, 而常用的评估值形式为具有三角模糊数形式的随机变量. 为此, 本文利用服从正态分布的三角模糊随机变量表征决策者复杂决策评估值.

下面给出模型构建的主要步骤.

Step 1　构建正态三角模糊随机决策矩阵

$$X=[\xi_{ij}(r_{ij})]_{m\times n},$$
$$i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n. \tag{16}$$

其中: $\xi_{ij}(r_{ij})=[X_{ij}(r_{ij})-\alpha_{ij},X_{ij}(r_{ij}),X_{ij}(r_{ij})+\beta_{ij}]$ 且 $X_{ij}(r_{ij})\sim N(\mu_{ij},{\sigma_{ij}}^2)$.

Step 2　依据定义 7、定义 8 并结合例 2 可分别得到 $\xi_{ij}(r_{ij})$ 的期望 $\mathrm{E}[\xi_{ij}(r_{ij})]$ 和方差 $\mathrm{Var}[\xi_{ij}(r_{ij})]$, 进而可构建 M-V 决策矩阵, 即

$$\mathrm{EV}=[\langle\mathrm{E}[\xi_{ij}(r_{ij})],\ \mathrm{Var}[\xi_{ij}(r_{ij})]\rangle_{ij}]_{m\times n},$$
$$i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n. \tag{17}$$

Step 3　通常决策者对决策方案的不同属性 $C=\{C_1,C_2,\cdots,C_j,\cdots,C_n\}$ 进行评价时, 依据其已获取的信息、现有的知识、具备的水平等, 针对各属性存在不同的属性参考点, 本文将其设定为

$$\langle\mathrm{E}[\xi_j(r_j)],\mathrm{Var}[\xi_j(r_j)]\rangle_j,\ j=1,2,\cdots,n. \tag{18}$$

Step 4　属性参考点的不同取决于决策者面临风险时对风险的态度及对未来收益或损失的预期. 依据定义 11 中关于前景期望价值函数及前景方差价值函数的描述, 可利用属性参考点将 M-V 决策矩阵转化为前景 M-V 决策矩阵, 即

$$\mathrm{PEV}=[\langle\nu(\Delta\mathrm{E}_{\xi_{ij}(r_{ij})}),\ \nu(\Delta\mathrm{Var}_{\xi_{ij}(r_{ij})})\rangle_{ij}]_{m\times n},$$
$$i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n. \tag{19}$$

其中 $\xi_{ij}(r_{ij})$ 的前景期望价值函数为

$$\nu(\Delta\mathrm{E}_{\xi_{ij}(r_{ij})})=\begin{cases}(\Delta\mathrm{E}_{\xi_{ij}(r_{ij})})^{\alpha},\ \Delta\mathrm{E}_{\xi_{ij}(r_{ij})}\geqslant 0;\\ -\sigma(-\Delta\mathrm{E}_{\xi_{ij}(r_{ij})})^{\beta},\ \Delta\mathrm{E}_{\xi_{ij}(r_{ij})}<0.\end{cases} \tag{20}$$

而 $\xi_{ij}(r_{ij})$ 的前景方差价值函数为

$$\nu(\Delta\mathrm{Var}_{\xi_{ij}(r_{ij})})=$$
$$\begin{cases}(\Delta\mathrm{Var}_{\xi_{ij}(r_{ij})})^{\alpha},\ \Delta\mathrm{Var}_{\xi_{ij}(r_{ij})}\geqslant 0;\\ -\sigma(-\Delta\mathrm{Var}_{\xi_{ij}(r_{ij})})^{\beta},\ \Delta\mathrm{Var}_{\xi_{ij}(r_{ij})}<0.\end{cases} \tag{21}$$

一般地, 参数 σ, α 和 β 依据决策问题所涉及的实际环境而定.

Step 5　确定属性权重有多种方式, 本文的核心思

想在于给出多属性决策方式. 考虑后续算例中与其他论文决策方法有效性对比说明的便利, 本文采用文献[19]所提出的灰色系统理论求解属性权重向量 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_j,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$. 由于前景M-V决策矩阵为一个二元决策矩阵, 需要对灰色系统理论的应用做一些改进. 为适应二元决策矩阵分析, 定义下式为关于 $\Delta\mathrm{E}_{\xi_{ij}(r_{ij})}$ 的边际前景M-V决策矩阵:

$$\mathrm{PEV}^{\Delta\mathrm{E}_{\xi_{ij}(r_{ij})}}=[\nu(\Delta\mathrm{E}_{\xi_{ij}(r_{ij})})]_{m\times n},$$
$$i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n. \tag{22}$$

定义关于 $\Delta\mathrm{Var}_{\xi_{ij}(r_{ij})}$ 的边际前景M-V决策矩阵为

$$\mathrm{PEV}^{\Delta\mathrm{Var}_{\xi_{ij}(r_{ij})}}=[\nu(\Delta\mathrm{Var}_{\xi_{ij}(r_{ij})})]_{m\times n},$$
$$i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n. \tag{23}$$

分别计算

$$\overline{\mathrm{PEV}}_i^{\Delta\mathrm{E}_{\xi_{ij}(r_{ij})}}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\nu(\Delta\mathrm{E}_{\xi_{ij}(r_{ij})}),$$
$$i=1,2,\cdots,m,$$
$$\overline{\mathrm{PEV}}_i^{\Delta\mathrm{Var}_{\xi_{ij}(r_{ij})}}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\nu(\Delta\mathrm{Var}_{\xi_{ij}(r_{ij})}),$$
$$i=1,2,\cdots,m,$$

则属性 C_j 关于 $\Delta\mathrm{E}_{\xi_{ij}(r_{ij})}$ 的边际权重为

$$\omega_j^{\Delta\mathrm{E}_{\xi_{ij}(r_{ij})}}=\frac{1-\dfrac{1}{m}\Big[\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\big(\eta_{ij}^{\Delta\mathrm{E}_{\xi_{ij}(r_{ij})}}\big)^{q}\Big]^{\frac{1}{q}}}{n-\dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\Big[\sum_{i=1}^{m}\big(\eta_{ij}^{\Delta\mathrm{E}_{\xi_{ij}(r_{ij})}}\big)^{q}\Big]^{\frac{1}{q}}},$$
$$i=1,2,\cdots,m. \tag{24}$$

其中边际灰色均值关联度为

$$\eta_{ij}^{\Delta\mathrm{E}_{\xi_{ij}(r_{ij})}}=$$
$$\frac{\min\limits_i\Big|\mathrm{PEV}_{ij}^{\Delta\mathrm{E}_{\xi_{ij}(r_{ij})}}-\overline{\mathrm{PEV}}_i^{\Delta\mathrm{E}_{\xi_{ij}(r_{ij})}}\Big|+}{\Big|\mathrm{PEV}_{ij}^{\Delta\mathrm{E}_{\xi_{ij}(r_{ij})}}-\overline{\mathrm{PEV}}_i^{\Delta\mathrm{E}_{\xi_{ij}(r_{ij})}}\Big|+}\rightarrow$$
$$\leftarrow\frac{\rho\max\limits_i\Big|\mathrm{PEV}_{ij}^{\Delta\mathrm{E}_{\xi_{ij}(r_{ij})}}-\overline{\mathrm{PEV}}_i^{\Delta\mathrm{E}_{\xi_{ij}(r_{ij})}}\Big|}{\rho\max\limits_i\Big|\mathrm{PEV}_{ij}^{\Delta\mathrm{E}_{\xi_{ij}(r_{ij})}}-\overline{\mathrm{PEV}}_i^{\Delta\mathrm{E}_{\xi_{ij}(r_{ij})}}\Big|}. \tag{25}$$

同理可得, 属性 C_j 关于 $\Delta\mathrm{Var}_{\xi_{ij}(r_{ij})}$ 的边际权重为

$$\omega_j^{\Delta\mathrm{Var}_{\xi_{ij}(r_{ij})}}=\frac{1-\dfrac{1}{m}\Big[\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\big(\eta_{ij}^{\Delta\mathrm{Var}_{\xi_{ij}(r_{ij})}}\big)^{q}\Big]^{\frac{1}{q}}}{n-\dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\Big[\sum_{i=1}^{m}\big(\eta_{ij}^{\Delta\mathrm{Var}_{\xi_{ij}(r_{ij})}}\big)^{q}\Big]^{\frac{1}{q}}},$$
$$i=1,2,\cdots,m. \tag{26}$$

其中边际灰色均值关联度为

$$\eta_{ij}^{\Delta\mathrm{Var}_{\xi_{ij}(r_{ij})}}=$$
$$\frac{\min\limits_i\Big|\mathrm{PEV}_{ij}^{\Delta\mathrm{Var}_{\xi_{ij}(r_{ij})}}-\overline{\mathrm{PEV}}_i^{\Delta\mathrm{Var}_{\xi_{ij}(r_{ij})}}\Big|+}{\Big|\mathrm{PEV}_{ij}^{\Delta\mathrm{Var}_{\xi_{ij}(r_{ij})}}-\overline{\mathrm{PEV}}_i^{\Delta\mathrm{Var}_{\xi_{ij}(r_{ij})}}\Big|+}\rightarrow$$
$$\leftarrow\frac{\rho\max\limits_i\Big|\mathrm{PEV}_{ij}^{\Delta\mathrm{Var}_{\xi_{ij}(r_{ij})}}-\overline{\mathrm{PEV}}_i^{\Delta\mathrm{Var}_{\xi_{ij}(r_{ij})}}\Big|}{\rho\max\limits_i\Big|\mathrm{PEV}_{ij}^{\Delta\mathrm{Var}_{\xi_{ij}(r_{ij})}}-\overline{\mathrm{PEV}}_i^{\Delta\mathrm{Var}_{\xi_{ij}(r_{ij})}}\Big|},$$
$$i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n. \tag{27}$$

一般地, 取分辨系数 $\rho=0.5$, 欧氏距离系数 $q=2$. 由此, 利用加权平均可得属性 C_j 的权重为

$$\omega_j=a\omega_j^{\Delta\mathrm{E}_{\xi_{ij}(r_{ij})}}+b\omega_j^{\Delta\mathrm{Var}_{\xi_{ij}(r_{ij})}},$$
$$a,b\in[0,1],\ j=1,2,\cdots,n, \tag{28}$$

其中 $a=b=0.5$.

Step 6 利用Step 5所确定的属性权重向量 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$, 获得综合的前景M-V决策矩阵

$$\mathrm{DPEV}=$$
$$\Big[\Big\langle\sum_{j=1}^{n}W_j(\Delta\mathrm{E}_{\xi_{1j}(r_{ij})}),\sum_{j=1}^{n}W_j(\Delta\mathrm{Var}_{\xi_{1j}(r_{1j})})\Big\rangle,\cdots,$$
$$\Big\langle\sum_{j=1}^{n}W_j(\Delta\mathrm{E}_{\xi_{mj}(r_{mj})}),\sum_{j=1}^{n}W_j(\Delta\mathrm{Var}_{\xi_{mj}(r_{mj})})\Big\rangle\Big]^{\mathrm{T}},$$
$$j=1,2,\cdots,n. \tag{29}$$

其中: $\Big\langle\sum\limits_{j=1}^{n}W_j(\Delta\mathrm{E}_{\xi_{ij}(r_{ij})}),\ \sum\limits_{j=1}^{n}W_j(\Delta\mathrm{Var}_{\xi_{ij}(r_{ij})})\Big\rangle$ 为对应于方案 A_i 的综合前景值, $i=1,2,\cdots,m$. 依据定义12和定义13即可确定 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 方案集中不同方案的前景序关系, 进而获取方案排序, 选取最优方案.

4 案例分析

考虑某大型跨国企业部门管理运营绩效评估问题. 假设现有4个部门 $A=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$, 评估属性分别为制度执行力 (C_1)、建设成效度 (C_2)、计划完成率 (C_3)、管理创新性 (C_4). 决策者基于信息复杂性利用正态三角模糊随机变量表征评价认可度, 且任一三角模糊点的精确评价值介于[0,1], 试确定最佳部门.

利用本文所提出的方法解决上述问题, 具体步骤如下.

Step 1 基于决策者正态三角模糊变量评估方式, 要求决策者在决策周期内多次给出各部门的各属性评估值信息样本, 进而可利用样本推断正态总体的参数取值, 对其三角模糊化即可构建正态三角模糊随机决策矩阵如下:

$$X=\begin{bmatrix}\xi_{11}(r_{11}) & \xi_{12}(r_{12}) & \xi_{13}(r_{13}) & \xi_{14}(r_{14})\\ \xi_{21}(r_{21}) & \xi_{22}(r_{22}) & \xi_{23}(r_{23}) & \xi_{24}(r_{24})\\ \xi_{31}(r_{31}) & \xi_{32}(r_{32}) & \xi_{33}(r_{33}) & \xi_{34}(r_{34})\\ \xi_{41}(r_{41}) & \xi_{42}(r_{42}) & \xi_{43}(r_{43}) & \xi_{44}(r_{44})\end{bmatrix}.$$

其中: $\xi_{ij}(r_{ij})=[X_{ij}(r_{ij})-\alpha_{ij}, X_{ij}(r_{ij}), X_{ij}(r_{ij})+\beta_{ij}]$, $i=1,2,3,4$, $j=1,2,3,4$, $X_{ij}(r_{ij})$ 服从正态分布 $N(\mu_{ij},{\sigma_{ij}}^2)$, μ_{ij}, ${\sigma_{ij}}^2$ 及对应的 α_{ij}, β_{ij} 取值参见表 1.

表 1 决策矩阵变量 $\xi_{ij}(r_{ij})$ 参数取值

评估值	三角模糊变量参数取值			
	μ_{ij}	${\sigma_{ij}}^2$	α_{ij}	β_{ij}
$\xi_{11}(r_{11})$	0.65	0.01	0.21	0.15
$\xi_{12}(r_{12})$	0.54	0.04	0.17	0.09
$\xi_{13}(r_{13})$	0.74	0.03	0.12	0.23
$\xi_{14}(r_{14})$	0.85	0.01	0.16	0.12
$\xi_{21}(r_{21})$	0.82	0.02	0.07	0.11
$\xi_{22}(r_{22})$	0.72	0.01	0.15	0.15
$\xi_{23}(r_{23})$	0.69	0.02	0.26	0.22
$\xi_{24}(r_{24})$	0.77	0.04	0.09	0.11
$\xi_{31}(r_{31})$	0.87	0.03	0.14	0.05
$\xi_{32}(r_{32})$	0.67	0.02	0.13	0.13
$\xi_{33}(r_{33})$	0.75	0.03	0.08	0.16
$\xi_{34}(r_{34})$	0.59	0.04	0.06	0.15
$\xi_{41}(r_{41})$	0.79	0.02	0.12	0.08
$\xi_{42}(r_{42})$	0.83	0.01	0.14	0.07
$\xi_{43}(r_{43})$	0.74	0.03	0.11	0.09
$\xi_{44}(r_{44})$	0.69	0.03	0.16	0.14

Step 2 由定义 7、定义 8 及例 2 可分别计算得出 $\xi_{ij}(r_{ij})$, 期望 $\mathrm{E}[\xi_{ij}(r_{ij})]$ 和方差 $\mathrm{Var}[\xi_{ij}(r_{ij})]$ $(i=1,2,3,\ j=1,2,3)$, 从而构建如下 M-V 决策矩阵:

$$\mathrm{EV}=\begin{bmatrix}\langle 0.635, 0.0191\rangle & \langle 0.520, 0.0454\rangle\\ \langle 0.830, 0.0226\rangle & \langle 0.720, 0.0165\rangle\\ \langle 0.848, 0.0330\rangle & \langle 0.670, 0.0251\rangle\\ \langle 0.780, 0.0231\rangle & \langle 0.813, 0.0134\rangle\end{bmatrix.}\rightarrow$$

$$\leftarrow\begin{matrix}\langle 0.768, 0.0395\rangle & \langle 0.840, 0.0157\rangle\\ \langle 0.680, 0.0363\rangle & \langle 0.775, 0.0432\rangle\\ \langle 0.770, 0.0346\rangle & \langle 0.613, 0.0437\rangle\\ \langle 0.735, 0.0332\rangle & \langle 0.685, 0.0369\rangle\end{matrix}\Bigg].$$

Step 3 考虑决策者偏好等信息, 分别针对属性计划完成率 (C_1)、制度执行力 (C_2)、建设成效度 (C_3) 及管理创新性 (C_4) 设定属性参考点, 其对应的结果分别为 $\langle 0.640,\ 0.0211\rangle$, $\langle 0.721,\ 0.0252\rangle$, $\langle 0.675,\ 0.0335\rangle$, $\langle 0.755,\ 0.0256\rangle$.

Step 4 以参考文献 [23] 中的相关前景参数 $\sigma=2.25$, $\alpha=0.89$ 和 $\beta=0.92$ 为基础, 依据定义 11, 利用属性参考点并通过 Matlab 运算得到前景价值函数, 将 M-V 决策矩阵转化为如下前景 M-V 决策矩阵:

$$\mathrm{PEV}=\Bigg[\begin{matrix}\langle -0.017, -0.0074\rangle & \langle -0.320, 0.0366\rangle\\ \langle 0.139, -0.0094\rangle & \langle -0.004, 0.0147\rangle\\ \langle 0.210, -0.0021\rangle & \langle -0.017, -0.0277\rangle\\ \langle 0.038, -0.0091\rangle & \langle 0.078, -0.0391\rangle\end{matrix}\rightarrow$$

$$\leftarrow\begin{matrix}\langle 0.160, 0.0286\rangle & \langle 0.239, -0.0184\rangle\\ \langle -0.119, 0.0182\rangle & \langle 0.074, 0.0280\rangle\\ \langle 0.123, 0.0023\rangle & \langle -0.177, 0.0169\rangle\\ \langle -0.062, 0.0130\rangle & \langle -0.195, 0.0185\rangle\end{matrix}\Bigg].$$

Step 5 利用本文所提出的适用于二元决策矩阵分析的改进灰色系统理论模型, 确定关于 $\Delta\mathrm{E}_{\xi_{ij}(r_{ij})}$ 的边际前景 M-V 决策矩阵

$$\mathrm{PEV}^{\Delta\mathrm{E}_{\xi_{ij}(r_{ij})}}=\begin{bmatrix}-0.017 & -0.320 & 0.160 & 0.239\\ 0.139 & -0.004 & -0.119 & 0.074\\ 0.210 & -0.017 & 0.123 & -0.177\\ 0.038 & 0.078 & -0.062 & -0.195\end{bmatrix},$$

确定关于 $\Delta\mathrm{Var}_{\xi_{ij}(r_{ij})}$ 的边际前景 M-V 决策矩阵

$$\mathrm{PEV}^{\Delta\mathrm{Var}_{\xi_{ij}(r_{ij})}}=\begin{bmatrix}-0.0074 & 0.0366 & 0.0286 & -0.0184\\ -0.0094 & 0.0147 & 0.0182 & 0.0280\\ -0.0021 & -0.0277 & 0.0023 & 0.0169\\ -0.0091 & -0.0391 & 0.0130 & 0.0185\end{bmatrix}.$$

依据式 (24) ~ (27), 可得

$$\omega_j^{\Delta\mathrm{E}_{\xi_{ij}(r_{ij})}}=(0.2571,\ 0.2474,\ 0.2437,\ 0.2518),$$

$$\omega_j^{\Delta\mathrm{Var}_{\xi_{ij}(r_{ij})}}=(0.2233,\ 0.2557,\ 0.2617,\ 0.2593).$$

进一步, 依据式 (28), 可得

$$\omega_j=(0.2402,\ 0.2516,\ 0.2527,\ 0.2556).$$

Step 6 利用 Step 5 所确定的属性权重向量 $\omega_j=(0.2402,\ 0.2515,\ 0.2527,\ 0.2556)$, 可获得综合的前景 M-V 决策矩阵

$$\mathrm{DPEV}=$$

$$[\langle 0.0937, -0.0070\rangle\ \ \langle -0.0622, -0.0045\rangle\rightarrow$$

$$\leftarrow\langle 0.0237, 0.0154\rangle\ \ \langle -0.0186, 0.0436\rangle]^{\mathrm{T}}.$$

依据定义 12 及定义 13, 即可确定 $A=\{A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4\}$ 方案集中不同方案的前景序关系, 获得其排序为

$$A_1\succ A_3\succ A_4\succ A_2.$$

由此, 确定 A_1 为最佳部门.

定理 1 验证了本文方法与文献 [24] 在模糊随机变量服从正态分布情形下的一致性, 将基于前景随机占优准则的随机多属性决策方法应用于本文案例. 限

于篇幅, 本文仅给出排序结果为 $A_1 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_4$. 可以看出, 排序结果有所区别, 主要原因在于2种方法在处理过程上存在较大差异. 文献[24]首先利用模糊随机变量的概率分布信息, 依据前景随机占优准则确立两两方案之间的随机占优关系, 在给定属性权重的基础上, 采用PROMETHEE-II方法获取方案的排序结果. 由于属性权重的确定并未充分利用既有的信息, 可能造成后续处理的精确度损失. 而本文方法则首先将随机评估信息转化为具备统计特征的期望和方差二元决策矩阵, 并通过改进灰色系统理论模型求解属性权重信息, 在定义前景效应而获取前景决策矩阵基础上, 集结得到综合前景决策信息, 而后依据本文所定义的前景序关系获取方案排序. 此外, 在计算前景价值函数的过程中, 参数的选择不同也产生了一定的影响.

5 结 论

对于庞大而复杂系统的决策问题, 专家评估值往往以模糊随机变量的形式予以表征较为合理. 考虑实际决策过程受到大量外界微小且独立的随机因素影响, 将属性值设定为服从正态分布的三角模糊随机变量. 本文通过前景理论与M-V准则的整合拓展, 定义了基于PM-VR的前景序关系, 针对属性权重未知、属性值为正态三角模糊随机变量的多属性决策问题, 将决策者有限理性行为因素引入模糊随机多属性决策中, 提出了基于前景M-V准则的正态三角模糊随机多属性决策方法. 该方法利用正态三角模糊随机变量的期望和方差的计算, 简化了随机信息在后续处理过程中的复杂性, 并通过改进灰色系统理论模型获取属性权重信息, 避免了主观设定属性权重带来的偏差. 此外, 通过定义完备的前景序关系, 克服了传统M-V准则在模糊随机变量的期望和方差一致性波动下无法判定相对重要性的缺陷. 本文方法思路清晰, 概念明确, 计算过程简捷, 具有较大的应用价值, 案例的可行性分析为应用于不同领域开拓了崭新的思路. 后续研究将着重于属性模糊随机评估值在不同分布下的统计特征, 以进一步完善基于前景序关系判定的模糊随机多属性决策问题.

参考文献(References)

[1] Bellman R E, Zadeh L A. Decision-making in a fuzzy environment[J]. Management Sciences, 1970, 17(4): 141-164.

[2] Xu Z S, Xia M M. Identifying and eliminating dominated alternatives in multi-attribute decision making with intuitionistic fuzzy information[J]. Applied Soft Computing, 2012, 12(4): 1451-1456.

[3] 徐泽水. 不确定多属性决策方法及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 75-96.
(Xu Z S. Uncertain multiple attribute decision making: Methods and applications[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004: 75-96.)

[4] 姜广田, 樊治平, 刘洋, 等. 一种具有正态随机变量的多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2009, 24(8): 1187-1197.
(Jiang G T, Fan Z P, Liu Y, et al. Method for multiple attribute decision making with normal random variables[J]. Control and Decision, 2009, 24(8): 1187-1191.)

[5] Lahdelma R, Salminen P. SMAA-2: Stochastic multicriteria acceptability analysis for group decision making[J]. Operational Research, 2001, 49(3): 444-454.

[6] Lahdelma R, Makkonen S, Salminen P. Multivariate Gaussian criteria in SMAA[J]. European J of Operational Research, 2006, 170(3): 957-970.

[7] 刘洋, 樊治平, 张尧. 一种考虑属性具有关联性的正态随机多属性决策方法[J]. 运筹与管理, 2011, 20(5): 20-26.
(Liu Y, Fan Z P, Zhang Y. A method for normal stochastic multiple attribute decision making considering interactions among attributes[J]. Operations Research and Management Science, 2011, 20(5): 20-26.)

[8] Chen T Y, Chang C H, Rachel Lu J F. The extended QUALIFLEX method for multiple criteria decision analysis based on interval type-2 fuzzy sets and applications to medical decision making[J]. European J of Operational Research, 2013, 226(3): 615-625.

[9] 陈希孺. 概率论与数理统计[M]. 北京: 科学出版社, 2000: 245-247.
(Chen X R. Probability and statistics[M]. Beijing: Science Press, 2000: 245-247.)

[10] Nowak M. Aspiration level approach in stochastic MCDM problems[J]. European J of Operational Research, 2007, 177(3): 1626-1640.

[11] Nowak M. Preference and vote thresholds in multcriteria analysis based on stochastic dominance[J]. European J of Operational Research, 2004, 158(2): 339-350.

[12] Fan Z P, Liu Y, Feng B. A method for stochastic multiple criteria decision making based on pairwise comparisons of alternatives with random evaluations[J]. European J of Operational Research, 2010, 207(2): 906-915.

[13] Zhang Y, Fan Z P, Liu Y. A method based on stochastic dominance degrees for stochastic multiple criteria decision making[J]. Computers & Industrial Engineering, 2010, 58(4): 544-552.

[14] Zaras K. Rough approximation of a preference relation by a multi-attribute dominance for determinist, stochastic and fuzzy decision problems[J]. European J of Operational Research, 2004, 159(1): 196-206.

[15] 徐玖平, 吴巍. 多属性决策的理论与方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006: 177-213.
(Xu J P, Wu W. Multiple attribute decision making theory and methods[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2006: 177-213.)
[16] Kahneman D, Tversky A. Prospect theory: An analysis of decision under risk[J]. Econometric, 1979, 47(2): 263-292.
[17] Tversky A, Kahneman D. Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty[J]. J of Risk and Uncertainty, 1992, 5(4): 297-323.
[18] Levy H, Wiener Z. Stochastic dominance and prospect dominance with subjective weighting function[J]. J of Risk and Uncertainty, 1998, 16(2): 142-163.
[19] 李鹏, 刘思峰, 朱建军. 基于前景理论的随机直觉模糊决策方法[J]. 控制与决策, 2012, 27(11): 1601-1606.
(Li P, Liu S F, Zhu J J. Intuitionistic fuzzy stochastic multi-criteria decision-making methods based on prospect theory[J]. Control and Decision, 2012, 27(11): 1601-1606.)
[20] Hu J H, Yang L. Dynamic stochastic multi-criteria decision making method based on cumulative prospect theory and set pair analysis[J]. Systems Engineering Procedia, 2011, 1(1): 432-439.
[21] 王坚强, 孙腾, 陈晓红. 基于前景理论的信息不完全的模糊多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2009, 24(8): 1198-1202.
(Wang J Q, Sun T, Chen X H. Multi-criteria fuzzy decision-making method based on prospect theory with incomplete information[J]. Control and Decision, 2009, 24(8): 1198-1202.)
[22] 樊治平, 陈发动, 张晓. 基于累积前景理论的混合型多属性决策方法[J]. 系统工程学报, 2012, 27(3): 295-301.
(Fan Z P, Chen F D, Zhang X. Method for hybrid multiple attribute decision making based on cumulative prospect theory[J]. J of Systems Engineering, 2012, 27(3): 295-301.)
[23] 樊治平, 刘洋, 沈荣鉴. 基于前景理论的突发事件应急响应的风险决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(5): 977-984.
(Fan Z P, Liu Y, Shen R J. Risk decision analysis method for emergency response based on prospect theory[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2012, 32(5): 977-984.)
[24] 张晓, 樊治平. 一种基于前景随机占优准则的随机多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2010, 25(12): 1875-1879.
(Zhang X, Fan Z P. Method for stochastic multiple attribute decision making based on prospect stochastic dominance rule[J]. Control and Decision, 2010, 25(12): 1875-1879.)
[25] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(4): 338-356.
[26] Zadeh L A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1978, 1(1): 3-28.
[27] Liu Y K, Liu B. Fuzzy random variables: A scalar expected value operator[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2003, 2(2):143-160.
[28] Liu B, Liu Y K. Expected value of fuzzy variable and fuzzy expected value models[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2002, 10(4): 445-450.
[29] Wang S M, Liu Y K, Watada J. Fuzzy random renewal process with queueing applications[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2009, 57(7): 1232-1248.
[30] González-Rodrígueza G, Blancob Á, Colubi A. Estimation of a simple linear regression model for fuzzy random variables[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2009, 160(3): 357-370.
[31] Colubi A, González-Rodríguez G. Triangular fuzzification of random variables and power of distribution tests: Empirical discussion[J]. Computational Statistics & Data Analysis, 2007, 51(9): 4742-4750.
[32] Hao F F, Liu Y K, Wang S. The variance formulas for triangular fuzzy random variables[J]. Proc of the Seventh Int Conf on Machine Learning and Cybernetics, 2008, 1: 612-617.
[33] 张维, 张海峰, 张永杰, 等. 基于前景理论的波动不对称性[J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(3): 458-465.
(Zhang W, Zhang H F, Zhang Y J, et al. Volatility asymmetry based on prospect theory[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2012, 32(3): 458-465.)
[34] Markowitz H M. Portfolio selection[J]. J of Finance, 1952, 7(1): 77-91.
[35] Markowitz H M. Mean-variance approximation to geometric mean[J]. Annals of Financial Economics, 2012, 7(1): 1-30.

(责任编辑: 闫 妍)