

耗散系统中原子与场熵交换的条件

岳转林, 闫学群

(天津工业大学 理学院, 天津 300387)

摘要: 研究了耗散场腔中, 二能级原子与单模辐射场在相互作用过程中熵的关联情况. 结果表明: 原子与耗散场之间存在熵交换现象, 更重要的是证明了它们之间的熵交换需要满足一定的条件.

关键词: 耗散系统; 耗散腔; 原子与场; 熵交换

中图分类号: O413.1

文献标志码: A

文章编号: 1671-024X(2013)06-0081-04

Condition for entropy exchange between atom and field in damped system

YUE Zhuan-lin, YAN Xue-qun

(School of Science, Tianjin Polytechnic University, Tianjin 300387, China)

Abstract: The entropy exchange between a two-level atom and a single-mode radiation field is studied in a damped system. The results show that there is an entropy exchange phenomenon between atom and field. Especially, it is proved that there is a condition for entropy exchange between atom and damped field.

Key words: damped system; damped field; atom and field; entropy exchange

熵交换可以说明量子系统由纯态变为混合态时损失的有效信息. Jaynes-Cummings(J-C)模型是一种描述原子与场相互作用理想量子动力学模型^[1-3]. 因而, 该模型中原子与场相关联的熵演化现象已经成为量子信息学的研究热点^[4-8]. Phoenix等^[9]研究了纯态下原子与场相关联的熵演化现象, 并证明原子与场两子系统的约化熵在演化过程中始终相等. 之后, 很多科学家对原子与场处于混合态时的状况进行了深入研究. Boukobza等^[10]发现原子与场的初态均处于混合态时, 它们的约化熵不一定相等, 并在一定条件下发生熵交换, 两者之间出现反相关联的现象^[10]. 文献[11]研究了非线性强度相关耦合的J-C模型中的熵关联现象, 结果发现熵交换只与原子和场的初始态选择有关, 与场的非线性量和非线性耦合系数均无关. 然而这些研究忽略了场腔的耗散对子系统熵交换的影响^[12]. 在实际情况下, 原子与场相互作用系统的熵在演化过程中总会随着场的能量损耗而改变. 因此, 研究耗散腔中原子与场的熵交换更有实际意义^[13-15]. 本文考虑了场腔耗散的影响, 利用解线性微分方程组的方法, 对共振情况下的二能级原子和耗散场相互作用体系

的刘维方程进行精确求解, 计算原子与耗散场约化熵, 并利用数值结果讨论原子与耗散场的熵交换条件.

1 理论计算

量子系统的熵定义为:

$$S = -\text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}) \quad (1)$$

式中: $\hat{\rho}$ 为给定量子系统的密度算符. 令玻尔兹曼常数为 1, 密度算符 $\hat{\rho}$ 可以写成矩阵形式, 容易计算出它的本征谱为 $\{\lambda_i\}$. 因此熵可以写成:

$$S = -\sum_i \lambda_i \ln \lambda_i \quad (2)$$

为了研究原子与场之间的熵关联, 必须计算出原子和场的约化熵. 以下标记两个子系统为 **a** 和 **f**, 两个子系统总的密度算符为 $\hat{\rho}$, 子系统的密度算符为 $\hat{\rho}_a$ 和 $\hat{\rho}_f$, 子系统的密度算符由下式给出:

$$\hat{\rho}_{a(f)} = \text{Tr}_{f(a)} \hat{\rho} \quad (3)$$

因此两个子系统的熵分别为:

收稿日期: 2012-05-20 基金项目: 国家自然科学基金青年基金项目(51108314)

第一作者: 岳转林(1986—), 女, 硕士研究生.

通信作者: 闫学群(1963—), 男, 博士, 教授, 硕士生导师. E-mail: xqyan867@tom.com

$$S(\hat{\rho}_{a,f}) = -\text{Tr}_{a,f}(\hat{\rho}_{a,f} \ln \hat{\rho}_{a,f}) \quad (4)$$

二能级原子置于单模场中,在偶极作用和旋波近似下的系统哈密顿量为(这里令 $\hbar = 1$)^[6]:

$$H = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + \kappa(\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- + \hat{a} \hat{\sigma}_+) \quad (5)$$

式中: ω 和 ω_0 分别为单模场和原子频率; \hat{a}^\dagger 和 \hat{a} 分别为单模场的产生和湮灭算符; $\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g|$, $\hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e|$, $\hat{\sigma}_z$ 、 $\hat{\sigma}_-$ 为原子的赝自旋算符; $|e\rangle\langle e|$ 、 $|g\rangle\langle g|$,这里 $|g\rangle$ 、 $|e\rangle$ 分别代表原子的基态和激发态。

假设场的初态为单模热态:

$$\hat{\rho}_f(0) = \sum P_n |n\rangle\langle n| \quad (6)$$

式中: $P_n = [m^n / (m+1)^{n+1}]$; m 代表腔中的平均光子数。

设原子的初始态为混合态:

$$\hat{\rho}_a(0) = P_e |e\rangle\langle e| + P_g |g\rangle\langle g| \quad (7)$$

式中: $0 \leq P_e \leq 1$,且 $P_g = 1 - P_e$ 是原子混合态的参数, $P_e = 0$ 代表原子处于基态, $P_e = 1$ 代表原子处于激发态。

那么系统的初始态可以定义为:

$$\hat{\rho}_{af}(0) = \hat{\rho}_f(0) \otimes \hat{\rho}_a(0) = P_e \sum P_n |ne\rangle\langle ne| + P_g \sum P_n |ng\rangle\langle ng| \quad (8)$$

考虑下列含有耗散项的演化方程:

$$\frac{d\rho_{af}(t)}{dt} = -i[H(t), \rho_{af}(t)] + \frac{\gamma}{2} [\sigma_z \rho(t) \sigma_z - \rho(t)] \quad (9)$$

式中: γ 为耗散系数.将方程(5)、(8)代入方程(9)中,可以计算得到系统的密度算符的表达式(为简单起见而又不失一般性,令 $\omega - \omega_0 = 0$):

$$\hat{\rho}_{af}(t) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$x_1 = \frac{1}{2} P_e \cdot P_n + \frac{1}{2} P_g \cdot P_{n+1} + \frac{1}{4F \cdot E} (B - A - C + D) -$$

$$\frac{1}{4G \cdot E} (B - A + C - D)$$

$$x_2 = \frac{1}{4k \sqrt{n+1}} \cdot i \cdot \left[\frac{1}{4F} (B - A - C + D) + \frac{1}{4G} (B - A + C -$$

$$D) + \frac{\gamma}{4F \cdot E} (B - A - C + D) - \frac{\gamma}{4G \cdot E} (B - A + C - D) \right]$$

$$x_3 = -\frac{1}{4k \sqrt{n+1}} \cdot i \cdot \left[\frac{1}{4F} (B - A - C + D) + \frac{1}{4G} (B - A +$$

$$C - D) + \frac{\gamma}{4F \cdot E} (B - A - C + D) - \frac{\gamma}{4G \cdot E} (B - A + C - D) \right]$$

$$x_4 = \frac{1}{2} P_g \cdot P_{n+1} + \frac{1}{2} P_e \cdot P_n - \frac{1}{4F \cdot E} (B - A - C + D) +$$

$$\frac{1}{4G \cdot E} (B - A + C - D) \quad (11)$$

其中,

$$A = \gamma \cdot P_e \cdot P_n, B = \gamma \cdot P_g \cdot P_{n+1}$$

$$C = P_g \cdot P_{n+1} \cdot \sqrt{\gamma^2 - 16\kappa^2(n+1)}$$

$$D = P_e \cdot P_n \cdot \sqrt{\gamma^2 - 16\kappa^2(n+1)}$$

$$E = \sqrt{\gamma^2 - 16\kappa^2(n+1)} \quad (12)$$

$$F = \exp\left(\frac{\gamma t}{2} + \frac{\sqrt{\gamma^2 - 16\kappa^2(n+1)}}{2} \cdot t\right)$$

$$G = \exp\left(\frac{\gamma t}{2} - \frac{\sqrt{\gamma^2 - 16\kappa^2(n+1)}}{2} \cdot t\right)$$

原子和场的密度算符的表达式为:

$$\hat{\rho}_f(t) = \text{Tr}_a \hat{\rho}_{af}(t) = \sum \lambda_f(t) |n\rangle\langle n| \quad (13)$$

$$\hat{\rho}_a(t) = \text{Tr}_f \hat{\rho}_{af}(t) = \lambda_1(t) |e\rangle\langle e| + \lambda_2(t) |g\rangle\langle g| \quad (14)$$

其中 $\lambda_1(t)$ 、 $\lambda_2(t)$ 、 $\lambda_f(t)$ 是原子和场的密度算符的本征值.由(10)、(11)、(12)、(13)、(14)式即可求得原子和场密度算符的本征值分别为:

$$\lambda_1(t) = P_e \cdot \left[\frac{1}{2} \sum P_n - \frac{1}{4F \cdot E} \sum P_n \cdot (\gamma - E) +$$

$$\frac{1}{4G \cdot E} \sum P_n \cdot (\gamma + E) \right] + P_g \cdot \left[\frac{1}{2} \sum P_{n+1} +$$

$$\frac{1}{4F \cdot E} \sum P_{n+1} \cdot (\gamma - E) - \frac{1}{4G \cdot E} \sum P_{n+1} \cdot$$

$$(\gamma + E) \right] \quad (15)$$

$$\lambda_2(t) = P_e \cdot \left[\frac{1}{2} \sum P_{n-1} + \frac{1}{4F_1 \cdot E_1} \sum P_n \cdot (\gamma - E_1) -$$

$$\frac{1}{4G_1 \cdot E_1} \sum P_n \cdot (\gamma + E_1) \right] + P_g \cdot \left[\frac{1}{2} \sum P_n -$$

$$\frac{1}{4F_1 \cdot E_1} \sum P_n \cdot (\gamma - E_1) + \frac{1}{4G_1 \cdot E_1} \sum P_n \cdot$$

$$(\gamma + E_1) \right] \quad (16)$$

$$\sum \lambda_f(t) = C(t) + D(t) \quad (17)$$

这里,

$$C(t) = P_e \cdot \left[\frac{1}{2} P_n - \frac{1}{4F \cdot E} P_n \cdot (\gamma - E) + \frac{1}{4G \cdot E} P_n \cdot$$

$$(\gamma + E) + \frac{1}{2} P_{n-1} + \frac{1}{4F_1 \cdot E_1} P_{n-1} \cdot (\gamma - E_1) -$$

$$\frac{1}{4G_1 \cdot E_1} P_{n-1} \cdot (\gamma + E_1) \right] \quad (18)$$

$$D(t) = P_g \cdot \left[\frac{1}{2} P_{n+1} + \frac{1}{4F \cdot E} P_{n+1} \cdot (\gamma - E) -$$

$$\frac{1}{4G \cdot E} P_{n+1} \cdot (\gamma + E) + \frac{1}{2} P_n - \frac{1}{4F_1 \cdot E_1} P_n \cdot$$

$$(\gamma - E_1) + \frac{1}{4G_1 \cdot E_1} P_n \cdot (\gamma + E_1) \right] \quad (19)$$

其中,

$$E_1 = \sqrt{\gamma^2 - 16\kappa^2 n},$$

$$F_1 = \exp\left(\frac{\gamma t}{2} + \frac{\sqrt{\gamma^2 - 16\kappa^2 n}}{2} \cdot t\right),$$

$$G_1 = \exp\left(\frac{\gamma t}{2} - \frac{\sqrt{\gamma^2 - 16\kappa^2 n}}{2} \cdot t\right) \quad (20)$$

由(4)式可以得到原子与场的熵:

$$S_a(t) = -[\lambda_1(t) \ln \lambda_1(t) + \lambda_2(t) \ln \lambda_2(t)] \quad (21)$$

$$S_f(t) = -\sum \lambda_f(t) \ln \lambda_f(t) \quad (22)$$

由(20)、(21)式可得到原子与场的熵的数值结果:

$$\Delta S_f(t) = S_f(t) - S_f(0) \quad (23)$$

$$\Delta S_a(t) = S_a(t) - S_a(0) \quad (24)$$

2 数值分析

通过以上理论计算,分析现有模型中原子和场的熵变换的数值结果,进而证明在一定条件下,原子与场的熵交换是反相关联的.图 1 所示为当 $\kappa/\gamma = 20$ 时部分熵 ΔS 随时间比的变化趋势.

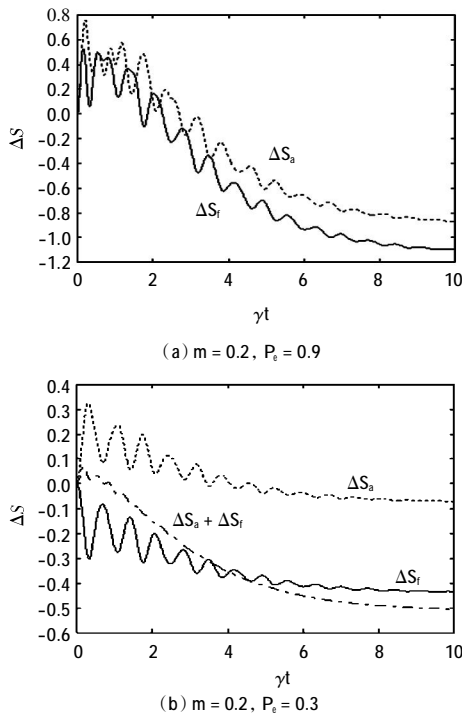


图 1 当 $\kappa/\gamma = 20$ 时部分熵 ΔS 随时间变化的趋势

Fig.1 Change of partial entropy ΔS with time for $\kappa/\gamma = 20$

图 1(a)所述为当场的初始态为弱激发热态 $m = 0.2$ 、原子的初始态为混合态 $P_e = 0.9$ 时原子与场的熵变化 $\Delta S(t)$ 随时间 γt 变化的趋势.可以看出,随时间 γt 的增加,原子与场的熵变化趋势逐渐不同,这与孤立系统中原子与场的熵变化是同时上升或者是同时下降的变化趋势有所不同.这是由于耗散场要向外界不断地辐射光子,致使场的熵增加得快一些.这与热

力学中的熵增加原理完全相符.图 1(b)中 $P_e = 0.2$, $m = 0.3$,可以清楚看到原子与场的熵变化呈现相反的变化趋势, $\Delta S_a + \Delta S_f$ 也呈振荡变化.当 P_e 和 m 取合适的值时, $\Delta S_a + \Delta S_f$ 的图像是一条光滑的曲线,变化方向与场约化熵的变化方向相同.

选择原子与场的熵交换呈现反相关联时对应的 P_e 和 m 的值,将这些值拟合成一条曲线,如图 2 所示.

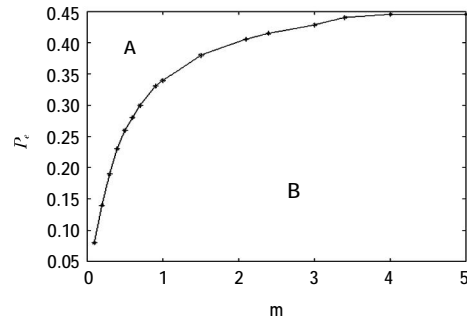


图 2 场的熵变化量大于原子的熵变化量

Fig.2 Field entropy change is larger than that atomic

图 2 中,固定 P_e 的值不变,减小 m 的值,场熵是负值,原子熵是正值,即这些点落到 A 区域, $\Delta S_f < 0$, $\Delta S_a > 0$;增大 m 的值,这些点落到 B 区域, $\Delta S_f > 0$, $\Delta S_a < 0$.图 2 曲线与无耗散项曲线上的点都代表原子与场的熵交换时对应的 P_e 和 m 的值,但这些点代表的物理意义有所不同.无耗散项曲线上的点表示原子与场熵变化量之和是相等的,即

$$S_a(t) - S_a(0) = -[S_f(t) - S_f(0)]$$

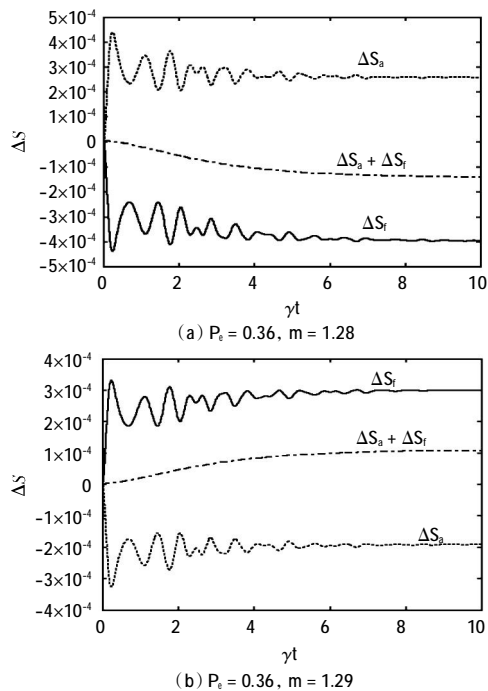
而本文讨论的有耗散项曲线上的点代表的是原子的熵变化量小于场的熵变化量.因为,本文的量子系统是开放系统,随着时间 t 的变化,腔中有光子向外辐射,场熵的增加要比原子熵的增加快一些,即

$$S_a(t) - S_a(0) < -[S_f(t) - S_f(0)]$$

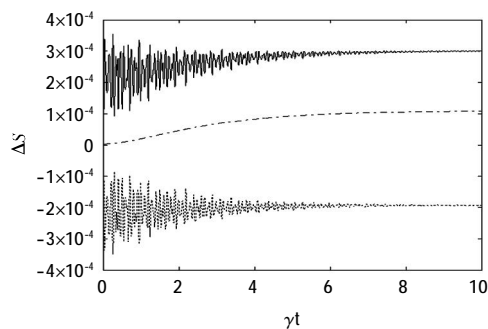
证明:为不失一般性,选择一点 $P_e = 0.36$,对应图 2 中曲线上的 m 值, m 值介于 1.28 和 1.29 之间.当 $\kappa/\gamma = 20$, $P_e = 0.36$ 时原子与场的熵交换呈反相关联的趋势,如图 3 所示.图 3(a)中当 $m = 1.28$ 时,场熵变化是负值($\Delta S_f < 0$),原子的熵变化为正值($\Delta S_a > 0$).图 3(b)中当 $m = 1.29$ 时,原子和场发生了熵交换,场的熵变化是正值($\Delta S_f > 0$),原子的熵变化是负值($\Delta S_a < 0$).同时可以发现当场的熵变化是正值时, $\Delta S_a + \Delta S_f > 0$,当场的熵变化是负值时, $\Delta S_a + \Delta S_f < 0$.也就是说,当 P_e 和 m 取不同的适当的值时,都会存在场熵变化量的绝对值总是大于原子熵变化量的绝对值.故而可以证明场熵的增加要比原子的熵增加得快一些,即

$$S_a(t) - S_a(0) < -[S_f(t) - S_f(0)].$$

用本文理论计算结果作图时发现,当 P_e 的值一

图 3 当 $\kappa/\gamma = 20$ 时原子和场的熵变化Fig.3 Partial entropy change for $\kappa/\gamma = 20$

定时,改变 m 的值,总会出现原子与场熵交换现象,但是当 P_e 值大于 0.45 时,原子与场熵的图像相交错乱. 改变 m 值,很难出现原子与场的熵交换的情况. 因此,可以得出这样一个结论:在耗散腔中,存在原子与场发生完全熵交换的条件为 $0 < P_e < 0.45, 0 < m < 5$. 耗散系数的大小不会影响原子和场的熵交换,只会增强原子与场熵的振荡频率,如图 4 所示.

图 4 $\kappa/\gamma = 1000$ 时, $P_e = 0.36, m = 1.29$ 原子与场的熵变化
Fig.4 Partial entropy change for atom in a mixed state ($P_e = 0.36$) and field in state $m = 1.29$, with $\kappa/\gamma = 1000$

3 结 论

利用 J-C 模型,研究了含有耗散项的二能级原子和单模场的熵变换,发现两者的熵变化存在正相关联和反相关联. 这与无耗散项的二能级原子和单模场的熵关联是一致的,只是在含有耗散项模型的演化过程中,原子与场的熵变化的幅度逐渐减小. 当原子与场

的熵交换时,无耗散项的原子与场的熵变化的总和是不变的;而在耗散腔的模型中,由于耗散腔不断向外辐射光子,由熵增加原理可知,场的熵变化要比原子的熵变化快一些. 通过数值计算发现原子与场的熵交换的条件为: $0 < P_e < 0.45, 0 < m < 5$, 在这个范围内,只要选择适当原子初态和场的平均光子数,就可以使得原子的熵和场的熵交换,即两者呈反相关的关系. 最后还说明了耗散系数不会影响原子与场的熵交换的条件,只会增加熵变化的振荡频率.

参考文献:

- [1] JAYNES E T, CUMMINGS F W. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam mase[J]. Proceedings of the IEEE, 1963, 51: 89-91.
- [2] LOUISU W H. Quantum Statistical Properties of Radiation [M]. New York: Wiley, 1990: 323-328.
- [3] CUMMINGS F W. Stimulated emission of radiation in a single mode [J]. Physical Review, 1965, 140: A1051.
- [4] CATANI J, BARONTINI G, RABATTI F, et al. Entropy exchange in a mixture of ultracold atoms[J]. Phys Rev Lett, 2009, 103: 140401.
- [5] HAROLD Metcalf. Entropy exchange in laser cooling [J]. Phys Rev A, 2008, 77: 061401.
- [6] APENKO S M. Monotonic entropy growth for a nonlinear model of random exchange[J]. Phys Rev E, 2013, 87: 024101.
- [7] PANDEY K C, EFTHIMIOS Kaxiras. Entropy calculation beyond the harmonic approximation: Application to diffusion by concerted exchange in Si[J]. Phys Rev Lett, 1991, 66: 915-918.
- [8] YANG Xiang, SHI Jie Xiong. Entropy exchange, coherent information and concurrence[J]. Phys Rev A, 2007, 76: 014306.
- [9] PHOENIX S J D, KNIGHT P L. Fluctuations and entropy in model of quantum optical resonance[J]. Ann Phys (New York), 1988, 186: 381-407.
- [10] BOUKOBNA E, TANNOR D J. Entropy exchange and entanglement in the Jaynes-Cummings model[J]. Phys Rev A, 2005, 71: 063821.
- [11] YAN Xue-qun, LÜ Yu-guang. A condition for entropy exchange between atom and field[J]. Communications in Theoretical Physics, 2012, 57: 209-213.
- [12] 胡要花. 运动原子多光子 J-C 模型中的熵变化与纠缠[J]. 物理学报, 2012, 61: 120302.
- [13] 张立辉, 李高翔, 彭金生. 相位损耗腔中大失谐 J-C 模型中熵的演化[J]. 光学学报, 2002, 22: 907-911.
- [14] 杨雄, 童朝阳, 向少华. 原子与腔场耗散系统中的线性熵的演化[J]. 物理学报, 2007, 56: 2148-2153.
- [15] 赖振讲, 赵合运, 张利, 等. 耗散腔中 A 型原子与光场 Raman 相互作用体系的线性熵[J]. 光子学报, 2010, 39: 734-738.
- [16] PENDELL R W, RAJAGOPAL A K. Revival and entanglement from initially entangled mixed states of a damped Jaynes-Cummings model[J]. Phys Rev A, 2003, 67: 062110.