第七章

7.1 李纳-维谢尔势　任意运动带电粒子的电磁场
7.2 带电粒子的辐射频谱
7.3 切伦柯夫辐射
7.4 带电粒子的电磁场对粒子的反作用
7.5 电磁波的散射和吸收　介质的色散

7.1 李纳-维谢尔势　任意运动带电粒子的电磁场

李纳-维谢尔势 任意运动带电粒子的电磁场　设电荷为e的粒子以任意速度$\boldsymbol{v}$相对于参考系Σ运动，由于推迟势只与粒子的速度$\boldsymbol{v}$有关而不依赖于其加速度，故可在粒子静止的参考系与Σ系之间，对四维势作洛伦兹变换，由此得李纳一维谢尔势

$$\boldsymbol{A}=\frac{e\boldsymbol{v}}{4\pi\varepsilon_0 c^2(r-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}/c)}\quad,\quad \varphi=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0(r-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}/c)} \tag{7.1}$$

其中$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t')$是粒子发出辐射时刻$t'$的速度，此时它的位矢为$\boldsymbol{x}_e(t')$，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_e(t')$是$t'$时刻粒子至场点$\boldsymbol{x}$的矢径，$r$是$t'$时刻粒子至场点的距离. 由于推迟效应，场点在$t=t'+r/c$时刻才观测到电磁场. 由

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\frac{\partial\varphi}{\partial t'}\nabla t'-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A}\big|_{t'=\text{常数}}+\nabla t'\times\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t'}=\boldsymbol{e_r}\times\boldsymbol{E}/c$$

得Σ系中观测到的电磁场为

$$\boldsymbol{E}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{(1-v^2/c^2)(\boldsymbol{e_r}-\boldsymbol{v}/c)}{r^2(1-\boldsymbol{e_r}\cdot\boldsymbol{v}/c)^3}+\frac{\boldsymbol{e_r}\times[(\boldsymbol{e_r}-\boldsymbol{v}/c)\times\dot{\boldsymbol{v}}]}{c^2r(1-\boldsymbol{e_r}\cdot\boldsymbol{v}/c)^3}\right\}$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e_r}\times\boldsymbol{E}/c \tag{7.2}$$

其中$\boldsymbol{e_r}$是$\boldsymbol{r}$方向的单位矢量. $\boldsymbol{E}$的第一项仅与粒子速度$\boldsymbol{v}$有关而与加速度$\dot{\boldsymbol{v}}$无关，且$\sim 1/r^2$，这项是和粒子不可分离的自场，主要存在于粒子附近；第二项与粒子的速度和加速度均有关，且$\sim 1/r$，这项是粒子的辐射场. 若粒子的加速度$\dot{\boldsymbol{v}}=0$，则不会发生辐射，只有粒子的自场.

辐射场的瞬时能流密度

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}&=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}/\mu_0=\varepsilon_0 cE^2\boldsymbol{e_r}\\&=\frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0c^3r^2}\frac{|\boldsymbol{e_r}\times[(\boldsymbol{e_r}-\boldsymbol{v}/c)\times\dot{\boldsymbol{v}}]|^2}{(1-\boldsymbol{e_r}\cdot\boldsymbol{v}/c)^6}\boldsymbol{e_r}\end{aligned} \tag{7.3}$$

以粒子辐射时刻t'表示的瞬时辐射功率为

$$P(t') = \oint \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{e_r} \frac{dt}{dt'} r^2 d\Omega$$
$$= \frac{e^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \oint \frac{\left|\boldsymbol{e_r} \times [(\boldsymbol{e_r} - \mathbf{v}/c) \times \dot{\mathbf{v}}]\right|^2}{(1 - \boldsymbol{e_r} \cdot \mathbf{v}/c)^5} d\Omega \tag{7.4}$$

辐射功率角分布为

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \frac{\left|\boldsymbol{e_n} \times [(\boldsymbol{e_n} - \mathbf{v}/c) \times \dot{\mathbf{v}}]\right|^2}{(1 - \boldsymbol{e_n} \cdot \mathbf{v}/c)^5} \tag{7.5}$$

(7.1)～ (7.5)式是任意运动带电粒子辐射问题的基本公式.

低速运动粒子的辐射

当粒子速度 $v << c$ 且作加速运动时, 由(7.2) ～(7.4)式, 有

$$\boldsymbol{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{\boldsymbol{e_n} \times (\boldsymbol{e_n} \times \dot{\mathbf{v}})}{r}, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{e_n} \times \boldsymbol{E}/c \tag{7.6}$$

$$\boldsymbol{S} = \frac{e^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3 r^2} \sin^2\theta \boldsymbol{e_n} \tag{7.7}$$

$$P = \frac{e^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \tag{7.8}$$

θ是辐射方向$\boldsymbol{e_n}$与加速度$\dot{\mathbf{v}}$的夹角, 可见在与$\dot{\mathbf{v}}$垂直的方向上辐射最强. 由于粒子的电偶极矩为 $\mathbf{p} = e\boldsymbol{x}_e$, $\ddot{\mathbf{p}} = e\ddot{\boldsymbol{x}}_e = e\dot{\mathbf{v}}$, 故低速运动粒子加速时的辐射是电偶极辐射.

高速运动粒子的辐射

当$\dot{\mathbf{v}} \,/\!/\, \mathbf{v}$, 即粒子作直线加速时, 由(7.2)～(7.5)式, 有

$$\boldsymbol{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} \frac{\boldsymbol{e_n} \times (\boldsymbol{e_n} \times \dot{\mathbf{v}})}{(1 - \boldsymbol{e_n} \cdot \mathbf{v}/c)^3}, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{e_n} \times \boldsymbol{E}/c \tag{7.9}$$

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \frac{\sin^2\theta}{(1 - \beta\cos\theta)^5} \tag{7.10}$$

$$P(t') = \frac{e^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \gamma^6 = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 m_0^2 c^3} F^2 \tag{7.11}$$

(7.10)式中θ是辐射方向$\boldsymbol{e_n}$与速度$\mathbf{v}$的夹角, $\beta = v/c$. (7.11)式中$\boldsymbol{F} = d\mathbf{p}/dt = \gamma^3 m_0 \dot{\mathbf{v}}$是粒子受到的作用力.

当$\dot{\mathbf{v}} \perp \mathbf{v}$, 即粒子作圆周轨道运动时, 令某瞬时$\mathbf{v}$沿$z$方向, $\dot{\mathbf{v}}$沿x方向, (7.5)和(7.4)式给

出

$$\frac{dP(t')}{d\Omega}=\frac{e^2\dot{\mathbf{v}}^2}{16\pi^2\varepsilon_0c^3}\frac{(1-\beta\cos\theta)^2-(1-\beta^2)\sin^2\theta\cos^2\phi}{(1-\beta\cos\theta)^5} \tag{7.12}$$

$$P(t')=\frac{e^2\dot{\mathbf{v}}^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}\gamma^4=\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0m_0^2c^3}\gamma^2F^2 \tag{7.13}$$

(7.13)式表示，在一定作用力下, 圆周型(回旋)加速器中粒子因辐射而损耗的功率, 与其能量 $W=\gamma m_0c^2$ 的平方成正比, 即粒子能量越高, 辐射损耗越大, 粒子加速能量受到限制. 而(7.11)式表示，在一定作用力下, 直线加速器中粒子辐射而损耗的功率, 与其能量无关, 即加速能量不受限制.

7.2 带电粒子的辐射频谱

带电粒子加速时产生的辐射通常是脉冲式的. 由傅里叶分析, 脉冲波可表为各单色波的叠加. 电场强度的傅里叶变换为

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}_\omega(\mathbf{x})e^{-i\omega t}d\omega \tag{7.14}$$

$$\mathbf{E}_\omega(\mathbf{x})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}(\mathbf{x},t)e^{i\omega t}dt \tag{7.15}$$

其中 $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$ 为(7.2)式的第二项即粒子的辐射场. 由上述变换, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathbf{E}(\mathbf{x},t)\right|^2dt=4\pi\int_0^{\infty}\left|\mathbf{E}_\omega(\mathbf{x})\right|^2d\omega \tag{7.16}$$

以 R 表示坐标原点到场点的距离, $\mathbf{e_n}$ 表示这方向的单位矢量, 在远处, 粒子到场点的距离 $r\cong R-\mathbf{e_n}\cdot\mathbf{x_e}$, 将(7.2)式第二项 $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$ 代入(7.15)式, 得

$$\mathbf{E}_\omega(\mathbf{x})=\frac{e}{8\pi^2\varepsilon_0c^2}\frac{e^{ikR}}{R}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathbf{e_n}\times[(\mathbf{e_n}-\mathbf{v}/c)\times\dot{\mathbf{v}}]}{(1-\mathbf{e_n}\cdot\mathbf{v}/c)^2}e^{i\omega(t'-\mathbf{e_n}\cdot\mathbf{x}_e/c)}dt' \tag{7.17}$$

单位频率间隔辐射的能量角分布为

$$\frac{dW_\omega}{d\Omega}=4\pi\varepsilon_0cR^2\left|\mathbf{E}_\omega\right|^2 \tag{7.18}$$

对 $d\Omega$ 积分, 得单位频率间隔辐射的能量

$$W_\omega=4\pi\varepsilon_0c\oint\left|\mathbf{E}_\omega\right|^2R^2d\Omega \tag{7.19}$$

若知道粒子的运动轨迹, 速度 $\mathbf{v}$ 和加速度 $\dot{\mathbf{v}}$, 由(7.17)式可给出 $\mathbf{E}_\omega$, 再由(7.18)和(7.19)式便可计算辐射频谱. 当粒子速度 $v<<c$, (7.17)式变为

$$\boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{x}) = \frac{e}{8\pi^2\varepsilon_0 c^2}\frac{e^{ikR}}{R}\int_{-\infty}^{\infty}[\boldsymbol{e_n}\times(\boldsymbol{e_n}\times\dot{\boldsymbol{v}})]e^{i\omega t'}dt' \tag{7.20}$$

例如, 当带电粒子射向介质时, 粒子与介质内的原子发生碰撞而减速所产生的辐射. 设很短时间 τ 内粒子速度改变量为 $\Delta\boldsymbol{v}$, 且频率 $\omega << 1/\tau$, 则 $e^{i\omega t'} \cong 1$, 此时有

$$\boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{x}) = \frac{e}{8\pi^2\varepsilon_0 c^2}\frac{e^{ikR}}{R}[\boldsymbol{e_n}\times(\boldsymbol{e_n}\times\Delta\boldsymbol{v})] \tag{7.21}$$

$$\frac{dW_\omega}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^3\varepsilon_0 c^3}|\Delta\boldsymbol{v}|^2\sin^2\theta \tag{7.22}$$

$$W_\omega = \frac{e^2}{16\pi^3\varepsilon_0 c^3}|\Delta\boldsymbol{v}|^2 \tag{7.23}$$

(7.22)式中 θ 是辐射方向 $\boldsymbol{e_n}$ 与 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的夹角. (7.23) 式表明, 当 $\omega\tau << 1$, W_ω 与频率无关. 若 $\omega >> 1/\tau$, 则 $e^{i\omega t'} \cong 0$, $\boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{x}) \cong 0$, $W_\omega \cong 0$. 上述结果在频率较低时, 与 X 射线的实验结果有较好符合, 但在高频段与实验结果不符.

7.3 切伦柯夫辐射

在真空中, 带电粒子加速时才发生辐射. 但是在介质内, 当带电粒子匀速运动且其速度 v 超过介质中的光速, 即 $v > c/n$ (n 为介质的折射率)时, 会产生辐射——即切伦柯夫辐射. 这是由于运动粒子的电磁场使介质分子出现诱导电流, 粒子的电磁场与诱导电流的电磁场互相干涉而形成的辐射. 若介质磁导率 $\mu = \mu_0$, 只要把(7.17)式相因子 $e^{i\omega(t'-\boldsymbol{e_n}\cdot\boldsymbol{x_e}/c)}$ 中的光速 c, 换为介质中的光速 c/n, 再由(7.18)式可以计算切伦柯夫辐射频谱.

7.4 带电粒子的电磁场对粒子的反作用

电磁作用是自然界的基本相互作用之一. 带电粒子的自场对粒子的反作用, 通过质能关系表现为粒子具有电磁质量. 由于粒子的自场总是和粒子不可分割地联系在一起, 因此带电粒子的静止能量包含着它的自场能量, 静止质量包含着它的电磁质量.

带电粒子的辐射场对粒子的反作用, 表现为粒子受到辐射阻尼力. 若粒子运动速度 $\boldsymbol{v}$ 较低, 辐射阻尼力的周期平均值为

$$\boldsymbol{F}_s = \frac{e^2\ddot{\boldsymbol{v}}}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \tag{7.24}$$

7.5 电磁波的散射和吸收　介质的色散

外来电磁波作用到电子上时，电子将作受迫振动而产生辐射，入射波部分能量变为电子的辐射能量，这现象称为电子对电磁波的散射.

自由电子对电磁波的散射

这种散射称为汤姆孙散射. 当电子速度 $v<<c$，其振幅远小于入射波长 λ，即 $vT<<cT=\lambda$，设入射波电场为 $\boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t}$，略去入射波磁场的作用力，电子运动方程为

$$\ddot{\boldsymbol{x}}-\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 mc^3}\dddot{\boldsymbol{x}}=\frac{e}{m}\boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t} \tag{7.25}$$

一般有 $\lambda>>r_e=e^2/4\pi\varepsilon_0 mc^2$（电子“经典半径”），故可略去阻尼力，方程(7.25)的近似解为

$$\boldsymbol{x}=-\frac{e\boldsymbol{E}_0}{m\omega^2}e^{-i\omega t} \tag{7.26}$$

将电子加速度 $\ddot{\boldsymbol{x}}$ 代入(7.6)的第一式，得电子散射波电场——电偶极辐射场

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}[\boldsymbol{e}_n\times(\boldsymbol{e}_n\times\ddot{\boldsymbol{x}})]\\&=\frac{e^2E_0}{4\pi\varepsilon_0 mc^2 r}\sin\alpha e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\boldsymbol{e}_s\end{aligned} \tag{7.27}$$

α 是散射波矢方向 $\boldsymbol{e}_n$ 与入射波电场 $\boldsymbol{E}_0$ 偏振方向的夹角，$\boldsymbol{e}_s$ 是散射波电场偏振方向的单位矢量.

入射波平均能流密度(即入射波强度)为 $I_0=\overline{S}_0=\varepsilon_0 cE_0^2/2$. 由(7.27)式可计算出平均散射能流密度 $\overline{S}$ 和平均散射功率 $\overline{P}$

$$\overline{\boldsymbol{S}}=\frac{1}{2}\frac{r_e^2}{r^2}(1+\cos^2\theta)I_0\boldsymbol{e}_n,\qquad \overline{P}=\oint\overline{S}r^2d\Omega=\frac{8}{3}\pi r_e^2 I_0 \tag{7.28}$$

θ 是散射波矢与入射波矢的夹角. 散射总截面定义为 $\overline{P}$ 与 I_0 之比：

$$\sigma_T=\frac{\overline{P}}{I_0}=\frac{8\pi}{3}r_e^2 \tag{7.29}$$

微分散射截面定义为单位立体角内的散射功率与 I_0 之比：

$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega}=\frac{d\overline{P}/d\Omega}{I_0}=\frac{1}{2}r_e^2(1+\cos^2\theta) \tag{7.30}$$

束缚电子对电磁波的散射

经典物理把原子内的束缚电子看作固有角频率为 ω_0 的谐振子. 当电磁波入射至振子时, 将受到电场 $\boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t}$ 、辐射阻尼力和恢复力 $-m\omega_0^2 \boldsymbol{x}$ 的作用, 运动方程为

$$\ddot{\boldsymbol{x}} + \gamma\dot{\boldsymbol{x}} + \omega_0^2 \boldsymbol{x} = \frac{e}{m}\boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t} \tag{7.31}$$

其中 $\gamma = e^2\omega^2 / 6\pi\varepsilon_0 mc^3$ 为阻尼系数. 这方程的解为

$$\boldsymbol{x} = \frac{e}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}}\boldsymbol{E}_0 e^{-i(\omega t-\delta)} \tag{7.32}$$

$$\text{其中}\quad \tan\delta = \frac{\omega\gamma}{\omega_0^2-\omega^2} \tag{7.33}$$

从(7.32)式求出加速度 $\ddot{\boldsymbol{x}}$ 并代入(7.6)式, 得散射波电场

$$\boldsymbol{E} = \frac{e\omega^2 E_0}{4\pi\varepsilon_0 mc^2 r}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)-i\omega\gamma}\sin\alpha e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\boldsymbol{e}_s \tag{7.34}$$

α 是散射方向 $\boldsymbol{e}_n$ 与入射波电场 $\boldsymbol{E}_0$ 的夹角. 平均散射功率与散射截面为

$$\overline{P} = \frac{8\pi r_e^2 I_0}{3}\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2} \tag{7.35}$$

$$\sigma = \frac{\overline{P}}{I_0} = \frac{8\pi r_e^2}{3}\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2} \tag{7.36}$$

当入射波频率 $\omega << \omega_0$ ， $\sigma = \sigma_T(\omega/\omega_0)^4$ ，为瑞利散射(低频散射)； 当 $\omega >> \omega_0$, $\sigma = \sigma_T$, 即过渡到自由电子散射；当 $\omega = \omega_0$, $\sigma = \sigma_T(\omega/\gamma)^2$, 即出现共振.

当含有众多频率的电磁波投射到原子中的束缚电子时, 频率为 $\omega = \omega_0$ 的入射波能量被振子吸收, 振幅增大, 直到振子的散射能量等于吸收能量, 振幅才达到稳定值. 从量子力学的观点来看, “振子”的固有频率为 $\omega_0 = \Delta E/\hbar$, ΔE 是原子两个相邻能级的能量差, 入射光子频率 $\omega = \omega_0$ 时, 原子吸收了这个光子, 并从基态跃迁到激发态; 反之, 当原子从激发态跃迁回基态时, 将放出一个频率为 $\omega \cong \Delta E/\hbar$ 的光子.

介质色散

电磁波入射到介质内时, 由大量电子散射波的叠加, 形成介质内的电磁波. 设介质单位体积的电子数为 N , 其中故有频率为 $\omega_0 = \omega_i$ 的电子数为 Nf_i ， f_i 为分数, 由(7.32)式, 得介质

的极化强度

$$\boldsymbol{P}=\sum_i Nf_i e\boldsymbol{x}=\sum_i \frac{Ne^2}{m}\frac{f_i}{(\omega_i^2-\omega^2)-i\omega\gamma_i}\boldsymbol{E} \tag{7.37}$$

γ_i 是第 i 个振子的阻尼系数. 由 $\boldsymbol{P}=\varepsilon_0\chi_e\boldsymbol{E}$, $\varepsilon=\varepsilon_0(1+\chi_e)=\varepsilon_0\varepsilon_r$, 得电容率

$$\varepsilon(\omega)=\varepsilon_0+\sum_i \frac{Ne^2}{m}\frac{f_i}{(\omega_i^2-\omega^2)-i\omega\gamma_i} \tag{7.38}$$

相对电容率的实部

$$\varepsilon_r'=1+\sum_i \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\frac{f_i(\omega_i^2-\omega^2)}{(\omega_i^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma_i^2} \tag{7.39}$$

描写色散关系；相对电容率的虚部

$$\varepsilon_r''=\sum_i \frac{Ne^2}{2m\varepsilon_0}\frac{f_i\omega\gamma_i}{(\omega_i^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma_i^2} \tag{7.40}$$

描写电磁波的吸收.

利用(7.38)～(7.40)式讨论绝缘体、导体和等离子体对电磁波的色散与吸收现象时, 存在着局限性. 原因在于, 经典振子模型不能反映原子的真实结构以及电磁作用的微观动力学机制, 也无法给出合理的电子固有频率 ω_i .