第五章

5.1 电磁势与规范变换　达朗贝尔方程

由麦克斯韦方程组

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0,\qquad \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\qquad \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\tag{5.1}$$

可看到, 变化的 $\boldsymbol{B}$ 场激发的 $\boldsymbol{E}$ 场是有旋场, 用矢势 $\boldsymbol{A}$ 和标势 φ 描写电磁场时, 应使

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A},\qquad \boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\tag{5.2}$$

对于时变电磁场, φ 已无静电势能含义. 在经典电动力学中, $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$ 是客观物理量, $(\varphi,\boldsymbol{A})$ 只作为数学上的引入量, 若一组 $(\varphi,\boldsymbol{A})$ 描写 $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$, 则当 $(\varphi,\boldsymbol{A})$ 变换为

$$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\nabla\psi,\ \varphi=\varphi'\to\varphi-\frac{\partial\psi}{\partial t}\tag{5.3}$$

时, $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$ 保持不变, 其中 ψ 为任意标量场. (5.3)称为规范变换, 这变换保持 $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$ 不变——规范不变性. 但在微观电磁现象中, $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的局域作用理论不能完全反映电磁场对带电粒子的所有物理效应, (3.27)式描写的相因子是磁场对粒子作用的客观物理量, 当 $\boldsymbol{A}$ 按(5.3)变换时, 对任意闭合路径 L, 客观物理量

$$\oint_L\boldsymbol{A}'\cdot d\boldsymbol{l}=\oint_L\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}\tag{5.4}$$

同样保持不变. 这表明, 在宏观和微观电磁现象中, 用势描写电磁场时均有许多选择. 原因在于(5.2)中只规定 $\boldsymbol{A}$ 的旋度, 并未限定其散度, 故 $\boldsymbol{A}$ 未确定. 对 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 的每一种选择称为一种规范. 库仑规范

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0\tag{5.5}$$

限定 $\boldsymbol{A}$ 为无散场(横场), 在此规范下, 将(5.2)代入场方程(5.1), 得

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi=-\mu_0\boldsymbol{J}$$

$$\nabla^2\varphi=-\rho/\varepsilon_0\tag{5.6}$$

此时 $\boldsymbol{E}$ 的横场部分(无散场)由 $\boldsymbol{A}$ 描写, 纵场部分(无旋场)由 φ 描写. 若选择洛伦兹规范

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \tag{5.7}$$

从场方程(5.1)可得达朗贝尔方程

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\boldsymbol{J}\,,\qquad \nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\rho/\varepsilon_0 \tag{5.8}$$

这组方程表现出对称性——电流产生矢势波动, 电荷产生标势波动.

5. 2 推迟势和辐射场

电磁波从源点传播至场点, 存在推迟效应. 真空中电磁波的传播速度为 c, 因此达朗贝尔方程的解为推迟势

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t-r/c)}{r}dV' \tag{5.9}$$

$$\varphi(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho(\boldsymbol{x}',t-r/c)}{r}dV' \tag{5.10}$$

r 是源点 $\boldsymbol{x}'$ 到场点 $\boldsymbol{x}$ 的距离, t 时刻场点的势决定于 $t'=t-r/c$ 时刻辐射源的状态, 即场点上势的变化滞后于源的变化. 当电荷电流以角频率 ω 振动时:

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t')=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')e^{-i\omega t'}\,,\qquad \rho(\boldsymbol{x}',t')=\rho(\boldsymbol{x}')e^{-i\omega t'} \tag{5.11}$$

由电荷守恒定律得 $\nabla'\cdot\boldsymbol{J}=i\omega\rho$, 可知电流分布 $\boldsymbol{J}$ 给定, 电荷分布 ρ 也就给定. 故矢势

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t}\,,\qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')e^{ikr}}{r}dV' \tag{5.12}$$

可以完全地确定电磁场. 相因子 e^{ikr} 表示波从源点传至场点时, 相位滞后了 $\phi=kr$, 其中, $k=\omega/c=2\pi/\lambda$, λ 为波长. 任意点的场强为

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}\,,\qquad \boldsymbol{E}=\frac{ic}{k}\nabla\times\boldsymbol{B} \tag{5.13}$$

只要知道电流分布函数 $\boldsymbol{J}$, 由(5.12)和(5.13)便可计算电磁辐射, 包括天线辐射.

时变电磁场在如下三个区域中有不同的特点:

(1) 近区: $r\ll\lambda$, 故 $kr\to 0$, (5.12)式中 $e^{ikr}\approx 1$, 即推迟效应可忽略, 因此近区的场为似稳场, 电场近似于静电场, 磁场近似于稳恒磁场, 场强 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}\sim 1/r^2$. 近区的场与激发源的电荷电流相互作用相互制约, 因此, 对于一般的辐射系统, 应当通过求解边值问题, 才能找出电流分布函数.

(2) 远区: $r\gg\lambda$, $kr\gg 1$, (5.12)式中分母 $r\approx R$, R 是坐标原点到场点的距离. 相因子中 $kr\cong kR-k\boldsymbol{e}_R\cdot\boldsymbol{x}'$. 此处主要为横向的辐射场(TEM 波):

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}\cong ik\boldsymbol{e}_R\times\boldsymbol{A}\,,\quad \boldsymbol{E}=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_R \tag{5.14}$$

波矢量 $\boldsymbol{k}=k\boldsymbol{e}_R$, $\boldsymbol{e}_R$ 是坐标原点指向场点的单位矢量, 场强 ~ $1/R$.

(3) 感应区: $r\sim\lambda$, 似稳场与辐射场的过渡区域.

5.3 辐射场的多极展开

当激发源的线度 $l<<\lambda$, 在远处即 $r>>l$, 将(5.12)式中的相因子 e^{ikr} 对 $k\boldsymbol{e}_R\cdot\boldsymbol{x}'$ 展开为级数, 有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\int_V \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')[1-ik\boldsymbol{e}_R\cdot\boldsymbol{x}'+\cdots]dV' \tag{5.15}$$

第一项为电偶极辐射, 第二项包括磁偶极和电四极辐射, 略去的各项为各高级矩的辐射. 电偶极辐射场为

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\dot{\boldsymbol{p}} \tag{5.16}$$

$$\boldsymbol{B}=ik\boldsymbol{e}_R\times\boldsymbol{A}=\frac{e^{ikR}}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R}\ddot{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{e}_R$$

$$\boldsymbol{E}=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_R=\frac{e^{ikR}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}(\ddot{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{e}_R)\times\boldsymbol{e}_R \tag{5.17}$$

电偶极矩 $\boldsymbol{p}$ 的振幅 p_0 由第二章(2.12)式计算. 当 $\boldsymbol{p}=p_0 e^{-i\omega t}\boldsymbol{e}_z$, 平均辐射能流和辐射功率为

$$\overline{\boldsymbol{S}}=\frac{c}{2\mu_0}(\boldsymbol{B}^*\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_R=\frac{\mu_0\omega^4 p_0^2}{32\pi^2 cR^2}\sin^2\theta\boldsymbol{e}_R \tag{5.18}$$

$$\overline{P}=\oint_S\overline{\boldsymbol{S}}\cdot R^2 d\Omega\boldsymbol{e}_R=\frac{\mu_0\omega^4 p_0^2}{12\pi c} \tag{5.19}$$

因子 $\sin^2\theta$ 描述辐射的方向性(角分布). 磁偶极辐射场为

$$\boldsymbol{A}=\frac{ik\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\boldsymbol{e}_R\times\boldsymbol{m} \tag{5.20}$$

$$\boldsymbol{B}=ik\boldsymbol{e}_R\times\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi c^2 R}(\ddot{\boldsymbol{m}}\times\boldsymbol{e}_R)\times\boldsymbol{e}_R$$

$$\boldsymbol{E}=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_R=-\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi cR}\ddot{\boldsymbol{m}}\times\boldsymbol{e}_R \tag{5.21}$$

$\boldsymbol{m}$ 的振幅 m_0 由第三章(3.8)式计算. 若在(5.17)式中, 作代换 $\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{m}/c$, $\boldsymbol{E}\to c\boldsymbol{B}$, $c\boldsymbol{B}\to-\boldsymbol{E}$, 亦可得到磁偶极 $\boldsymbol{m}$ 的辐射场. 当 $\boldsymbol{m}=m_0 e^{-i\omega t}\boldsymbol{e}_z$, 平均辐射能流和辐射功率为

$$\overline{\boldsymbol{S}}=\frac{c}{2\mu_0}(\boldsymbol{B}^*\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_R=\frac{\mu_0\omega^4 m_0^2}{32\pi^2 c^3 R^2}\sin^2\theta\boldsymbol{e}_R$$

$$\overline{P}=\frac{\mu_0\omega^4 m_0^2}{12\pi c^3} \tag{5.22}$$

电四极的辐射场, 平均辐射能流和辐射功率为

$$\boldsymbol{A_D}=\frac{\mu_0 e^{ikR}}{24\pi cR}\dddot{\boldsymbol{D}}, \qquad \text{其中矢量 } \boldsymbol{D}=\boldsymbol{e_R}\cdot\overleftrightarrow{D} \tag{5.23}$$

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 e^{ikR}}{24\pi c^2 R}\dddot{\boldsymbol{D}}\times\boldsymbol{e}_R\quad,\qquad \boldsymbol{E}=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_R \tag{5.24}$$

$$\overline{\boldsymbol{S}}=\frac{c}{2\mu_0}(\boldsymbol{B}^*\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_R=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{288\pi c^3 R^2}(\dddot{\boldsymbol{D}}\times\boldsymbol{e}_R)^2\boldsymbol{e}_R \tag{5.25}$$

$$\overline{P}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{360c^3}\sum_{i,j=1}^{3}\left|\dddot{D}_{ij}\right|^2 \tag{5.26}$$

电四极矩的振幅可由第二章(2.13)或(2.15)式计算.

若激发源的电流振辐为 I_0, 电偶极的平均辐射功率 $\overline{P}\sim(l/\lambda)^2 I_0^2$, 而磁偶极和电四极均有 $\overline{P}\sim(l/\lambda)^4 I_0^2$, 由于 $l<<\lambda$, 故电偶极辐射能力比磁偶极和电四极大 $(l/\lambda)^2$ 数量级.

5. 4 电磁波的衍射

当电磁波遇到障碍物或小孔时, 将发生衍射. 经典光学把光波面上每一点 $\boldsymbol{x}'$, 都看成是可以发射子波的次级光源, 向前传播的光波是所有子波的叠加. 场强的任一直角分量 $\phi(\boldsymbol{x})$, 以及作为次级光源的波面每一点上的格林函数 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$, 分别满足方程

$$(\nabla^2+k^2)\phi(\boldsymbol{x})=0 \tag{5.27}$$

$$(\nabla^2+k^2)G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=-4\pi\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{5.28}$$

于是由格林公式(附录III.5 式), 在区域 V 内任一点 $\boldsymbol{x}$ 上, 有

$$\phi(\boldsymbol{x})=-\frac{1}{4\pi}\oint_S\frac{e^{ikr}}{r}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\cdot[\nabla'\phi(\boldsymbol{x}')+(ik-\frac{1}{r})\frac{\boldsymbol{r}}{r}\phi(\boldsymbol{x}')]dS' \tag{5.29}$$

这便是基尔霍夫公式, 其中 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$ 是 V 的边界面 S 指向内部的法向单位矢量, e^{ikr}/r 是方程(5.28)的解, 表示从 S 每一点 $\boldsymbol{x}'$ 向场点 $\boldsymbol{x}$ 发出的子波, 子波的强度为 $\phi(\boldsymbol{x}')$, 其法向导数为 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\cdot\nabla'\phi(\boldsymbol{x}')=\partial\phi/\partial n$, 若能对这两个函数作出近似估计, 由(5.29)式便可计算 V 内的波.

当电磁波从无穷大屏幕中的小孔通过时, 设小孔处的入射波为平面波, 入射波矢为 $\boldsymbol{k}_1$, 振幅为 ϕ_0, 假定屏幕各点上 $\phi=0$, $\partial\phi/\partial n=0$, 于是由(5.29)式, 衍射波的表达式为

$$\phi(\boldsymbol{x})=-\frac{i\phi_0 e^{ikR}}{4\pi R}\int_{S_0}e^{i(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{x}'}(\cos\theta_1+\cos\theta_2)\mathrm{d}S' \tag{5.30}$$

积分遍及小孔面积 S_0, R 是小孔中心到场点 $\boldsymbol{x}$ 的距离, $\boldsymbol{x}'$ 是小孔面上任一点的位矢, 衍射波矢 $\boldsymbol{k}_2=k\boldsymbol{e}_R$, θ_1 和 θ_2 分别是 $\boldsymbol{k}_1$ 和 $\boldsymbol{k}_2$ 与孔面法线的夹角. $\cos\theta_1+\cos\theta_2$ 称为倾斜因子.

5. 5 电磁波的动量和动量流　辐射压力

真空中电磁波的能量密度、动量密度和动量流密度分别为

$$w=\frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2+B^2/\mu_0)=\varepsilon_0 E^2=B^2/\mu_0 \tag{5.31}$$

$$\boldsymbol{g} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{S}/c^2 = (w/c)\boldsymbol{e_k} \tag{5.32}$$

$$\overleftrightarrow{T} = cg\boldsymbol{e_k}\boldsymbol{e_k} = w\boldsymbol{e_k}\boldsymbol{e_k} \tag{5.33}$$

$\boldsymbol{e_k}$ 为波矢方向的单位矢量. 电磁波对宏观物体表面的辐射压力为

$$\boldsymbol{f}_S = -\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} \cdot \overleftrightarrow{T} \tag{5.34}$$

$\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$ 是物体表面外法向的单位矢量.