第四章

4.1 真空中的波动方程

随时间变化的电荷电流分布激发时变电磁场，变化的电场与磁场互相激发形成电磁波。由麦克斯韦方程组

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_{\mathrm{f}},\qquad \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\qquad \nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\tag{4.1}$$

在激发源之外的真空中，$\rho_{\mathrm{f}}=0$，$\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}=0$，$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}/\mu_0$，有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0,\qquad \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\qquad \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\tag{4.2}$$

而

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{B})=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}$$

于是得关于 $\boldsymbol{E}$ 的齐次波动方程：

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0\tag{4.3}$$

同理可得关于 $\boldsymbol{B}$ 的齐次波动方程：

$$\nabla^2\boldsymbol{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}=0\tag{4.4}$$

$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有完全相同的波动形为，其中

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=299\,792\,458\ \text{m/s} \tag{4.5}$$

是所有频率的电磁波在真空中的传播速度.

4.2 时谐波　亥姆霍兹方程和边值关系　平面波

时谐波

即角频率为 ω 的单色波:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\cos\omega t\,,\quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\cos\omega t$$

写成复数形式

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t}\,,\quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t} \tag{4.6}$$

介质色散

即便是同一种介质，其电容率 ε 和磁导率 μ 一般地是频率的函数:

$$\varepsilon=\varepsilon(\omega)\,,\ \mu=\mu(\omega)$$

仅对单色波, 各向同性线性均匀介质内才有 $\varepsilon=$ 常数, $\mu=$ 常数:

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}\,,\quad \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H} \tag{4.7}$$

线性均匀绝缘介质内的亥姆霍兹方程　边值关系

在各向同性线性均匀的绝缘介质内, $\rho_{\text{f}}=0$, $\boldsymbol{J}_{\text{f}}=0$, 麦克斯韦方程组为

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0\,,\qquad \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\ &\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\,,\qquad \nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\end{aligned} \tag{4.8}$$

将(4.6)和(4.7)代入(4.8), 得

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=0\,,\qquad \nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=i\omega\mu\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})\\ &\nabla\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})=0\,,\qquad \nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})=-i\omega\varepsilon\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\end{aligned} \tag{4.9}$$

注意这四个方程中, 只有第 2 和第 4 式是独立的. 取第 2 式的散度即给出第 3 式; 取第 4 式的散度即给出第 1 式. 因此, 对于时谐波, 电磁场的四个边值关系

$$\boldsymbol{e}_{\text{n}}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=\sigma_{\text{f}}\,,\qquad \boldsymbol{e}_{\text{n}}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0$$

$$\boldsymbol{e}_{\text{n}}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0\,,\qquad \boldsymbol{e}_{\text{n}}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{\alpha}_{\text{f}}$$

中, 只有第 2 和第 4 式是独立的:

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0,\qquad \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{f}} \tag{4.10}$$

满足这两个边值关系, 其它两个自然也满足.

对(4.9)的第 2 式求旋度, 并由第 4 式, 得线性均匀绝缘介质内时谐波电场 $\boldsymbol{E}$ 的亥姆霍兹方程:

$$\nabla^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})+k^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=0 \tag{4.11}$$

$$\text{其中}\quad k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=2\pi/\lambda\qquad (\text{真空中}\, k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=\omega/c) \tag{4.12}$$

λ 为电磁波在介质中的波长, k 为波数. 方程(4.11)的解还必须满足条件:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=0\qquad (\text{横场条件}) \tag{4.13}$$

在研究电磁波在有界空间中的传播时, 在各线性均匀绝缘介质内满足亥姆霍兹方程(4.11)和条件(4.13), 在界面上又满足(4.10)第一式的电场 $\boldsymbol{E}$, 是唯一的.

解出 $\boldsymbol{E}$ 后, 由(4.9)第 2 式即可求出磁场:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=\mu\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})=-\frac{i}{\omega}\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \tag{4.14}$$

同理, 从方程组(4.9), 亦可得磁场 $\boldsymbol{B}$ 遵从亥姆霍兹方程:

$$\nabla^2\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})+k^2\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=0 \tag{4.15}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=0\qquad (\text{横场条件}) \tag{4.16}$$

在各线性均匀绝缘介质内满足亥姆霍兹方程(4.15)和条件(4.16), 在界面上又满足(4.10)第 2 式的磁场 $\boldsymbol{B}$, 也是唯一的. 解出 $\boldsymbol{B}$ 后, 由(4.9)第 4 式,即可求出电场

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=-\frac{i}{\omega\mu\varepsilon}\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) \tag{4.17}$$

线性均匀绝缘介质内的平面波

自然界一切电磁波均可看成由各种单色平面波叠加的结果. 亥姆霍兹方程

$$\nabla^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})+k^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=0 \tag{4.18}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=0\qquad (\text{横场条件}) \tag{4.19}$$

最基本的解是单色平面波. 例如, 当单色平面波沿 x 轴传播时

$$\text{波矢量}\qquad \boldsymbol{k}=k\boldsymbol{e}_x$$

方程(4.18)为 $\dfrac{d^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})}{dx^2}+k^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=0$

它的一个解为 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{E}_0e^{ikx}$

由条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=0$, 有

$$\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}\cdot[\boldsymbol{E}_0e^{ikx}]=ik\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=0,\quad \text{即}\ \boldsymbol{k}\perp\boldsymbol{E},\qquad \boldsymbol{E}\ \text{为横场}$$

$\boldsymbol{E}$ 的全表达式为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t}=\boldsymbol{E}_0e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\text{波的相位为}\qquad \phi=kx-\omega t \tag{4.20}$$

与波矢量 $\boldsymbol{k}=k\boldsymbol{e}_x$ 正交的任意平面, 都是等相面. 在此平面上所有各点

$$\phi=kx-\omega t=\text{常数}$$

对求上式时间的导数, 得相速度

$$\boldsymbol{v}=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{1}{\sqrt{\mu_{\mathrm{r}}\varepsilon_{\mathrm{r}}}}\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=\frac{c}{n}\qquad \text{（线性均匀绝缘介质中）} \tag{4.21}$$

介质的折射率

$$n=\sqrt{\mu_{\mathrm{r}}\varepsilon_{\mathrm{r}}} \tag{4.22}$$

μ_{r} 和 ε_{r} 与波的频率有关, 故 $\boldsymbol{v}$ 和 n 也与频率有关——色散. $Z=\sqrt{\mu/\varepsilon}$ 称为介质的波阻抗.

真空中任何频率的波，均有

$$n=1,\ \ \boldsymbol{v}=c,\ \ Z_0=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}\cong 376.7\Omega$$

沿任意方向传播的平面波：

$$\text{波矢量}\quad \boldsymbol{k}=k_x\boldsymbol{e}_x+k_y\boldsymbol{e}_y+k_z\boldsymbol{e}_z \tag{4.23}$$

$$\text{电场}\qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{E}_0e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)} \tag{4.24}$$

$$\text{波的相位}\qquad \phi=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t \tag{4.25}$$

与 $\boldsymbol{k}$ 正交的任意平面, 都是等相面.

$$\text{由}\ \nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=0,\quad \text{得}\ \ i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}=0,\ \ \text{即}\ \ \boldsymbol{k}\perp\boldsymbol{E}$$

磁场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) &= -\frac{i}{\omega}\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = -\frac{i}{\omega}\nabla\times[\boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}] \\ &= \frac{\boldsymbol{k}}{\omega}\times\boldsymbol{E} = \frac{1}{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{e}_k\times\boldsymbol{E}\end{aligned} \tag{4.26}$$

可知电磁波:

(1) 是横波, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{k}$ 三者正交, 即 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}=0$, $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}=0$, 而且 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{k}$ 方向.

(2) 电场与磁场的振幅比

$$\frac{E}{B}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=\boldsymbol{v} \qquad \text{（线性均匀绝缘介质中）} \tag{4.27}$$

$$\frac{E}{B}=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=c \qquad \text{（真空中）} \tag{4.28}$$

电磁波的偏振

电磁波电场 $\boldsymbol{E}$ (或磁场 $\boldsymbol{B}$)一般地可分解为与波矢 $\boldsymbol{k}$ 垂直的两个独立偏振.设 $\boldsymbol{k}=k\boldsymbol{e}_z$, 则 $\boldsymbol{E}$ 可分解为

$$\boldsymbol{E}=E_x\boldsymbol{e}_x+E_y\boldsymbol{e}_y \tag{4.29}$$

(1) 若 $\boldsymbol{E}$ 的矢端始终在一直线上(如 $E_x=0, E_y\neq 0$, 或 $E_x\neq 0, E_y=0$),则称之为线偏振波——完全偏振波.

(2) 在面对传播方向看，若 $\boldsymbol{E}$ 的矢端作逆时针旋转，称之为右旋的圆偏振波（当 $E_x=E_y$），或右旋的椭圆偏振波（当 $E_x\neq E_y$）；若 $\boldsymbol{E}$ 的矢端作顺时针旋转，称为左旋的圆偏振波或椭圆偏振波.

平面波的能量和能流

各向同性线性均匀的绝缘介质内, 能量密度为

$$\boldsymbol{w}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2+\frac{1}{2\mu}B^2 \tag{4.30}$$

由于 $B=E/\boldsymbol{v}=\sqrt{\mu\varepsilon}E$, 故波的电能=磁能(无损耗的理想情形). 能量密度瞬时值为

$$\boldsymbol{w}=\varepsilon E^2=\varepsilon E_0^2\cos^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t) \tag{4.31}$$

能流密度瞬时值为

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}=\sqrt{\varepsilon/\mu}E^2\boldsymbol{e}_{\mathrm{k}}=\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}\boldsymbol{e}_{\mathrm{k}} \tag{4.32}$$

$\boldsymbol{e}_{\mathrm{k}}$ 为传播方向的单位矢量，上式表示，各向同性线性均匀的绝缘介质内, 单色波的能量以相速度 $\boldsymbol{v}$ 沿传播方向转移. $\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 在每个周期 T 内的平均值为

$$\overline{\boldsymbol{w}}=\frac{1}{T}\int_0^T wdt=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}^*\cdot\varepsilon\boldsymbol{E})=\frac{1}{2}\varepsilon E_0^2 \tag{4.33}$$

$$\overline{\boldsymbol{S}}=\frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{S}dt=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{H})=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0^2\boldsymbol{e}_{\mathrm{k}} \tag{4.34}$$

在上述各式中, 将 μ 和 ε 改为 μ_0 和 ε_0 , 即得真空中电磁波能量密度和能流密度的瞬时值, 或平均值.

在介质内，由于相速度 $\boldsymbol{v}$ 与频率 ω 有关，故不同频率的单色波有不同的能量传播速度——**色散**，这将导致多频率成份的波变形.

当介质中的波含有众多频率成份时(例如脉冲波和已调制波), 由于能量密度与波的振幅平方成正比, 故整个波包的传播速度, 才是波的能量传播速度, 又称为**群速度**

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{g}}=\frac{d\omega}{dk} \tag{4.35}$$

由于介质折射率 n 是频率 ω 的函数, 而相速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{p}}=c/n$, $\omega=k\boldsymbol{v}_{\mathrm{p}}=kc/n$, 故群速度与相速度的关系为

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{g}}=\frac{d\omega}{dk}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{p}}+k\frac{d\boldsymbol{v}_{\mathrm{p}}}{dk}=\frac{c}{n+\omega(dn/d\omega)} \tag{4.36}$$

正常色散介质 $dn/d\omega>0$, 故 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{g}}<\boldsymbol{v}_{\mathrm{p}}$, 反常色散介质 $dn/d\omega<0$, 故 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{g}}>\boldsymbol{v}_{\mathrm{p}}$, 自由空间中 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{g}}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{p}}=c$.

4.3 导体内的电磁波

线性均匀导体内的自由电荷分布

线性均匀导体内，当频率 ω 不是太高时, 传导电流遵从欧姆定律 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}=\sigma\boldsymbol{E}$ ， $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$ ，由场方程和电流连续性方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_{\mathrm{f}}\,,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}+\frac{\partial\rho_{\mathrm{f}}}{\partial t}=0$$

得 $$\frac{\partial \rho_{\mathrm{f}}}{\partial t} = -\nabla \cdot \boldsymbol{J}_{\mathrm{f}} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho_{\mathrm{f}}$$

其解为 $$\rho_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{x},t) = \rho_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{x},0)e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$$

$\rho_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{x},0)$ 是 $\boldsymbol{x}$ 处 $t=0$ 时刻的子由电荷密度. 可知, 在线性均匀导体内, 若起初时刻某处有自由电荷积累, 其密度将按指数规律衰减, 衰减特征时间常数为

$$\tau = \varepsilon / \sigma \tag{4.37}$$

σ 越高衰减越快. 例如铜, $\sigma \approx 5.8\times 10^{7}\,/\Omega\cdot\mathrm{m}$, $\varepsilon \approx \varepsilon_0 = 8.85\times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$, $\tau \sim 10^{-19}\,\mathrm{s}$.

对于一般金属, $\tau = \varepsilon/\sigma \sim 10^{-17}\,\mathrm{s}$. 当波的频率

$$\omega << 1/\tau = \sigma/\varepsilon$$

即满足 $$\frac{\sigma}{\varepsilon\omega} >> 1 \quad \text{（良导体条件）} \tag{4.38}$$

可认为导体内部 $\rho_{\mathrm{f}} = 0$

自由电荷只能分布于导体表面, 以电荷面密度 σ_{f} 描述.

线性均匀导体内的亥姆霍兹方程

线性均匀导体内的场方程为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = 0, \qquad \nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0, \qquad \nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_{\mathrm{f}} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \sigma\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

对时谐波

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t}, \qquad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t}$$

有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = i\omega\mu\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) = -i\omega\varepsilon\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) + \sigma\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = -i\omega\varepsilon'\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \tag{4.39}$$

因此线性均匀导体内的时谐波, 也遵从亥姆霍兹方程

$$\nabla^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) + k^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{4.40}$$

及横场条件 $$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{4.41}$$

但

$$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon'}\,,\quad \varepsilon'=\varepsilon+i\sigma/\omega \tag{4.42}$$

ε' 是导体的复数电容率. 由于 k 为复数, 因此导体内波矢量为复矢量

$$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{\beta}+i\boldsymbol{\alpha} \tag{4.43}$$

故得导体内平面波的电磁场为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}=\boldsymbol{E}_0 e^{-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{x}}e^{i(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}$$

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{\omega}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}=\frac{1}{\omega}(\boldsymbol{\beta}+i\boldsymbol{\alpha})\times\boldsymbol{E} \tag{4.44}$$

$\boldsymbol{E}_0$ 是波在导体表面的振幅. 波的相位为

$$\phi=\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t \tag{4.45}$$

与矢量 $\boldsymbol{\beta}$ 正交的平面是波在导体内的等相面, 波在导体内的相速度为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\omega}{\beta} \tag{4.46}$$

β 称为相位常数. 因子

$$\boldsymbol{E}_0 e^{-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{x}}$$

表明随着穿入深度增加, 波在导体内的振幅呈指数衰减， 与矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 正交的平面是波在导体内的等振幅面, α 称为衰减常数.

波在导体内衰减, 是由于传导电流的热效应引起能量损耗所致. 平均损耗功率密度为

$$\overline{p}=\frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}^*\cdot\boldsymbol{E}dt=\frac{\sigma}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{E})=\frac{1}{2}\sigma E_0^2 e^{-2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{4.47}$$

在非垂直入射情形, 矢量 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的方向不一致. 由

$$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon'}\,,\quad \varepsilon'=\varepsilon+i\sigma/\omega$$

$$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{\beta}+i\boldsymbol{\alpha}$$

两边均平方, 得

$$\beta^2-\alpha^2=\omega^2\mu\varepsilon\,,\qquad \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=\frac{1}{2}\omega\mu\sigma \tag{4.48}$$

知道矢量 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的夹角 θ, 便可解出 β 与 α .

导体内的电磁波

当电磁波垂直入射于导体时， $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 均指向导体内部的法向 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$, 即导体内的波矢量为

$$\boldsymbol{k} = (\beta + i\alpha)\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} \tag{4.49}$$

由(4.48)可解出

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}+1\right)\right]^{1/2}$$

$$\alpha = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}-1\right)\right]^{1/2} \tag{4.50}$$

于是透入导体内的电磁场为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i(\beta z-\omega t)} \quad , \quad \boldsymbol{B} = \frac{1}{\omega}(\beta + i\alpha)\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} \times \boldsymbol{E} \tag{4.51}$$

波在导体内的相速度

$$\boldsymbol{v} = \omega / \beta \qquad \text{（绝缘介质中 } \boldsymbol{v} = \omega / k = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}\text{ ）} \tag{4.52}$$

波在导体内的穿透深度

$$z = \delta = \frac{1}{\alpha} \tag{4.53}$$

对于良导体, 即满足条件

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} >> 1 \tag{4.54}$$

时, (4.50)给出

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \tag{4.55}$$

因此, 良导体内的磁场

$$\boldsymbol{B} \approx \frac{\alpha}{\omega}(1+i)\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} \times \boldsymbol{E} = \sqrt{\frac{\mu\sigma}{\omega}} e^{i\frac{\pi}{4}} \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} \times \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{H} \approx \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}} e^{i\frac{\pi}{4}} \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} \times \boldsymbol{E} \tag{4.56}$$

这表明, 良导体内

(1) $\boldsymbol{B}$ 的相位比 $\boldsymbol{E}$ 滞后 π/4,

(2) 且 $\sqrt{\mu}H >> \sqrt{\varepsilon}E$, 故良导体(金属)内部电磁波的能量主要是磁场能. 这是因为，电场通过直接对自由电荷作功而失去了能量. 电磁波在良导体内的穿透深度为

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \approx \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \tag{4.57}$$

电导率σ和波的频率ω越高, δ越小, 这现象称为导体的高频趋肤效应.

4.4 电磁波在界面的反射和折射

经典光学和电动力学——电磁波的反射和折射现象

（1）决定于界面两边介质的电磁性质和边值关系:

$$\boldsymbol{e}_\mathrm{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0,\qquad \boldsymbol{e}_\mathrm{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{\alpha}_\mathrm{f} \tag{4.58}$$

（2）假定反射波和折射波的频率, 与入射波的频率相同(忽略了介质内原子或分子对电磁波散射，或吸收、再发射等复杂的量子过程).

事实上，电磁波（光）与介质的互作用是量子过程，与介质的分子结构、电磁波的强度、频率、以及温度都有关. Compton 散射（P239，26 题）表明，散射波频率比入射波频率低.

反射定律和折射定律

设界面为$z=0$的平面, 以θ, θ', θ''分别表示入射角、反射角和折射角,

$$\text{频率}\quad \omega=\omega'=\omega''$$

$$k=k'=\omega/v_1=\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1},\qquad k''=\omega/v_2=\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2} \tag{4.59}$$

入射波 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}$

反射波 $\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{E}'_0e^{i(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}$

折(透)射波 $\boldsymbol{E}''=\boldsymbol{E}''_0e^{i(\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}$

在$z=0$的界面, 由边值关系$\boldsymbol{e}_\mathrm{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0$,有

$$\boldsymbol{e}_z\times(\boldsymbol{E}_0e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{E}'_0e^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}''_0e^{i\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{x}}$$

在整个$z=0$的平面上, 上式均成立, 必须有

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{x}\qquad (z=0) \tag{4.60}$$

若入射面xz平面，则$k_y=k'_y=k''_y=0$. 由(4.60)有

$$k_x x=k'_x x=k''_x x\quad,\quad k_x=k'_x=k''_x$$

$$\text{即}\quad k\sin\theta=k'\sin\theta'=k''\sin\theta'' \tag{4.61}$$

将(4.59)式代入上式, 得

$$\text{反射定律}\qquad \theta'=\theta \tag{4.62}$$

折射定律 $$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}}{\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}}=\frac{n_2}{n_1}=n_{21} \tag{4.63}$$

n_{21} 是介质 2 对于介质 1 的相对折射率.

菲涅尔公式

入射波的电场 $\boldsymbol{E}$, 一般地可分解为垂直于入射面的偏振 $E_\perp$, 和平行于入射面的偏振 $E_{//}$.

若界面两边均为**非铁磁性**($\mu_1\approx\mu_2\approx\mu_0$)的均匀绝缘介质, 由边值关系

$$E_{1t}=E_{2t}, \qquad H_{1t}=H_{2t} \tag{4.64}$$

当 $\boldsymbol{E}$ 垂直于入射面偏振时, 有

$$E_\perp+E'_\perp=E''_\perp, \quad H\cos\theta-H'\cos\theta=H''\cos\theta''$$

将

$$H=B/\mu_0=\sqrt{\varepsilon_1/\mu_0}E_\perp, \qquad H'=B'/\mu_0=\sqrt{\varepsilon_1/\mu_0}E'_\perp$$

$$H''=B''/\mu_0=\sqrt{\varepsilon_2/\mu_0}E''_\perp$$

代入上式, 可解出

$$E'_\perp=-\frac{\sin(\theta-\theta'')}{\sin(\theta+\theta'')}E_\perp, \qquad E''_\perp=\frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta+\theta'')}E_\perp \tag{4.65}$$

当 $\boldsymbol{E}$ 平行于入射面偏振时, 有

$$E_{//}\cos\theta-E'_{//}\cos\theta=E''_{//}\cos\theta'', \quad H+H'=H''$$

可解出

$$E'_{//}=\frac{\tan(\theta-\theta'')}{\tan(\theta+\theta'')}E_{//}, \qquad E''_{//}=\frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta+\theta'')\cos(\theta-\theta'')}E_{//} \tag{4.66}$$

上述两式表明:

(1) $E_\perp$ 与 $E_{//}$ 在界面上有不同的反射和折射行为.

(2) 若入射波是圆偏振波（如自然光）时，由于 $E'_\perp\neq E'_{//}$，$E''_\perp\neq E''_{//}$，反射波 E' 和折射波 E'' 将变成椭圆偏振波.

(3) 当 $\theta+\theta''=\pi/2$ 时, 由(4.65)和(4.65) 有 $E'_{//}=0$, $E'_\perp=-\sin(\theta-\theta'')E_\perp$, 即反射波变为只有 $E'_\perp$ 分量的线偏振波, 此时的入射角 $\theta=\theta_B$ 称为布儒斯特(Brewster)角或起偏角. 由

$$\text{折射定律}\ \frac{\sin\theta}{\sin\theta''}=\frac{n_2}{n_1}=n_{21}, \quad \text{可知} \quad \tan\theta_B=n_2/n_1$$

(4) 若 $\varepsilon_2>\varepsilon_1$, 即 $n_2>n_1$, 由折射定律可知, 此时 $\theta>\theta''$, 由(4.65)

$$E'_{\perp}=-\frac{\sin(\theta-\theta'')}{\sin(\theta+\theta'')}E_{\perp} \quad \text{为负值}$$

即反射波 $E'_{\perp}$ 与入射波 $E_{\perp}$ 相位相反——“半波损失”. 但 $E''_{\perp}/E_{\perp}$ 总是正的, 即折射波无相位突变.

反射系数和透射系数

反射系数 R 定义为反射波与入射波平均法向能流之比, 透射系数 T 定义为折射波与入射波平均法向能流之比:

$$R=\frac{\overline{\boldsymbol{S}'}\cdot\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}}{\overline{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}}=\frac{E_0'^2}{E_0^2}, \quad T=\frac{\overline{\boldsymbol{S}''}\cdot\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}}{\overline{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}}=\frac{n_2\cos\theta''}{n_1\cos\theta}\frac{E_0''^2}{E_0^2} \tag{4.67}$$

无损耗情形下 $T=1-R$.

全反射

当 $n_{21}<1$, 即从光密介质入射至光疏介质时, 若入射角 $\theta>\theta_c$ (临界角, 即 $\theta''=\pi/2$ 时的入射角, $\sin\theta_c=n_{21}$), 从折射定律

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}}{\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}}=\frac{n_2}{n_1}=n_{21}$$

可知, 此时 $\sin\theta>n_{21}$, $\sin\theta''>1$, 将发生全反射, 透入第二介质的波是沿界面切向传播的表面波, 透入波沿法向的平均能流为零.

利用全反射的例子: 光纤传播（课外阅读与讨论）.

良导体表面的反射

当电磁波垂直入射到良导体时, 设界面是 $z=0$ 的平面. 由边值关系

$$E+E'=E'', \quad H-H'=H''$$

$$\text{真空中} \qquad H=\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}\,E, \quad H'=\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}\,E'$$

$$\text{非磁性良导体内} \qquad H''=\sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu_0}}(1+i)E''$$

解出

$$\frac{E'}{E}=-\frac{(1-\sqrt{2\omega\varepsilon_0/\sigma})+i}{(1+\sqrt{2\omega\varepsilon_0/\sigma})+i}$$

反射系数为

$$R=\left|\frac{E'}{E}\right|=\frac{E'\cdot E'^*}{E\cdot E^*}\approx 1-2\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}} \tag{4.67}$$

导体电导率σ越高, R越接近于 1, 绝大部分能量被反射出导体外.

对于微波和无线电波, 大多数金属反射系数$R\to 1$, 电磁波和电流仅存在于其表面的薄层中, 内部场强为零, 此时金属可视为理想导体. 因此在理想导体表面, 边值关系变为

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\times\boldsymbol{E}=0,\quad \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{f}} \tag{4.68}$$

$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 是导体表面的场强. 当 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 已求出, 由第二式可求出导体表面的电流密度$\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{f}}$.

4.5 谐振腔和波导

在以理想导体为边界面的谐振腔和波导内, 电场是亥姆霍兹方程

$$\nabla^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})+k^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=0$$

满足

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$$

和边界条件 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\times\boldsymbol{E}=0$

的解. 磁场由下式给出:

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}=-\frac{\mathrm{i}}{\omega}\nabla\times\boldsymbol{E} \tag{4.69}$$

矩形谐振腔

边长分别为l_1,l_2,l_3, 以金属为边界面的矩形谐振腔内, 电场为

$$E_x=A_1\cos k_x x\sin k_y y\sin k_z z e^{-i\omega t}$$

$$E_y=A_2\sin k_x x\cos k_y y\sin k_z z e^{-i\omega t}$$

$$E_z=A_3\sin k_x x\sin k_y y\cos k_z z e^{-i\omega t} \tag{4.70}$$

$$k_x=m\pi/l_1,\ k_y=n\pi/l_2,\quad k_z=p\pi/l_3,\quad m,n,p=0,1,2\cdots \tag{4.71}$$

$$k_xA_1+k_yA_2+k_zA_3=0 \tag{4.72}$$

从(4.72)式可知, $\boldsymbol{E}$ 三个分量的振幅 A_1, A_2, A_3 中, 只有两个是独立的, 即对每一组 m,n,p

值, 有两种独立的波模. 本征频率为

$$\omega_{mnp} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{(m/l_1)^2 + (n/l_2)^2 + (p/l_3)^2} \tag{4.73}$$

当 $l_1 > l_2 > l_3$, 最低频率的波模为1,1,0 模.

矩形波导

在截面边长为 a 和 b, 以金属为管壁的矩形波导内, 沿 z 方向传播的波为

$$E_x = A_1 \cos k_x x \sin k_y y e^{i(k_z z - \omega t)}$$

$$E_y = A_2 \sin k_x x \cos k_y y e^{i(k_z z - \omega t)}$$

$$E_z = A_3 \sin k_x x \sin k_y y e^{i(k_z z - \omega t)} \tag{4.74}$$

$$k_x = m\pi/a\,,\quad k_y = n\pi/b\,,\quad m, n = 0,1,2\cdots \tag{4.75}$$

$$A_1 k_x + A_2 k_y - iA_3 k_z = 0 \tag{4.76}$$

可见, 对每一组 m, n 值, 波导内有两种独立波模.

（1）由(4.74)式和(4.69)式可推知, 在波导内只能传播横电波（TE 波）或横磁波（TM 波）, 不能传播 TEM 波；

（2）因 $k_z = \sqrt{(\omega/c)^2 - (k_x^2 + k_y^2)}$ 必须为实数, 故最低频率(截止频率)为

$$\omega_{c,mn} = \pi c\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2} \tag{4.78}$$

（3）由 $k = \omega/c = 2\pi/\lambda_0$, λ_0 是频率为 ω 的波在自由空间中的波长, 而 $k_z < k$, 故波导内的波长 λ, 相速度 $\boldsymbol{v}_\mathrm{p}$ 和群速度 $\boldsymbol{v}_\mathrm{g}$ 为

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_z} > \lambda_0\,,\quad \boldsymbol{v}_\mathrm{p} = \frac{\omega}{k_z} > c\,,\quad \boldsymbol{v}_\mathrm{g} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_z} < c \tag{4.79}$$

4.6 高斯光束 （课外阅读与讨论）

4.7 等离子体中的电磁波

等离子体是整体上为电中性或准电中性的电离物质. 因电子质量远小于正离子质量, 在热平衡状态下, 电子在等离子体内部电磁场作用下的振荡远比正离子振荡激烈. 稀薄等离子体固有振荡频率为

$$\omega_\mathrm{p} = \sqrt{n_0 e^2/m\varepsilon_0} \tag{4.78}$$

n_0 为电子密度, m 为电子质量. 当频率为 ω 的外来电磁波作用于等离子体, 且电子速度远小于光速时, 可略去磁场对电子的作用, 由运动方程

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -e\boldsymbol{E} = -e\boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)} \tag{4.79}$$

可解出电子速度

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = -\frac{ie}{m\omega}\boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)} \tag{4.80}$$

等离子体的电流密度和电导率分别为

$$\boldsymbol{J}(\omega) = -n_0 e\boldsymbol{v} = \frac{in_0 e^2}{m\omega}\boldsymbol{E}, \qquad \sigma(\omega) = \frac{in_0 e^2}{m\omega} \tag{4.81}$$

其中已假定欧姆定律 $\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E}$ 在等离子体内成立. σ 为纯虚数表明电流与作用电场 $\boldsymbol{E}$ 有 $\pi/2$ 的相位差. 稀薄等离子体内 $\varepsilon \approx \varepsilon_0$, 由(4.42), 有

$$\varepsilon' = \varepsilon_0 + i\sigma/\omega = \varepsilon_0 - n_0 e^2/m\omega^2 \tag{4.82}$$

$$k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon'} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1-\frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega^2}}, \qquad n = \sqrt{1-\frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega^2}} \tag{4.83}$$

当 $\omega > \omega_{\mathrm{p}}$, 折射率 $n < 1$, k 为实数, 电磁波可以通过等离子体, 相速度 $\boldsymbol{v} = c/n$ 大于真空中的光速 c. 因 $n < 1$, 当电磁波从真空入射到等离子体时, 若入射角 $\theta > \theta_c$ (临界角), 将发生全反射. 当 $\omega < \omega_{\mathrm{p}}$, k 为虚数, 电磁波不能通过等离子体.

4.8 光子晶体（讲座）

4.9 光学空间孤子（讲座）