

文章编号: 1000-4750(2014)05-0120-08

饱和土体中多排桩屏障对压缩快波的隔离

徐 平¹, 邓亚虹², 吴 明²

(1. 郑州大学水利与环境学院, 郑州 450001; 2. 长安大学地质工程系, 西安 710054)

摘 要: 假定桩的长度远大于直径, 将多排弹性桩组成的非连续屏障对平面压缩快波(简称 P_1 波)的隔离简化为弹性波多重散射的二维平面问题, 运用复变函数的保角映射方法和波场势函数展开法, 根据桩-土界面处应力和位移连续的边界条件, 得到散射波场势函数展开式中待定复系数的理论解。通过分析屏障后的位移比值(某点由入射和散射弹性波产生的总位移与入射弹性波单独产生的位移之比)的变化规律, 对比了单排、双排和三排桩屏障的隔离效果, 研究表明: 1) 多排桩屏障对高频入射 P_1 波的隔离效果好于低频入射 P_1 波; 2) 随着桩排数的增多, 多排桩屏障的隔离效果明显提高, 有效隔离区域明显增大; 3) 当桩排数达到三排时, 屏障后一定范围内的隔离效果提高到了 70%, 隔离效果比较理想。

关键词: 饱和土体; 多排桩; 非连续屏障; 隔离效果; 隔振设计

中图分类号: TU435 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2012.11.0890

ISOLATION OF FAST COMPRESSIVE WAVES BY BARRIERS COMPOSED OF SEVERAL ROWS OF PILES IN SATURATED SOILS

XU Ping¹, DENG Ya-hong², WU Ming²

(1. School of Water and Environment, Zhengzhou University, Zhengzhou, 450001, China;

2. Department of Geological Engineering, Chang'an University, Xi'an, 710054, China)

Abstract: The lengths of elastic piles are considered as much larger than the diameters, so the isolation of incident fast longitudinal waves (simplified as P_1 waves) by discontinuous barriers composed of several rows of piles can be simplified as a two-dimensional plane problem. The conformal mapping method of complex functions and the expansion method of wave functions are adopted, the stresses and displacements are considered as continuous at the boundaries between the piles and adjacent saturated soils, and then the theoretical solutions for the complex coefficients in the scattering wave potential functions are obtained. By studying the normalized displacement amplitudes behind the barriers, which are the ratios of displacement amplitudes of soils caused by both the incident and scattered waves to those only by the incident P_1 waves, the isolation effects of the barriers composed of one, two and three rows of piles are compared, and the results show that 1) the isolation effects of barriers composed of several rows of piles for incident P_1 waves with higher frequencies are much better than those with lower frequencies; 2) the vibration isolation effects improve obviously and effective isolation areas increase obviously with the row number of piles increase; 3) when the row number of cylindrical cavities reach three, the vibration isolation effects of some locations behind the barriers exceed 70%, which is much ideal for the vibration isolation.

Key words: saturated soils; several rows of piles; discontinuous barrier; isolation effects; vibration isolation design

收稿日期: 2012-11-22; 修改日期: 2013-03-08

基金项目: 国家自然科学基金项目(51008286; 51278467)

通讯作者: 徐 平(1977—), 男, 山东五莲人, 副教授, 博士, 从事土动力学研究(E-mail: plian127@163.com).

作者简介: 邓亚虹(1978—), 男, 湖南安化人, 副教授, 博士, 从事土动力学研究(Email: dgdyh@chd.edu.cn);

吴 明(1979—), 男, 陕西蓝田人, 讲师, 博士, 从事基坑工程研究(E-mail: ming_eagle@163.com).

非连续屏障由多个不连续个体(例如桩、柱腔)组成, 其对振动波的隔离效果虽然略低于空沟, 但其施工方便、维护费用低, 因此比空沟具有更广的应用前景。

国内外众多专家对非连续屏障的隔振效果进行了理论分析和数值模拟: Avilés 和 Sánchez-Sesma^[1-2]首次运用函数展开法, 建立了均质土体中单排桩对 S 波隔离的理论解答; Kattis 等^[3-4]采用频域边界元建立了单排圆桩和方桩隔振问题的三维模型, 求解结果表明, 桩间距是影响单排桩屏障隔振效果的决定性因素; 李志毅等^[5]以瑞利波散射的积分方程为基础, 研究了多排桩屏障对瑞利波的三维隔离问题, 指出多排桩屏障体系的隔振效果主要取决于桩的排数, 而受排距的影响较小; 时刚等^[6]推导了单排桩屏障对瑞利波散射的三维边界元方程, 研究结果表明, 通过增加单排桩的桩长和提高桩身剪切模量均能有效地提高其隔振效果; Gao 等^[7]基于 Lamb 问题得到了瑞利波散射积分方程, 利用迭代法对该方程进行了求解, 并进一步分析了弹性土体中多排桩对瑞利波的隔离问题; Lu 等^[8]对多排桩对高速列车振动的隔离问题进行了数值求解, 结论表明, 小间距、大桩长的多排桩的隔离效果最好; 徐平^[9]运用保角映射方法和波场位移势函数展开法, 对多排空心管桩屏障对平面 SV 波的隔离问题进行了理解求解和数值计算, 分析了管桩壁厚和排数等对隔离效果的影响。天然土体是由固、液、气三相介质组成的集合体, 如果孔隙为流体(通常意义上的水)所充满, 则为饱和土, 因此有必要研究饱和土体中非连续屏障的隔离效果, 但截止到目前, 未见关于饱和土体多排桩组成的非连续屏障隔离效果的相关研究报道。

饱和土体不同于一般的弹性介质, 饱和土体中可传播一种剪切波(S 波)和两种压缩波: 快压缩波(P₁波)和慢压缩波(P₂波)^[10], 该文运用复变函数的保角映射方法和波函数展开法, 得到了多排桩屏障对平面弹性波的隔离问题的理论解, 并对比了单排、双排和三排桩屏障的隔离效果, 分析了入射频率、桩排数、桩间距等对隔离效果的影响。

1 饱和土体中多排桩的波场展开

1.1 饱和土体中的波场理论

饱和土体包括以下 4 个基本控制方程^[11]:
土体应力-应变关系:

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{i,i} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \alpha p_f \delta_{ij} \quad (1)$$

渗流连续性方程:

$$-p_f = Mw_{i,i} + \alpha Mu_{i,i} \quad (2)$$

土体运动方程(不计体力):

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i + \rho_f \ddot{w}_i \quad (3)$$

流体运动方程:

$$-p_{f,i} = \rho_f \ddot{u}_i + m \ddot{w}_i + b \dot{w}_i \quad (4)$$

式中: p_f 为孔隙流体压力; λ 和 μ 为固相土骨架的 Lamé 弹性常量; u 为固相土骨架的位移; w 为孔隙流体相对于土骨架的位移; M 和 α 分别为表征土颗粒和孔隙流体压缩性的常数; δ_{ij} 为 Kronecker Delta 符号; ρ 为饱和土体的总密度: $\rho = f\rho_f + (1-f)\rho_s$, ρ_s 为土颗粒密度, ρ_f 为孔隙流体密度, f 为饱和土体的孔隙率; $m = \rho_f / f$; $b = \eta / k_d$, η 和 k_d 分别为孔隙流体的粘滞系数和渗透系数。

将式(1)和式(2)代入式(3)、式(2)代入式(4), 经过整理可得饱和土体波动问题的矢量方程:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda_c + \mu) \nabla \mathbf{u}_{i,i} + \alpha M \nabla \mathbf{w}_{i,i} = \rho \ddot{\mathbf{u}} + \rho_f \ddot{\mathbf{w}} \quad (5a)$$

$$M(\alpha \nabla \mathbf{u}_{i,i} + \mathbf{w}_{i,i}) = \rho_f \ddot{\mathbf{u}} + m \ddot{\mathbf{w}} + b \dot{\mathbf{w}} \quad (5b)$$

式中: $\lambda_c = \lambda + \alpha^2 M$; \mathbf{u} 和 \mathbf{w} 为位移矢量。

引入标量势 φ 、 ϕ 和矢量势 $\boldsymbol{\psi}$ 、 $\boldsymbol{\chi}$ 表示土骨架和孔隙流体中的波函数, 将波场作如下分解:

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi + \nabla \times \boldsymbol{\psi} \quad (6a)$$

$$\mathbf{w} = \nabla \phi + \nabla \times \boldsymbol{\chi} \quad (6b)$$

将式(6)代入式(5), 可得采用矩阵形式表示的饱和土体的波动方程:

$$\begin{bmatrix} \lambda_c + 2\mu & \alpha M \\ \alpha M & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla^2 \varphi \\ \nabla^2 \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho \omega^2 & \rho_f \omega^2 \\ \rho_f \omega^2 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7a)$$

$$\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla^2 \boldsymbol{\psi} \\ \nabla^2 \boldsymbol{\chi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho \omega^2 & \rho_f \omega^2 \\ \rho_f \omega^2 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi} \\ \boldsymbol{\chi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7b)$$

式中: ω 为入射频率; $Q = m\omega^2 + i\omega b$ 。

经求解可得饱和土体中 P₁ 波(压缩快波)、P₂ 波(压缩慢波)和 S 波(剪切波)的波数 k_1 、 k_2 和 k_s 的计算公式:

$$k_{1,2}^2 = \frac{B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (8a)$$

$$k_s^2 = \frac{C}{\mu Q} \quad (8b)$$

式中: $A = (\lambda + 2\mu)M$; $B = (\lambda_c + 2\mu)Q + \rho \omega^2 M - 2\rho_f \omega^2 \alpha M$; $C = -\rho_f^2 \omega^4 + \rho \omega^2 Q$ 。

采用势函数 ϕ_1 、 ϕ_2 和 ψ 分别表示土骨架中 P_1 波、 P_2 波和 S 波的波场， ϕ_1 、 ϕ_2 和 χ 分别表示孔隙流体中 P_1 波、 P_2 波和 S 波的波场，代入式(7)、结合式(8)可得势函数 ϕ_1 、 ϕ_2 和 χ 与 ϕ_1 、 ϕ_2 和 ψ 的转换关系：

$$\phi_1 = \gamma_1 \phi_1; \quad \phi_2 = \gamma_2 \phi_2; \quad \chi = \gamma_s \psi \quad (9)$$

其中，系数 γ_1 、 γ_2 和 γ_s 可由下式求解：

$$\gamma_{1,2} = \frac{-(\lambda_c + 2\mu)k_{1,2}^2 + \rho\omega^2}{\alpha M k_{1,2}^2 - \rho_f \omega^2} \quad (10a)$$

$$\gamma_s = -\rho_f \omega^2 / Q \quad (10b)$$

1.2 入射波场的势函数展开

交通振动、冲击荷载等人工振动产生的能量通常集中在地表 10m 以内传播(取约小于瑞利面波的半波长)，而采用多排桩进行隔振设计时，桩长要大于 10m，因此弹性波全部由桩体散射达到隔振的目的，此时可将多排桩对弹性波的隔离问题简化为二维平面问题。

饱和土体中的 P_2 波衰减很快，而且其占弹性波的总能量的比例也很小，对于爆炸、交通、重工业厂房等常见振动问题通常不考虑入射 P_2 波。入射 P_1 波和 S 波会产生耦合散射，即饱和土体的散射波中同时包含 P_1 波、 P_2 波和 S 波成分，因此在采用波函数展开法进行求解时，仅入射 P_1 波和 S 波的势函数表达式不同，而散射波和折射波的势函数表达式完全相同，求解过程完全相同，求解结果也完全相近，因此限于篇幅，本文仅给出入射 P_1 波的解答。

将由 N 根桩组成的非连续屏障对平面 P_1 波的隔离问题简化为二维平面问题，取桩中心为坐标圆心，引入 N 个局部直角坐标系 (x_j, y_j) 和复坐标系 (z_j, \bar{z}_j) ($1 \leq j \leq N$)，几何模型如图 1 所示，观测点 M 为饱和土体中的任意一点。

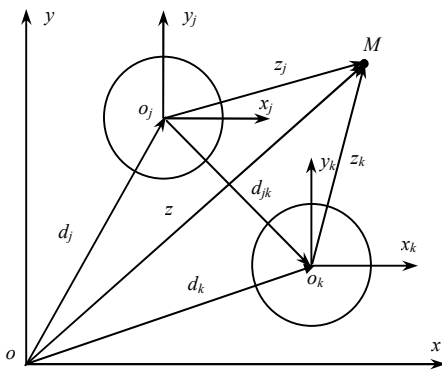


图 1 桩的分布及坐标系设置

Fig. 1 Distribution of piles and coordinate systems

取入射平面 P_1 波的幅值为 ϕ_0 ，在参考直角坐标系 (x, y) 下，饱和土体的土骨架中入射平面 P_1 波的势函数为^[1]：

$$\phi^{\text{inc}} = \phi_0 \exp[i k_1 (x \cos \beta + y \sin \beta)] \quad (11)$$

式中：上标 inc 表示入射； β 为入射 P_1 波与水平方向(即图 1 中 x 轴)的夹角。为研究和讨论方便，式(11)及以下公式中都略去了公共时间因子 $e^{-i\omega t}$ 。

在复坐标系 (z, \bar{z}) 下，入射 P_1 波的势函数为：

$$\phi^{\text{inc}} = \phi_0 \exp\left[\frac{i k_1}{2} (z e^{-i\beta} + \bar{z} e^{i\beta})\right] \quad (12)$$

复坐标系 (z, \bar{z}) 与第 j 个局部坐标系 (z_j, \bar{z}_j) 之间存在变换关系： $z = z_j + d_j$ ，式(12)可进一步表示成复坐标系 (z_j, \bar{z}_j) 下的形式：

$$\phi_j^{\text{inc}} = \phi_0 \exp\left\{\frac{i k_1}{2} [(z_j + d_j) e^{-i\beta} + (\bar{z}_j + \bar{d}_j) e^{i\beta}]\right\} \quad (13)$$

1.3 散射波场的势函数展开

参照式(13)，在复坐标 (z_k, \bar{z}_k) 下，满足稳态波动方程及 Sommerfeld 无穷远辐射条件的土骨架中散射 P_1 波势函数展开式为：

$$\phi_k^{\text{sc}}(z, \bar{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^k H_n^{(1)}(k_1 |z_k|) \left(\frac{z_k}{|z_k|}\right)^n \quad (14)$$

式中：上标 sc 表示散射； A_n^k 为待定复系数； $H_n^{(1)}(\cdot)$ 为 n 阶第一类 Hankel 函数。

第 k 根桩的散射 P_1 波对第 j 根桩来讲是入射波，而复坐标系 (z, \bar{z}) 、 (z_j, \bar{z}_j) 和 (z_k, \bar{z}_k) 之间存在变换关系： $z - d_k = z_j - d_{jk}$ ，于是，第 k 根桩的散射 P_1 波在第 j 个复坐标系 (z_j, \bar{z}_j) 下可表示成：

$$\phi_{1jk}^{\text{sc}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^k H_n^{(1)}(k_1 |z_j - d_{jk}|) \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|}\right)^n \quad (15)$$

通过叠加，观测点 M 处饱和土体的土骨架中总的散射 P_1 波的势函数展开式为：

$$\phi_1^{\text{sc}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N A_n^k H_n^{(1)}(k_1 |z_j - d_{jk}|) \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|}\right)^n \quad (16a)$$

参照式(16a)，观测点 M 处总的散射 P_2 波和 S 波的势函数可直接写出：

$$\phi_2^{\text{sc}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N B_n^k H_n^{(1)}(k_2 |z_j - d_{jk}|) \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|}\right)^n \quad (16b)$$

$$\psi^{\text{sc}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N C_n^k H_n^{(1)}(k_s |z_j - d_{jk}|) \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|} \right)^n \quad (16c)$$

式中, B_n^k 、 C_n^k 为待定复系数。

1.4 桩内折射波场的势函数展开

桩体为弹性介质, 桩体内的折射波场包括 P 波和 S 波, 与单相弹性土体内多排桩屏障相同, 第 j 根桩内的折射 P 波和 S 波的势函数展开式为^[12]:

$$\varphi_j^{\text{re}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n^j J_n(\tilde{k}_{pj} |z_j|) \left(\frac{z_j}{|z_j|} \right)^n \quad (17a)$$

$$\psi_j^{\text{re}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n^j J_n(\tilde{k}_{sj} |z_j|) \left(\frac{z_j}{|z_j|} \right)^n \quad (17b)$$

式中: 上标 re 表示折射; D_n^j 和 E_n^j 为待定复系数; $J_n(\cdot)$ 为 n 阶第一类 Bessel 函数; \tilde{k}_{pj} 和 \tilde{k}_{sj} 分别为第 j 根桩中 P 波和 S 波的波数; 上标~表示与桩体有关的参数和变量。

2 待定复系数的求解

引入保角变换: $z_j = r_j \exp(i\theta_j)$, 参照弹性介质中应力和位移的极坐标表达式^[12], 可得饱和土体中应力和位移的极坐标表达式:

$$u_r = e^{-i\theta} \frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2 - i\psi)}{\partial \bar{z}} + e^{i\theta} \frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2 + i\psi)}{\partial z} \quad (18a)$$

$$u_\theta = i e^{i\theta} \frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2 + i\psi)}{\partial z} - e^{-i\theta} \frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2 - i\psi)}{\partial \bar{z}} \quad (18b)$$

$$w_r = e^{-i\theta} \frac{\partial(\gamma_1 \varphi_1 + \gamma_2 \varphi_2 - i\gamma_s \psi)}{\partial \bar{z}} + e^{i\theta} \frac{\partial(\gamma_1 \varphi_1 + \gamma_2 \varphi_2 + i\gamma_s \psi)}{\partial z} \quad (18c)$$

$$\sigma_r = -(\lambda_c + \gamma_1 \alpha M + \mu) k_1^2 \varphi_1 - (\lambda_c + \gamma_2 \alpha M + \mu) k_2^2 \varphi_2 + 2\mu \left[e^{2i\theta} \frac{\partial^2(\varphi_1 + \varphi_2 + i\psi)}{\partial z^2} + e^{-2i\theta} \frac{\partial^2(\varphi_1 + \varphi_2 - i\psi)}{\partial \bar{z}^2} \right] \quad (18d)$$

$$\tau_{r\theta} = 2i\mu \left[e^{2i\theta} \frac{\partial^2(\varphi_1 + \varphi_2 + i\psi)}{\partial z^2} - e^{-2i\theta} \frac{\partial^2(\varphi_1 + \varphi_2 - i\psi)}{\partial \bar{z}^2} \right] \quad (18e)$$

$$p_f = (\alpha + \gamma_1) M k_1^2 \varphi_1 + (\alpha + \gamma_2) M k_2^2 \varphi_2 \quad (18f)$$

假定在桩-土界面处 ($r_j = a_j$) 饱和土体与桩体完全联结, 即应力和位移连续, 并假定桩体不透水, 则边界条件可描述为:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{\text{inc+sc}} &= \tilde{\sigma}_r^{\text{re}}; \quad \tau_{r\theta}^{\text{inc+sc}} = \tilde{\tau}_{r\theta}^{\text{re}}; \quad u_r^{\text{inc+sc}} = \tilde{u}_r^{\text{re}}; \\ u_\theta^{\text{inc+sc}} &= \tilde{u}_\theta^{\text{re}}; \quad w_r^{\text{inc+sc}} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

将式(13)、式(16)、式(17)代入式(18), 根据式(19), 经过整理可得关于待定复系数 $A_n^k \sim E_n^k$ 的无穷线性方程组:

$$\sum_{i=1}^5 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^5 P_{il}^{kn} X_{ln}^k = Y_i \quad (20)$$

式中, $X_{1n}^k = A_n^k$, $X_{2n}^k = B_n^k$, $X_{3n}^k = C_n^k$ 。矩阵元素 $P_{11}^{kn} \sim P_{33}^{kn}$ 和 $Y_1 \sim Y_3$ 的详细表达式如下:

$$\begin{aligned} P_{11}^{nk} &= -\lambda_1^* k_1^2 H_n^{(1)}(k_1 |z_j - d_{jk}|) \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|} \right)^n + \\ &\quad \frac{k_1^2 e^{2i\theta_j}}{2} H_{n-2}^{(1)}(k_1 |z_j - d_{jk}|) \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|} \right)^{n-2} + \\ &\quad \frac{k_1^2 e^{-2i\theta_j}}{2} H_{n+2}^{(1)}(k_1 |z_j - d_{jk}|) \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|} \right)^{n+2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{12}^{nk} &= -\lambda_2^* k_2^2 H_n^{(1)}(k_2 |z_j - d_{jk}|) \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|} \right)^n + \\ &\quad \frac{k_2^2 e^{2i\theta_j}}{2} H_{n-2}^{(1)}(k_2 |z_j - d_{jk}|) \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|} \right)^{n-2} + \\ &\quad \frac{k_2^2 e^{-2i\theta_j}}{2} H_{n+2}^{(1)}(k_2 |z_j - d_{jk}|) \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|} \right)^{n+2}; \end{aligned}$$

$$P_{13}^{nk} = \frac{i k_s^2 e^{2i\theta_j}}{2} H_{n-2}^{(1)}(k_s |z_j - d_{jk}|) \cdot$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|} \right)^{n-2} - \frac{i k_s^2 e^{-2i\theta_j}}{2} H_{n+2}^{(1)} \cdot \\ &(k_s |z_j - d_{jk}|) \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|} \right)^{n+2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{14}^{nk} &= \delta_{jk} (\tilde{\lambda}_j^* + \tilde{\mu}_j^*) \tilde{k}_{pj}^2 J_n(\tilde{k}_{pj} |z_j|) \left(\frac{z_j}{|z_j|} \right)^n - \\ &\quad \delta_{jk} \frac{\tilde{\mu}_j^* \tilde{k}_{pj}^2 e^{2i\theta_j}}{2} J_{n-2}(\tilde{k}_{pj} |z_j|) \left(\frac{z_j}{|z_j|} \right)^{n-2} - \\ &\quad \delta_{jk} \frac{\tilde{\mu}_j^* \tilde{k}_{pj}^2 e^{-2i\theta_j}}{2} J_{n+2}(\tilde{k}_{pj} |z_j|) \left(\frac{z_j}{|z_j|} \right)^{n+2}; \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}_{15}^{nk} = -\delta_{jk} \frac{i \tilde{\mu}_j^* \tilde{k}_{sj}^2 e^{2i\theta_j}}{2} J_{n-2}(\tilde{k}_{sj} | z_j |) \left(\frac{z_j}{|z_j|} \right)^{n-2} + \delta_{jk} \frac{i \tilde{\mu}_j^* \tilde{k}_{sj}^2 e^{-2i\theta_j}}{2} J_{n+2}(\tilde{k}_{sj} | z_j |) \left(\frac{z_j}{|z_j|} \right)^{n+2};$$

$$\mathbf{Y}_1 = [\lambda_1^* + \cos 2(\theta_j - \beta)].$$

$$k_1^2 \varphi_0 e^{i k_1 [(z_j + d_j) e^{-i\beta} + (\bar{z}_j + \bar{d}_j) e^{i\beta}] / 2};$$

$$\mathbf{P}_{21}^{nk} = i \frac{k_1^2 e^{2i\theta_j}}{2} H_{n-2}^{(1)}(k_1 | z_j - d_{jk} |) \cdot \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|} \right)^{n-2} - i \frac{k_1^2 e^{-2i\theta_j}}{2} H_{n+2}^{(1)} \cdot (k_1 | z_j - d_{jk} |) \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|} \right)^{n+2};$$

$$\mathbf{P}_{22}^{nk} = i \frac{k_2^2 e^{2i\theta_j}}{2} H_{n-2}^{(1)}(k_2 | z_j - d_{jk} |) \cdot \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|} \right)^{n-2} - i \frac{k_2^2 e^{-2i\theta_j}}{2} H_{n+2}^{(1)} \cdot (k_2 | z_j - d_{jk} |) \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|} \right)^{n+2};$$

$$\mathbf{P}_{23}^{nk} = -\frac{k_s^2 e^{2i\theta_j}}{2} H_{n-2}^{(1)}(k_s | z_j - d_{jk} |) \cdot \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|} \right)^{n-2} - \frac{k_s^2 e^{-2i\theta_j}}{2} H_{n+2}^{(1)} \cdot (k_s | z_j - d_{jk} |) \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|} \right)^{n+2};$$

$$\mathbf{P}_{24}^{nk} = -\delta_{jk} i \frac{\tilde{\mu}_j^* \tilde{k}_{pj}^2 e^{2i\theta_j}}{2} J_{n-2}(\tilde{k}_{pj} | z_j |) \left(\frac{z_j}{|z_j|} \right)^{n-2} + \delta_{jk} i \frac{\tilde{\mu}_j^* \tilde{k}_{pj}^2 e^{-2i\theta_j}}{2} J_{n+2}(\tilde{k}_{pj} | z_j |) \left(\frac{z_j}{|z_j|} \right)^{n+2};$$

$$\mathbf{P}_{25}^{nk} = \delta_{jk} \frac{\tilde{\mu}_j^* \tilde{k}_{sj}^2 e^{2i\theta_j}}{2} J_{n-2}(\tilde{k}_{sj} | z_j |) \left(\frac{z_j}{|z_j|} \right)^{n-2} + \delta_{jk} \frac{\tilde{\mu}_j^* \tilde{k}_{sj}^2 e^{-2i\theta_j}}{2} J_{n+2}(\tilde{k}_{sj} | z_j |) \left(\frac{z_j}{|z_j|} \right)^{n+2};$$

$$\mathbf{Y}_2 = -k_1^2 \sin 2(\theta_j - \beta) \varphi_0 e^{i k_1 [(z_j + d_j) e^{-i\beta} + (\bar{z}_j + \bar{d}_j) e^{i\beta}] / 2};$$

$$\mathbf{P}_{31}^{nk} = \frac{k_1 e^{i\theta_j}}{2} H_{n-1}^{(1)}(k_1 | z_j - d_{jk} |) \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|} \right)^{n-1} -$$

$$\frac{k_1 e^{-i\theta_j}}{2} H_{n+1}^{(1)}(k_1 | z_j - d_{jk} |) \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|} \right)^{n+1};$$

$$\mathbf{P}_{32}^{nk} = \frac{k_2 e^{i\theta_j}}{2} H_{n-1}^{(1)}(k_2 | z_j - d_{jk} |) \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|} \right)^{n-1} - \frac{k_2 e^{-i\theta_j}}{2} H_{n+1}^{(1)}(k_2 | z_j - d_{jk} |) \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|} \right)^{n+1};$$

$$\mathbf{P}_{33}^{nk} = i \frac{k_s e^{i\theta_j}}{2} H_{n-1}^{(1)}(k_s | z_j - d_{jk} |) \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|} \right)^{n-1} + i \frac{k_s e^{-i\theta_j}}{2} H_{n+1}^{(1)}(k_s | z_j - d_{jk} |) \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|} \right)^{n+1};$$

$$\mathbf{P}_{34}^{nk} = -\delta_{jk} \frac{\tilde{k}_{pj} e^{i\theta_j}}{2} J_{n-1}(\tilde{k}_{pj} | z_j |) \left(\frac{z_j}{|z_j|} \right)^{n-1} + \delta_{jk} \frac{\tilde{k}_{pj} e^{-i\theta_j}}{2} J_{n+1}(\tilde{k}_{pj} | z_j |) \left(\frac{z_j}{|z_j|} \right)^{n+1};$$

$$\mathbf{P}_{35}^{nk} = -\delta_{jk} i \frac{\tilde{k}_{sj} e^{i\theta_j}}{2} J_{n-1}(\tilde{k}_{sj} | z_j |) \left(\frac{z_j}{|z_j|} \right)^{n-1} - \delta_{jk} i \frac{\tilde{k}_{sj} e^{-i\theta_j}}{2} J_{n+1}(\tilde{k}_{sj} | z_j |) \left(\frac{z_j}{|z_j|} \right)^{n+1};$$

$$\mathbf{Y}_3 = -i k_1 \cos(\theta_j - \beta) \varphi_0 e^{i k_1 [(z_j + d_j) e^{-i\beta} + (\bar{z}_j + \bar{d}_j) e^{i\beta}] / 2};$$

$$\mathbf{P}_{41}^{nk} = i \frac{k_1 e^{i\theta_j}}{2} H_{n-1}^{(1)}(k_1 | z_j - d_{jk} |) \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|} \right)^{n-1} + i \frac{k_1 e^{-i\theta_j}}{2} H_{n+1}^{(1)}(k_1 | z_j - d_{jk} |) \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|} \right)^{n+1};$$

$$\mathbf{P}_{42}^{nk} = i \frac{k_2 e^{i\theta_j}}{2} H_{n-1}^{(1)}(k_2 | z_j - d_{jk} |) \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|} \right)^{n-1} + i \frac{k_2 e^{-i\theta_j}}{2} H_{n+1}^{(1)}(k_2 | z_j - d_{jk} |) \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|} \right)^{n+1};$$

$$\mathbf{P}_{43}^{nk} = -\frac{k_s e^{i\theta_j}}{2} H_{n-1}^{(1)}(k_s | z_j - d_{jk} |) \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|} \right)^{n-1} + \frac{k_s e^{-i\theta_j}}{2} H_{n+1}^{(1)}(k_s | z_j - d_{jk} |) \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|} \right)^{n+1};$$

$$\mathbf{P}_{44}^{nk} = -i \frac{\tilde{k}_{pj} e^{i\theta_j}}{2} J_{n-1}(\tilde{k}_{pj} | z_j |) \left(\frac{z_j}{|z_j|} \right)^{n-1} -$$

$$i \frac{k_p^0}{2} e^{-iq_j} J_{n+1}(k_p^0 |z_j|) \left(\frac{z_j}{|z_j|} \right)^{n+1};$$

$$P_{45}^{nk} = d_{jk} \frac{k_s^0 e^{iq_j}}{2} J_{n-1}(k_s^0 |z_j|) \left(\frac{z_j}{|z_j|} \right)^{n-1} -$$

$$d_{jk} \frac{k_s^0 e^{-iq_j}}{2} J_{n+1}(k_s^0 |z_j|) \left(\frac{z_j}{|z_j|} \right)^{n+1};$$

$$Y_4 = i k_1 \sin(q_j - b) j_0 e^{i k_1 [(z_j + d_j) e^{-ib} + (\bar{z}_j + \bar{d}_j) e^{ib}] / 2};$$

$$P_{51}^{nk} = \frac{g_1 k_1 e^{iq_j}}{2} H_{n-1}^{(1)}(k_1 |z_j - d_{jk}|) \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|} \right)^{n-1} -$$

$$\frac{g_1 k_1 e^{-iq_j}}{2} H_{n+1}^{(1)}(k_1 |z_j - d_{jk}|) \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|} \right)^{n+1};$$

$$P_{52}^{nk} = \frac{g_2 k_2 e^{iq_j}}{2} H_{n-1}^{(1)}(k_2 |z_j - d_{jk}|) \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|} \right)^{n-1} -$$

$$\frac{g_2 k_2 e^{-iq_j}}{2} H_{n+1}^{(1)}(k_2 |z_j - d_{jk}|) \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|} \right)^{n+1};$$

$$P_{53}^{nk} = i \frac{g_s k_s e^{iq_j}}{2} H_{n-1}^{(1)}(k_s |z_j - d_{jk}|) \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|} \right)^{n-1} +$$

$$i \frac{g_s k_s e^{-iq_j}}{2} H_{n+1}^{(1)}(k_s |z_j - d_{jk}|) \left(\frac{z_j - d_{jk}}{|z_j - d_{jk}|} \right)^{n+1};$$

$$Y_5 = -i g_1 k_1 \cos(q_j - b) j_0 e^{i k_1 [(z_j + d_j) e^{-ib} + (\bar{z}_j + \bar{d}_j) e^{ib}] / 2}.$$

式中, $I_i^* = (I_c + g_i a M) / m + 1$ (其中 $i = 1, 2$).

方程组式(20)的系数为 $5N \times [5N(2\bar{n} + 1)]$ 阶矩阵 (\bar{n} 为波函数展开式截取的有效项数), 在计算时将其处理成一个方阵, 具体方法如下: 在式(20)的左右两端同时乘以变量 $\exp(-imq_j)$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, L$), 然后对变量 q_j 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上求定积分。经整理可得到关于待定复系数 $A_n^k \sim E_n^k$ 理论解的无穷线性方程组:

$$\sum_{i=1}^5 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^5 P_{il}^{knm} X_{ln}^k = Y_i^m \quad (21)$$

$$P_{il}^{knm} = \int_{-\pi}^{\pi} P_{il}^{kn} e^{-imq_j} dq_j \quad (22a)$$

$$Y_i^m = \int_{-\pi}^{\pi} Y_i e^{-imq_j} dq_j \quad (22b)$$

在对式(21)进行编程求解时, 有效项数 \bar{n} 通常按下式进行截取:

$$|v_{\bar{n}+1} - v_{\bar{n}}| \leq |v_{\bar{n}}| \times 5\% \quad (23)$$

式中, $v_{\bar{n}}$ 和 $v_{\bar{n}+1}$ 为 n 分别取 \bar{n} 和 $\bar{n} + 1$ 计算得到的结果(散射 P_1 、 P_2 波和 S 波产生的总的竖向位移)。

3 隔离效果分析

为简化计算, 取所有桩的半径 a 相同, 且均匀布置, 设入射波垂直于屏障入射, 即 $b = \pi / 2$ 。为了分析屏障的隔离效果, 引入位移比值(屏障后某点由入射 P_1 波和散射 P_1 波、 P_2 波、S 波产生的位移之和 v_y 与未设屏障时由入射 P_1 波单独产生的位移 v_0 的比值): $|v_y / v_0|$, 位移比值越小, 说明屏障的隔离效果越好。

取饱和土体的物理力学参数见表 1^[13], 桩土剪切模量比 $\mu^* = 500$, 密度比 $\rho^* = 1.35$ 。

表 1 饱和土体的物理力学参数

Table 1 Physical and mechanical parameters of saturated soils

f	$\rho_s / (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	$\rho_f / (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	μ / MPa	α	$\eta / (\text{Pa} \cdot \text{s})$	M / MPa	k_d / m^2
0.3	2650	1000	43.6	0.94	1×10^{-3}	96.49	10^{-10}

Avilés 和 Sánchez-Sesma^[1-2]的研究表明, 当 $d/a = 3.0$ 时, 单排桩屏障的隔离效果最佳, 因此本文取桩的间距为 $d/a = 3.0$, 如图 2 所示, 坐标原点 o 取第 1 排左数第 1 根桩的中心点, 坐标轴 x 和 y 分别沿排桩方向和垂直排桩方向, 计算时, 单排桩取 $N = 8$, 双排桩取 $N = 17$, 三排桩取 $N = 25$ 。

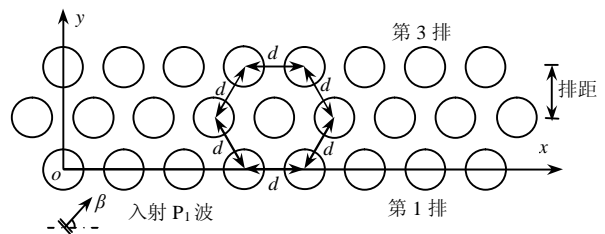


图 2 多排桩的布置

Fig.2 Arrangement of several rows of piles

3.1 入射频率对隔离效果的影响

定义入射 P_1 波的无量纲频率为 $\text{Re}(k_1 a)$, 分别取 $\text{Re}(k_1 a) = 0.2$ (低频) 和 $\text{Re}(k_1 a) = 1.0$ (高频), 桩的排距取 $\sqrt{3}a$ (即桩按正三角形布置), 绘制了单排、双排和三排桩屏障后一定区域 ($0 \leq x/a \leq 21$, $0 \leq y/a \leq 500$) 的 $|v_y / v_0|$ 等值线, 如图 3~图 5 所示。

比较图 3~图 5 可以发现:

- 1) 对所有的屏障, 屏障后 $|v_y / v_0|$ 的变化规律基本相同: 在屏障后靠近屏障的区域内 $|v_y / v_0|$ 等值线的梯度大, 两相邻等值线的间距小; 而离屏障

较远的区域内 $|v_y/v_0|$ 等值线的梯度小, 两相邻等值线之间的间距大。

2) 对于相同的排桩屏障, 对高频 ($\text{Re}(k_1a) = 1.0$) 的振动波的隔离效果比低频 $\text{Re}(k_1a) = 0.2$ 更有效, 以三排桩为例, 对于屏障后靠近屏障的 $y/a \leq 300$ 区域, 对高频 ($\text{Re}(k_1a) = 1.0$) 入射波的隔离效果 $\geq 70\%$, 而对低频 ($\text{Re}(k_1a) = 0.2$) 入射波的隔离效果 $\geq 50\%$, 即使如此, 后者也比较理想, 总之, 三排桩屏障可以隔离掉 50% 以上的入射波。

3) 随着桩排数的增大, ① 屏障对入射波的隔离效果明显提高, 以 $\text{Re}(k_1a) = 1.0$ 和 $y/a \leq 300$ 区域为例, 对于单排、双排、三排桩屏障, 隔离效果分别大于 39%、58%、70% (即 $|v_y/v_0|$ 分别小于 0.61、0.42、0.30); ② 有效隔离区域明显扩大, 以 $\text{Re}(k_1a) = 1.0$ 为例, 对于单排、双排、三排桩屏障, 隔离效果 $\geq 70\%$ 的区域分别为 $0 < y/a \leq 170$ 、 $0 < y/a \leq 300$ 。

在进行隔振设计时, 我们通常采用 2 种做法:

1) 主动隔振, 适应于尺寸较小且独立的振源, 例如机器基础, 围绕振源设置屏障, 减小振动能量的输出; 2) 被动隔振, 适应于分布范围较广或连续的振源, 例如铁路和重载公路, 在重要建筑或精密仪器等周围设置屏障, 减小振动能量的输入。因此对于 1) 和 2) 多排桩屏障都接近于屏障后中心位置处的最佳隔离效果。

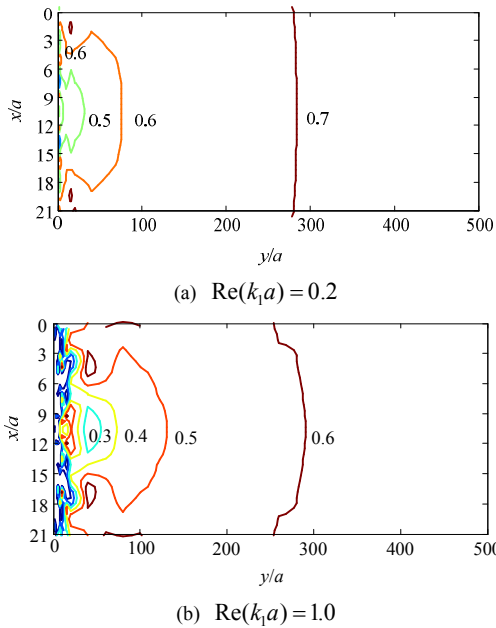


图 3 单排 8 根桩屏障后 $|v_y/v_0|$ 等值线
Fig.3 Contours of $|v_y/v_0|$ behind a row of 8 piles

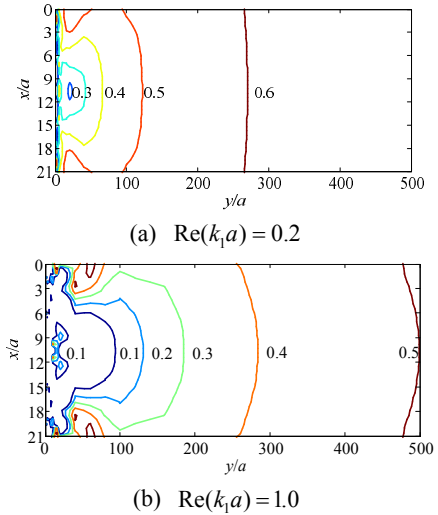


图 4 双排 17 根桩屏障后 $|v_y/v_0|$ 等值线(排距 $\sqrt{3}a$)
Fig.4 Contours of $|v_y/v_0|$ behind two rows of 17 piles with row distances of $\sqrt{3}a$

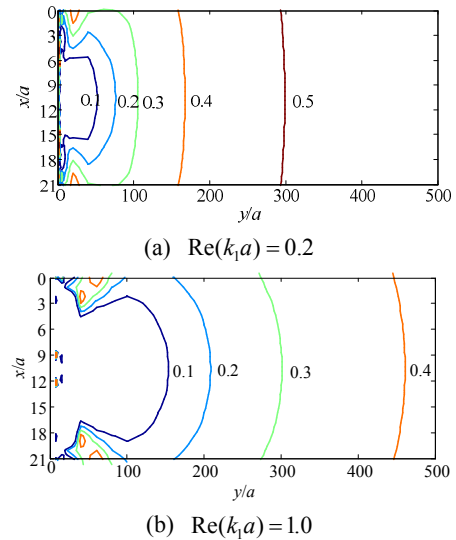
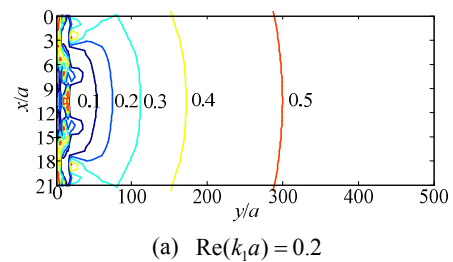


图 5 三排 25 根桩后 $|v_y/v_0|$ 等值线(排距 $\sqrt{3}a$)
Fig.5 Contours of $|v_y/v_0|$ behind three rows of 25 piles with row distances of $\sqrt{3}a$

3.2 桩的排距对隔离效果的影响

取排距为 $3a$ (见图 2), 其他参数同图 5, 绘制了三排 25 根桩后一定区域 ($0 \leq x/a \leq 21$, $0 \leq y/a \leq 500$) 的 $|v_y/v_0|$ 等值线, 如图 6 所示。



(a) $\text{Re}(k_1a) = 0.2$

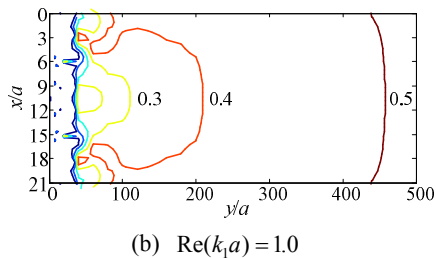


图6 三排25根桩后 $|v_y/v_0|$ 等值线(排距 $3a$)
Fig.6 Contours of $|v_y/v_0|$ behind three rows of 25 piles
with row distances of $3a$

比较图5和图6可以发现：①对于低频($\text{Re}(k_1 a) = 0.2$)入射 P_1 波，三排桩屏障的排距对隔离效果影响很小，仅屏障附近位置出现位移波动，远处的位移比值 $|v_y/v_0|$ 基本相同；②而对于高频($\text{Re}(k_1 a) = 1.0$)入射 P_1 波，三排桩屏障的排距对隔离效果影响较大，隔离效果随排距的增大而有所减小。

因此在实际隔振设计时，要测试振动波的频率，确定高频和低频后，再根据隔振目的和预期隔振效果确定桩的排数和间距等参数。

4 结论

运用复变函数的保角映射方法和波场势函数展开法，得到了饱和土体中多排桩屏障对各种平面 P_1 波隔离问题的理论解，通过数值计算得到以下主要结论：

(1) 随着桩排数的增多，屏障的有效隔离效果明显提高、有效隔离区域明显增大。

(2) 多排桩屏障对高频入射平面 P_1 波的隔离效果好于低频入射平面 P_1 波。

(3) 当桩排数达到三排时，屏障后的较广区域内($y/a \leq 300$)，对高频($\text{Re}(k_1 a) = 1.0$)入射波的隔离效果 $\geq 70\%$ ，而对低频($\text{Re}(k_1 a) = 0.2$)入射波的隔离效果 $\geq 50\%$ ，隔离效果非常理想。

(4) 多排桩的排距对低频入射 P_1 波的隔离效果影响很小；而对高频入射 P_1 波的隔离效果影响较大，随着排距的增大，隔离效果有所减小。

参考文献：

[1] Avilés J, Sánchez-Sesma F J. Piles as barriers for elastic waves [J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1983, 109(9): 1133—1146.
[2] Avilés J, Sánchez-Sesma F J. Foundation isolation from vibrations using piles as barriers [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1988, 114(11): 1854—1870.

[3] Kattis S E, Polyzos D, Beskos D E. Modelling of pile wave barriers by effective trenches and their screening effectiveness [J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 1999, 18(1): 1—10.
[4] Kattis S E, Polyzos D, Beskos D E. Vibration isolation by a row of piles using a 3-D frequency domain BEM [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, 46(5): 713—728.
[5] 李志毅, 高广运, 邱畅, 等. 多排桩屏障远场被动隔振分析[J]. *岩石力学与工程学报*, 2005, 24(21): 3990—3995.
Li Zhiyi, Gao Guangyun, Qiu Chang, et al. Analysis of multi-row of piles as barriers for isolating vibration in far field [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2005, 24(21): 3990—3995. (in Chinese)
[6] 时刚, 高广运. 饱和地基中单排桩远场被动隔振研究[J]. *振动工程学报*, 2010, 23(5): 546—553.
Shi Gang, Gao Guangyun. Three-dimensional analysis of a row of piles as passive barriers in saturated soil [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2010, 23(5): 546—553. (in Chinese)
[7] Gao G Y, Li Z Y, Yue Z Q. Three-dimensional analysis of rows of piles as passive barriers for ground vibration isolation [J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2006, 26(11): 1015—1027.
[8] Lu J F, Xu B, Wang J H. A numerical model for the isolation of moving-load induced vibrations by pile rows embedded in layered porous media [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2009, 46(21): 3771—3781.
[9] 徐平. 多排弹性空心管桩屏障对平面SV波的隔离[J]. *岩土工程学报*, 2011, 33(3): 392—397.
Xu Ping. Rows of elastic hollow pipe piles as isolation barriers for plane SV waves [J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2011, 33(3): 392—397. (in Chinese)
[10] Biot M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. low-frequency range [J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1956, 28(2): 168—178.
[11] Liu D K, Gai B Z, Tao G Y. Applications of the method of complex function to dynamic stress concentration [J]. *Wave Motion*, 1982, 4(3): 293—304.
[12] 徐平. 多排桩非连续屏障对平面弹性波的隔离[J]. *岩石力学与工程学报*, 2012, 31(增刊1): 3159—3166.
Xu Ping. Isolation of plane elastic waves by discontinuous barriers composed of several rows of piles [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2012, 31(Suppl 1): 3159—3166. (in Chinese)
[13] 吴世明. 土介质中的波[M]. 北京: 科学出版社, 1997: 80—84.
Wu Shiming. *Wave propagation in soils* [M]. Beijing: Science Press, 1997: 80—84. (in Chinese)