

基于高斯伪谱法的滑翔弹道优化算法研究*

李铁鹏¹, 王中原², 陈琦², 乔磊³, 乔相信³

(1 海军装备部, 北京 100800; 2 南京理工大学能源与动力工程学院, 南京 210094;

3 沈阳理工大学装备工程学院, 沈阳 110159)

摘要: 为了提高滑翔增程制导炮弹方案弹道的优化效率, 提出了一种基于高斯伪谱法的方案弹道优化方法。以滑翔时间最短为性能指标, 滑翔舵偏角为设计变量, 建立了纵向平面内弹道优化模型, 采用高斯伪谱法对状态量和控制量进行了离散, 将最优控制问题转换为非线性规划问题, 并利用序列二次规划法对其进行了求解, 仿真结果表明该方法收敛域大, 对初值不敏感, 优化精度高, 可为远程制导炮弹的方案弹道优化设计提供一定的参考。

关键词: 高斯伪谱法; 滑翔制导炮弹; 弹道; 优化; 算法

中图分类号: TJ413.6 **文献标志码:** A

Study of Gliding Trajectory Optimization Algorithm Based on Gauss Pseudospectral Method

LI Tiepeng¹, WANG Zhongyuan², CHEN Qi², QIAO Lei³, QIAO Xiangxin³

(1 Navy Armament Division, Beijing 100800, China;

2 School of Energy and Power Engineering, NUST, Nanjing 210094, China;

3 School of Equipment Engineering, Shenyang Ligong University, Shenyang 110159, China)

Abstract: In order to enhance the efficiency of trajectory optimization algorithm for gliding guided projectiles, a Gauss pseudospectral method was presented. The flight time and angle of attack deflection were chosen as the performance function and control variable respectively, the end trajectory slope angle and velocity were also restrained for guarantee of attack effect, the trajectory optimization model was established and transcribed into a discrete nonlinear programming problem (NLP) by using the Gauss pseudospectral method, and solved by sequence quadratic programming algorithms. The simulation results show that the Gauss pseudospectral has a large convergence domain, and is less sensitive to the initial guess and can obtain high precise solutions. These results can provide a useful tool for nominal trajectory design of guided projectiles.

Keywords: Gauss pseudospectral method; gliding guided projectile; trajectory; optimization; algorithm

0 引言

滑翔增程弹出口后, 尾翼张开保持稳定飞行, 一段时间后火箭助推发动机开始启动, 当弹丸到达弹道顶点附近时, 鸭舵展开, 开始对弹丸实施控制, 最终命中目标。滑翔增程制导炮弹具有反应速度快、效费比高、使用灵活并且可打击静止和运动目标等优势, 同时也克服了传统火炮射程不远, 精度不高等缺点, 目前已经逐渐受到各国的重视。易文俊等^[1]对滑翔增程弹的飞行原理进行了较为详细的介绍; 史金光等^[2-4]分析了滑翔弹道的特性, 并利用最大升阻比的方法以及序列二次规划法对滑翔弹道优化问题进行

了研究, 得到了最优俯仰舵偏角规律。

近年来, 离散控制变量和状态变量一类直接法中的伪谱方法, 由于在计算效率上的优势, 逐渐成为最优控制问题求解方法的研究热点。这些方法在配点处利用全局多项式来逼近状态量和控制量, 同时采用微分矩阵近似微分方程。该方法源自于求解流体力学中广泛使用的光谱法, 收敛速度明显高于传统方法。在常见的几种伪谱法中, 高斯伪谱法是一种较新的方法, 在同时存在路径和一般动力学微分方程约束的条件下, 高斯伪谱法得到的非线性规划问题的 KKT (Karush-Kuhn-Tucker) 条件与离散的哈密顿边值问题 (HBVP) 的一阶最优条件具有等价性, 这在理论上证

* 收稿日期: 2013-10-25

作者简介: 李铁鹏 (1962-), 男, 宁夏人, 高级工程师, 研究方向: 弹药工程; 通讯作者: 乔相信, 教授, E-mail: xxq2002@163.com。

明了高斯伪谱法的最优性,此外,高斯伪谱法在处理含初始和终端约束的问题上具有较大的优势^[5]。为此,文中以弹丸飞行时间为性能指标对滑翔弹道进行了优化设计,选取滑翔舵偏角为优化变量,对弹丸末端存速、落角进行一定的限制,在纵向平面内建立了弹道优化模型;利用高斯伪谱法将模型转换为非线性规划问题,降低了弹道优化耗时,缩短了滑翔弹的作战反应时间,同时也为今后实现算法的实时性提供了理论依据。

1 弹道优化模型

1.1 滑翔增程弹运动方程

在忽略地球自转,假设系统瞬时平衡,同时不考虑弹体转动以及侧向运动的情况下,滑翔增程弹的动力学模型可以简化的利用四个状态变量来描述,如下式:

$$\begin{cases} \dot{v} = -qS[C_{x0BW}(1+k\alpha^2) + C_{x0\delta}(1+k'\delta^2)]/m - g\sin\theta \\ \dot{\theta} = qS[C_y^\alpha\alpha + C_y^{\delta^2}(\alpha + \delta)]/mv - g\cos\theta/v \\ \dot{x} = v\cos\theta \\ \dot{y} = v\sin\theta \end{cases} \quad (1)$$

式中: q 为动压; S 为参考面积; k 和 k' 分别为弹翼组合体和舵面的诱导阻力系数; C_{x0BW} 和 $C_{x0\delta}$ 分别为弹翼组合体和舵面的零升阻力系数; C_y^α 和 $C_y^{\delta^2}$ 分别为弹翼组合体和舵面的升力系数导数。 α 和 δ 分别为平衡攻角和舵偏角,且有 $m_z^\alpha\alpha + m_z^\delta\delta = 0$,其中 m_z^α 为力矩系数对攻角的导数, m_z^δ 为力矩系数对舵偏角的导数。方程中其他变量的意义参见文献[6]。

1.2 优化性能指标和约束条件

为了提高滑翔增程制导炮弹的作战反映能力,需要使其在尽量短的时间内命中目标,同时为了保证对目标的毁伤效果,还要对弹道末端速度和落角进行一定的限制。由以上分析可知,弹道优化问题实际上是一个动态优化问题,其优化模型可表示如下:

1) 初始状态约束。初始状态固定为弹道最高点处状态。

2) 终端状态约束。为了保证最终的攻击效果,同时考虑到与末制导的平稳交接,需对滑翔终端位置、速度和落角进行约束,即:

$$\begin{aligned} x(t_f) &= x_f, y(t_f) = y_f \\ v(t_f) &\geq v_f, \theta(t_f) \geq \theta_f \end{aligned}$$

3) 控制量约束。由于无控段舵偏角为 0,为了保

证无控段和滑翔段较为平滑的衔接,需对滑翔起始舵偏角进行限定;同时考虑到弹体的控制性能,也要对舵偏角的幅值进行约束,即:

$$|\delta_{zB}(t_0)| \leq 2^\circ, |\delta_{zB}(t)| \leq \delta_{z,\max}$$

4) 性能指标。为了实现快速打击的要求,性能指标取为攻击时间最短,即:

$$J = \min t_f$$

可见,滑翔弹道优化问题是一个起始状态固定,终端状态受约束,终端时刻自由的非线性动态优化问题。

2 高斯伪谱法

高斯伪谱法在一系列的 Legendre-Gauss (LG) 节点上将状态变量和控制变量进行离散,并且利用这些离散点构造全局 Lagrange 插值多项式来近似系统的动力学方程。从而将连续的无限维最优控制问题转换为非线性规划问题进行求解,目前该方法已经逐渐受到重视。

2.1 系统微分方程的离散

考虑一般形式的非线性系统动力学方程:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (2)$$

其中, $x(t) \in R^n$ 为状态向量, $u(t) \in R^m$ 为控制向量, $f: R^n \times R^m \times R \rightarrow R^n$ 为连续向量函数。采用高斯伪谱法需要将时间区域 $[t_0, t_f]$ 转换到 $[-1, 1]$ 上,为此引入变量 τ 对时间 t 进行变换^[6],即:

$$t = \frac{t_f - t_0}{2}\tau + \frac{t_f + t_0}{2} \quad (3)$$

因此,系统动力学方程变为:

$$\dot{x}(\tau) = \frac{t_f - t_0}{2}f(x(\tau), u(\tau), \tau) \quad (4)$$

利用数值分析的知识,选取 N 个 Lagrange 插值基函数 L_k 近似逼近状态向量,可得:

$$x(\tau) \approx X(\tau) = \sum_{i=0}^N L_i(\tau)X(\tau_i) = \sum_{i=0}^N L_i(\tau) X_i \quad (5)$$

$$L_i(\tau) = \prod_{j=0, j \neq i}^N \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} \quad (6)$$

其中, $\tau_k (k = 0, \dots, N)$ 为 N 次 Legendre 正交多项式 $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$ 的零点。

对(6)式进行求导,可得:

$$\dot{x}(\tau_k) \approx \dot{X}(\tau_k) = \sum_{i=0}^N \dot{L}_i(\tau_k) X_i = \sum_{i=0}^N D_{k,i} X_i \quad (7)$$

$$D_{k,i} = \dot{L}_i(\tau_k) \quad (8)$$

其中, $i = 0, 1, \dots, N; k = 1, 2, \dots, N, D$ 是一个 $N \times (N + 1)$ 的矩阵, 称为微分矩阵, 其值可通过下式计算:

$$D_{k,i} = \sum_{l=0}^N \left[\prod_{j=0, j \neq i, l}^N (\tau_k - \tau_j) \right] / \left[\prod_{j=0, j \neq i}^N (\tau_i - \tau_j) \right] \quad (9)$$

那么状态方程(2)可用微分矩阵在节点上离散:

$$\sum_{i=0}^N D_{k,i} X_i = \frac{t_f - t_0}{2} f(X_k, U_k, \tau_k), k = 1, 2, \dots, N \quad (10)$$

因此便可将一般形式的系统动力学方程在 N 个 LG 节点上转换为代数方程, 即:

$$X_i = X_0 + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^N A_{ik} \cdot f(X_k, U_k, \tau_k) \quad (11)$$

2.2 边界条件和性能指标离散

① 边界条件的离散。式(11)仅将状态量进行了离散, 文中所考虑的弹道优化问题还包含终端状态约束, 需对其进行离散。终端状态可通过积分式(2)得到, 如下式所示:

$$X_{t_f} = X_0 + \frac{t_f - t_0}{2} \int_{-1}^1 f(x(\zeta), u(\zeta), \zeta) d\zeta \quad (12)$$

采用高斯积分法可进一步得到:

$$X_{t_f} = X_0 + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^N \omega_k \cdot f(X_k, U_k, \tau_k) \quad (13)$$

② 性能指标的离散。文中所提的性能指标不包含积分项。因此无需对其进行离散, 如下式:

$$J = \Phi(x_f, t_f) = t_f \quad (14)$$

根据以上的数学变换, 文中的弹道优化问题可以描述为: 在 $[t_0, t_f]$ 时间内 (t_f 为未知的弹道末端时刻), 确定离散点上的状态向量 $X_i (i = 1, \dots, N)$ 、控制向量 $U_i (i = 1, \dots, N)$ 和终端时刻 t_f , 使得性能指标式(14)最小, 并满足系统动力学方程约束式(11)、终端状态约束式(13)以及原问题的边界条件和过程约束。从而将连续的无限维最优控制问题转换为一般的非线性规划问题。目前对于非线性规划问题的求解有许多方法, 文中选取在稳定性和精度上均具有优势的序列二次规划软件包^[8](SNOPT)进行求解。

3 算例仿真与分析

以某滑翔增程制导炮弹为对象进行数值仿真。当炮弹达到弹道最高点时的高度为 $y_0 = 9\ 700\text{ m}$, 速度为 $V_0 = 300\text{ m/s}$, 弹道倾角为 $\theta_0 = 0$, 滑翔末端高度取为 $y_f = 2\ 000\text{ m}$, 末端弹道倾角约束为 $\theta(t_f) \geq \theta_f = 40^\circ$, 速度约束为 $v(t_f) \geq v_f = 200\text{ m/s}$, 控制量约束为 $|\delta_{\text{SB}}(t)| \leq 15^\circ$ 。取弹道最高点处 $x_0 = 0$, 对目标 $x_T = 30\text{ km}, 40\text{ km}, 50\text{ km}$ 分别进行仿真计算, LG 节点个数

取为 35, 仿真结果见表 1 和表 2 及图 1 ~ 图 5 所示。其中表 1 中的 t_{cost} 为程序运行 10 次后取平均值得到的结果。

表 1 不同射程条件下优化结果

x_T/km	t_f/s	$\theta(t_f)/(\text{°})$	$v(t_f)/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	t_{cost}/s
30	122.79	-40.03	217.91	3.220 2
40	170.85	-40.00	201.70	3.578 7
50	230.04	-40.61	200.00	1.661 5

从表 1 可知, 随着给定射程的增大, 滑翔弹道飞行时间增大, 落速减小, 但最终均满足落速约束 ($\geq 200\text{ m/s}$), 落角变化较小, 并且均满足落角约束 ($\geq 40^\circ$)。优化过程耗时最长为 3.578 7 s, 这说明利用伪谱法进行弹道优化效率十分显著。

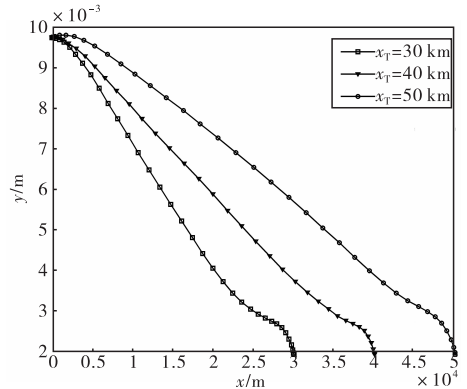


图 1 不同射程弹道曲线

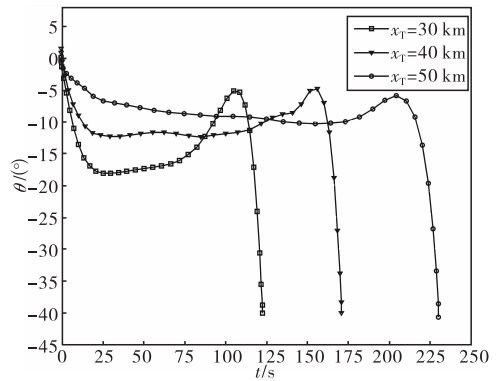


图 2 不同射程弹道倾角曲线

从图 1 可见, 制导炮弹在经过弹道最高点后, 近乎以直线滑翔, 当高度达到 3 km 左右时, 弹道趋于平缓, 之后便逐渐陡峭, 开始俯冲, 这是由于为了使弹丸平滑的过渡到末制导阶段, 对末端条件进行约束所致。图 2 也很明显的反映出弹道倾角在经过短暂的减小后, 在较长的时间内保持不变, 验证了弹丸近似直线飞行, 当接近弹道末端时, 弹道倾角先增加后急剧减小, 说明弹丸开始俯冲, 最终落角均大于 40° , 满足设计指标。

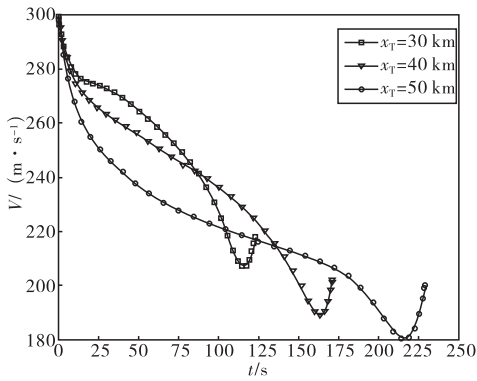


图 3 不同射程速度曲线

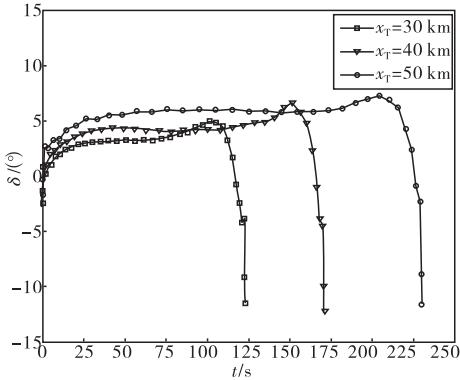


图 4 不同射程舵偏角曲线

图 3 描述了滑翔过程中速度的变化规律,可以发现速度先逐渐减小,当接近弹道末端时开始增大,这是由于为了保证攻击效果,对末端存速进行限制所致,并且最终速度均保持在 200 m/s 以上,满足设计指标。从图 4 的舵偏角曲线中可以看出,为了保证滑翔效果,舵偏角先以较快的速度增加,之后变化非常缓慢,近乎为定值,最后为了实现俯冲,二者转为负值,并且其绝对值急剧增大。

4 不同优化方法的对比

为考核高斯伪谱法的正确性,取 $x_T = 50 \text{ km}$ 条件,均匀离散点个数为 35,且在同样的平台上进行计算。将文中计算结果与直接配点法进行了对比,二者的优化结果见表 2。图 5 为直接配点法和文中方法得到的最优控制量的对比曲线。从图 5 可看出,两种方法优化得到的控制量 δ 非常接近,结合表 2 中数据可看出,二者的最大相对误差为 6.84%;同时也可发现,文中方法得到的方案弹道飞行时间更短,并且两种方法得到的末端状态均满足设计指标,但由文中方法得到的落角及末端存速更大。

表 2 不同方法优化结果对比

方法	t_f/s	$\theta(t_f)/(^{\circ})$	$v(t_f) / (m \cdot s^{-1})$	δ 最大相对误差 /%
直接配点法	232.34	-40.61	200.00	6.84
文中方法	230.04	-43.17	233.33	

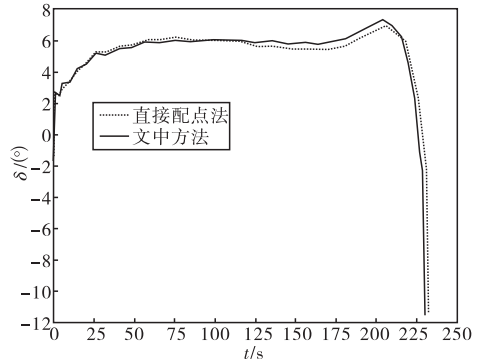


图 5 不同方法攻角曲线对比

5 结论

文中建立了以飞行时间最短为性能指标的滑翔弹道优化模型,采用高斯伪谱法对该模型进行了求解,并与传统的直接配点法进行了对比研究。仿真结果表明,该算法优化出的滑翔弹道的末端存速及着角均能严格满足相关约束条件,计算精度高,计算时间较短,收敛域大,对初值不敏感,可为远程制导炮弹的弹道优化设计提供参考。

参考文献:

- [1] 易文俊,王中原,史金光,等. 带鸭舵滑翔增程炮弹方案弹道研究[J]. 南京理工大学学报:自然科学版,2008,32(3):322-326.
- [2] 史金光,王中原,易文俊. 滑翔增程弹方案弹道特性研究[J]. 弹道学报,2003,15(1):51-54.
- [3] 史金光,王中原,涂泗华. 求解滑翔增程弹较优舵偏角方法[J]. 弹箭与制导学报,2005,25(4):717-719.
- [4] 史金光,王中原,易文俊. 滑翔增程弹飞行弹道[J]. 火力与指挥控制,2007,32(11):88-90.
- [5] Benson D A. A Gauss pseudospectral transcription for optimal control [D]. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology,2005.
- [6] 钱杏芳,林瑞雄,赵亚男. 导弹飞行力学[M]. 北京:北京理工大学出版社,2008.
- [7] 关治,陆金甫. 数值分析基础[M]. 北京:高等教育出版社,2005.
- [8] Gill P E, Murray W, Saunders M A. SNOPT: An SQP algorithm for large-scale constrained optimization[J]. SIAM Journal on Optimization, 2002, 12(4): 979-1006.