

Arc Welding Robot Kinematics Analysis and Trajectory Planning in Cartesian Space

Tao Song

School of Mechanical Engineering and Automation, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing
Email: songtao828@gmail.com

Received: Jan. 14th, 2013; revised: Jan. 29th, 2013; accepted: Feb. 5th, 2013

Abstract: Arc welding robots, as typical 6-DOF serial robots, are gradually playing an important role in the automotive and other industries. In this paper, taking an independently designed arc welding robot as an example, demonstrated the establishment of D-H coordinate system, the robot kinematic analysis, and run a robot Cartesian space of linear and circular trajectory planning based on previous work. Employing a MFC application program, the derivatively generated data points are plotted in the Matlab to verify the correctness of the theoretical calculations.

Keywords: Arc Welding Robot; Kinematics Analysis; Cartesian Space; Trajectory Planning

弧焊机器人运动学分析及笛卡尔空间轨迹规划

宋 涛

北京航空航天大学机械工程及自动化学院, 北京
Email: songtao828@gmail.com

收稿日期: 2013 年 1 月 14 日; 修回日期: 2013 年 1 月 29 日; 录用日期: 2013 年 2 月 5 日

摘 要: 弧焊机器人作为一种典型的 6 自由度串联机器人, 在汽车等行业中发挥着越来越重要的作用。本文以一款自主研发的弧焊机器人为实例, 建立 D-H 坐标系, 进行机器人的运动学分析, 并在此基础上完成机器人笛卡尔空间的直线和圆弧轨迹规划。编写 MFC 应用程序, 将生成的数据点在 Matlab 平台上进行绘图, 验证理论计算的正确性。

关键词: 弧焊机器人; 运动学分析; 笛卡尔空间; 轨迹规划

1. 引言

6 自由度串联机器人是工业机器人的重要组成部分, 而弧焊机器人作为串联机器人的一种典型应用, 在汽车等行业发挥着十分重要的作用^[1]。由于弧焊机器人的作业特点, 即要求焊枪在移动过程中, 不仅经过起始点和终止点, 而且要经过规划出的若干中间点 (continuous-path motion), 因而对机器人笛卡尔空间的轨迹规划就十分必要^[2]。

本文以课题组和企业共同研制的一款 6 自由度机器人为实例, 建立 D-H 坐标系, 进行机器人的运动学

分析^[3]。然后在笛卡尔空间进行直线和圆弧的位置规划^[4-6], 并利用四元数插值完成其姿态规划^[7]。最后, 利用编写的 MFC 应用程序, 将生成的数据点在 Matlab 平台上进行绘图^[8], 验证理论计算的正确性, 为机器人的逆解求出关节位置奠定了基础^[9]。

2. 运动学分析

2.1. 建立 D-H 坐标系

该款自主研发的弧焊机器人如图 1 所示, 其中 2、3、4 关节轴线相互平行。

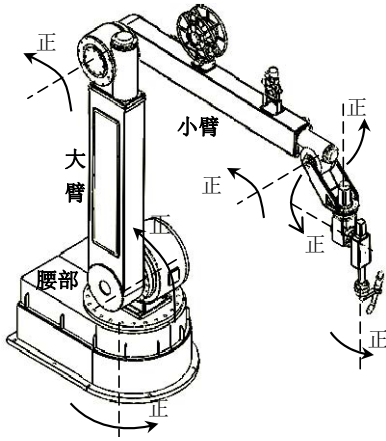


Figure 1. Structure diagram of arc welding robot
图 1. 弧焊机器人结构图

对该机器人进行运动学建模,按照 D-H 方法建立其连杆坐标系,如图 2 所示。各连杆的结构参数和运动参数,如表 1 所示。

其中 $a_1 = 165 \text{ mm}$, $a_2 = 2003 \text{ mm}$,
 $a_3 = 2040 \text{ mm}$, $a_4 = 300 \text{ mm}$, $d_1 = 1000 \text{ mm}$,
 $d_4 = 66.5 \text{ mm}$, $d_5 = 525 \text{ mm}$ 。

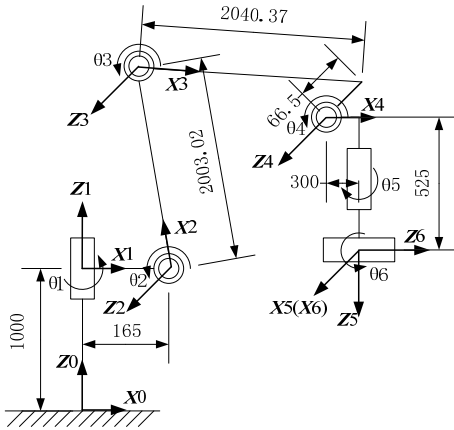


Figure 2. The establishment of D-H coordinate system
图 2. D-H 坐标系的建立

Table 1. The D-H parameter
表 1. D-H 参数表

i	α_{i-1}	α_{i-1}	θ_i	d_i
1	0	0	θ_1	d_1
2	90°	a_1	θ_2	0
3	0	a_2	θ_3	0
4	0	a_3	θ_4	d_4
5	90°	a_4	θ_5	d_5
6	90°	0	θ_6	0

2.2. 运动学正解

根据连杆坐标系和 D-H 参数表,机器人运动学方程可描述为,

$${}^6T = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \quad (1)$$

式中 iT 表示第 i 个连杆坐标系相对于第 $i-1$ 个连杆坐标系的齐次变换矩阵,即

$${}^iT = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -d_i s\alpha_{i-1} \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & d_i c\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中 $c\theta_i = \cos \theta_i$, $s\theta_i = \sin \theta_i$, $c\alpha_i = \cos \alpha_i$,
 $s\alpha_i = \sin \alpha_i$ ($i = 0, 1, \dots, 6$)。

将各个连杆变换矩阵相乘,便可得到该机器人的“手臂变换矩阵” 6T ,它是关节变量 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6$ 的函数。

$${}^6T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中,

$$n = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} c_1(c_{234}c_5c_6 + s_{234}s_6) + s_1s_5c_6 \\ s_1(c_{234}c_5c_6 + s_{234}s_6) - c_1s_5c_6 \\ s_{234}c_5c_6 - c_{234}s_6 \end{bmatrix}$$

$$o = \begin{bmatrix} o_x & o_y & o_z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} c_1(-c_{234}c_5s_6 + s_{234}c_6) - s_1s_5s_6 \\ s_1(-c_{234}c_5s_6 + s_{234}c_6) + c_1s_5s_6 \\ -s_{234}c_5s_6 - c_{234}c_6 \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} c_1s_5c_{234} - s_1c_5 \\ s_1s_5c_{234} + c_1c_5 \\ s_{234}s_5 \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} c_1(a_4c_{234} + d_5s_{234} + a_3c_{23}) + d_4s_1 + a_2c_1c_2 + a_1c_1 \\ s_1(a_4c_{234} + d_5s_{234} + a_3c_{23}) - d_4c_1 + a_2s_1c_2 + a_1s_1 \\ a_4s_{234} - d_5c_{234} + a_3s_{23} + a_2s_2 + d_1 \end{bmatrix}$$

2.3. 运动学逆解

由于设计的弧焊机器人 2、3、4 关节轴线相互平行,满足工业机器人存在封闭解的条件(Pieper 原则)。

因此本文采用封闭解法, 求解该逆运动学问题。

$${}^1\mathbf{T}^{-1} {}^6\mathbf{T} = {}^1\mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

1) 求解 θ_1

观察等式(4), 建立矩阵第二行第四列的等式关系 $-s_1 p_x + c_1 p_y = -d_4$, 可得,

$$\theta_1 = A \tan 2(p_y, p_x) - A \tan 2(-d_4, \pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_4^2}) \quad (5)$$

正、负号对应于 θ_1 的两个可能解。

2) 求解 θ_5

联立矩阵(4)两端第 2 行前 3 列等式, 可求得,

$$\theta_5 = A \tan 2\left(\pm \sqrt{(-s_1 n_x + c_1 n_y)^2 + (-s_1 o_x + c_1 o_y)^2} - s_1 a_x + x_1 a_y\right) \quad (6)$$

3) 求解 θ_6

同样方式, 联立矩阵(4)两端第 2 行第 1 列及第 2 行第 2 列等式, 则有

$$\begin{cases} -s_1 n_x + c_1 n_y = -s_5 c_6 \\ -s_1 o_x + c_1 o_y = s_5 s_6 \end{cases} \quad (7)$$

如果 $s_5 \neq 0$, 将上下两等式相除得,

$$\theta_6 = A \tan 2(-s_1 o_x + c_1 o_y, -s_1 n_x + c_1 n_y) \quad (8)$$

4) 求解 θ_2

联立矩阵(4)两端第 1 行第 3 列和第 3 行第 3 列等式, 则有

$$\begin{cases} c_1 a_x + s_1 a_y = s_5 c_{234} \\ a_z = s_5 s_{234} \end{cases} \quad (9)$$

易得

$$\theta_{234} = A \tan 2(a_z, c_1 a_x + s_1 a_y) \quad (10)$$

结合式(3), 有下列关系式,

$$\begin{cases} p_y = s_1 (a_4 c_{234} + d_5 s_{234} + a_3 c_{23}) - d_4 c_1 + a_2 s_1 c_2 + a_1 s_1 \\ p_z = a_4 s_{234} - d_5 c_{234} + a_3 s_{23} + a_2 s_2 + d_1 \end{cases} \quad (11)$$

若 $s_5 \neq 0$, 则令

$$\begin{cases} A = (p_y - a_4 s_1 c_{234} - d_5 s_1 s_{234} + d_4 c_1 - a_1 s_1) / s_1 \\ B = p_z - a_4 s_{234} + d_5 c_{234} - d_1 \\ C = (A^2 + B^2 + a_2^2 - a_3^2) / (2 \times a_2) \end{cases} \quad (12)$$

通过上式可解得,

$$\theta_2 = A \tan 2(A, -B) - A \tan 2\left(C, \pm \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}\right) \quad (13)$$

5) 求解 θ_3

结合(8)、(9)两式有,

$$\begin{cases} A = a_3 c_{23} + a_2 c_2 \\ B = a_3 s_{23} + a_2 s_2 \end{cases} \quad (14)$$

进而可解得,

$$\theta_{23} = A \tan 2(B - a_2 s_2, A - a_2 c_2) \quad (15)$$

$$\theta_3 = \theta_{23} - \theta_2 \quad (16)$$

6) 求解 θ_4

$$\theta_4 = \theta_{234} - \theta_{23} \quad (17)$$

该机器人的运动反解可能存在 8 组。在求解 θ_1, θ_2 以及 θ_5 式中的正负号组合可能得到八种解。在机器人的实际规划中, 需根据已知的起点和终点进行取舍。

3. 笛卡尔空间规划

在笛卡尔空间轨迹规划系统中, 作业是用机器人末端抓手位姿(位置和姿态)的笛卡尔坐标结点序列规定的。因此结点指的是表示抓手位姿的齐次变换矩阵。

3.1. 直线位置规划

已知两点坐标 $p_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $p_2(x_2, y_2, z_2)$, 以及起点速度 v_1 , 过程速度 v_2 、终点速度 v_3 。为了简单解并且同时保证整条轨迹上的位移和速度都连续, 设定从 v_1 到 v_2 和从 v_2 到 v_3 两个过程加速度均恒定, 分别为 a_1 和 a_2 。

根据两点间距离方程以及匀变速位移方程,

$$\begin{cases} d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \\ l_1 = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a_1} \\ l_3 = \frac{v_3^2 - v_2^2}{2a_2} \end{cases} \quad (18)$$

可得, $l_2 = d - l_1 - l_3$, 继而求得匀速运动时间 $t_2 = l_2/v_2, t_1 = \frac{v_2 - v_1}{a_1}, t_3 = \frac{v_3 - v_2}{a_2}$ 。

因此, 我们可以得到任意时刻的位移计算公式,

$$d_t = \begin{cases} v_1 t + a_1 t^2 / 2, & 0 \leq t < t_1 \\ d_1 + v_2 (t - t_1), & t_1 \leq t \leq t_3 \\ d_1 + d_2 + v_2 (t - t_1 - t_2) + a_2 (t - t_1 - t_2)^2 / 2, & t_3 < t \leq T \end{cases} \quad (19)$$

同时, 由 p_1 和 p_2 可得单位向量为,

$$\mathbf{n} = \frac{p_2 - p_1}{d} = \frac{(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}}{d} \quad (20)$$

则任意时刻的坐标位置可由下述公式确定为,

$$p_t = p_1 + \mathbf{n}\Delta t \quad (21)$$

3.2. 圆弧位置规划

已知不共线的三点坐标分别为 $p_1(x_1, y_1, z_1)$ 、 $p_2(x_2, y_2, z_2)$ 和 $p_3(x_3, y_3, z_3)$, 以及起点线速度 v_1 、过程线速度 v_2 、终点线速度 v_3 。为了简单易解并且同时保证整条轨迹上的位移和速度都连续, 设定从 v_1 到 v_2 和从 v_2 到 v_3 两个过程角加速度均恒定, 分别为 α_1 和 α_2 。与直线位置规划类似, 根据给定的速度和时间, 可以确定每一段运动的插值点个数。

根据不共线的空间三点能够确定唯一的平面以及圆弧上三点到圆心的距离相等两个条件联立方程,

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ r^2 = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 + (z_1 - c)^2 \\ r^2 = (x_2 - a)^2 + (y_2 - b)^2 + (z_2 - c)^2 \\ r^2 = (x_3 - a)^2 + (y_3 - b)^2 + (z_3 - c)^2 \end{cases} \quad (22)$$

易得圆心坐标 $o(a, b, c)$ 。

设 p_1, p_2, p_3 三点确定平面的单位法向量为 $N(u \ v \ w)$, 根据其与 $p_1 p_2, p_2 p_3$ 分别垂直联立方程,

$$\begin{cases} (x_2 - x_1)u + (y_2 - y_1)v + (z_2 - z_1)w = 0 \\ (x_3 - x_2)u + (y_3 - y_2)v + (z_3 - z_2)w = 0 \end{cases} \quad (23)$$

求出单位法向量。

类似于直线位置规划, 可以得到某一时间转过的弧度 θ 。已知 $p_1(x_1, y_1, z_1)$, 圆心 $o(a, b, c)$, 切向量 $N(u, v, w)$, 则可确定转过 θ 后圆弧上点的坐标为,

$$p(\theta) = e^{\theta \hat{\xi}} p_1 \quad (24)$$

其中, $\hat{\xi}$ 称之为运动旋量, 其表达式为,

$$e^{\theta \hat{\xi}} = \begin{bmatrix} e^{\theta \hat{N}} & (I - e^{\theta \hat{N}})r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

3.3. 姿态规划

四元数可以描述三维空间刚体的姿态和旋转变换。并且利用四元数表示转动将会使运动更均匀和有效。因此在此应用四元数表示机器人手部的姿态, 进行规划。四元数的表示形式为,

$$q = [s, \mathbf{v}] = [s, (x, y, z)] = s + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (26)$$

根据机器人的末端姿态矩阵,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} \quad (27)$$

可以建立两者之间的关系,

$$\begin{cases} s = \pm \sqrt{n_x + o_y + a_z + 1} / 2 \\ a = (o_z - a_y) / 4s \\ b = (a_x - n_z) / 4s \\ c = (n_y - o_x) / 4s \end{cases} \quad (28)$$

已知两点的姿态 R_1 和 R_2 , 通过公式可以得到四元数 q_1 和 q_2 , 利用下述公式进行姿态的插值。

$$\text{Slerp}(q_1, q_2, t) = \frac{(q_1 \times \sin(1-t)\theta + q_2 \times \sin t\theta)}{\sin \theta} \quad (29)$$

其中, $t \in [0, 1], \theta$ 为两四元数之间的夹角。

4. 实验验证

该部分利用上述算法编写 MFC 应用程序, 根据输入的具体数值, 通过程序运算, 将得到的结果在 Matlab 上进行绘图, 以验证位置规划和姿态规划的正确性。

4.1. 位置规划实验

分别在 MFC 中输入直线的 P1 和 P2 点，以及圆弧的 P1、P2 和 P3 点的位置坐标，并且输入起始点、中间点和终止点的速度以及加速度和扫描周期。根据已有信息以及上述算法进行计算(图 3)。

将直线位置计算结果写入 Matlab 程序，
 $x=[2\ 2.41\ 2.88\ 3.39\ 3.92\ 4.44\ 4.96\ 5.54\ 5.98\ 6.37\ 7];$
 $y=[1\ 1.24\ 1.53\ 1.83\ 2.15\ 2.46\ 2.77\ 3.12\ 3.39\ 3.62\ 4];$
 $z=[3\ 3.41\ 3.88\ 4.39\ 4.92\ 5.44\ 5.96\ 6.54\ 6.98\ 7.37\ 8];$
 $xx=linspace(2,7);$
 $yy=spline(x,y,xx);$
 $zz=spline(x,z,xx);$
 $plot3(xx,yy,zz,'r','x,y,z','o');$
 $grid\ on;$ 可得图 4 所示结果。

同理，将圆弧位置计算结果写入 Matlab 程序可得图 5 所示结果。



Figure 3. Line and circular position programming interface
 图 3. 直线圆弧位置规划界面

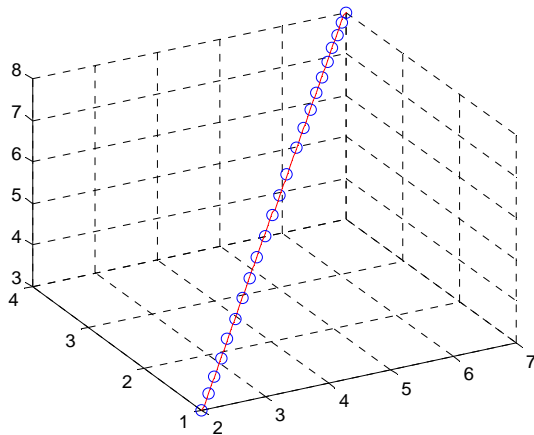


Figure 4. Linear position interpolation
 图 4. 直线位置插值

4.2. 姿态规划实验

根据机器人正运动学可以求得始末两点的末端姿态矩阵，并将其输入进 MFC 应用程序，由插值公式得到数据点，然后在 Matlab 上进行验证(图 6)。

将姿态规划计算结果写入 Matlab 程序，

$X=[px\ px+nx*d];$
 $Y=[py\ py+ny*d];$
 $Z=[pz\ pz+nz*d];$
 $plot3(X,Y,Z);$
 $grid\ on;$

其中， px, py, pz 为位置规划出来的空间点坐标， nx, ny, nz 为对应点插值出来的姿态向量，可得图 7 所示结果。

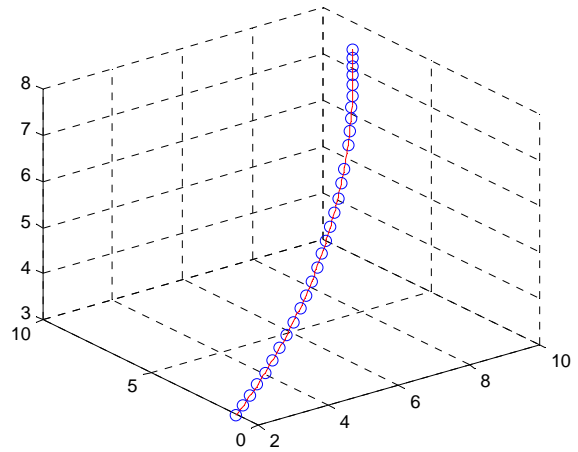


Figure 5. Arc position interpolation
 图 5. 圆弧位置插值



Figure 6. Orientation planning interface
 图 6. 姿态规划界面

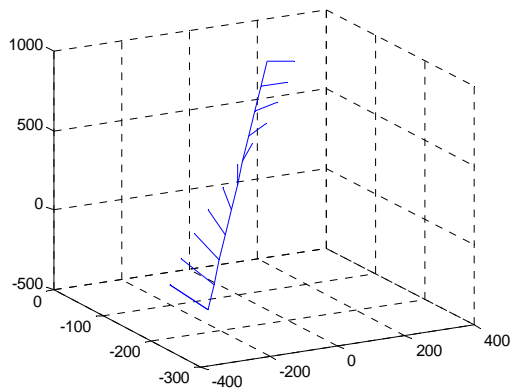


Figure 7. Linear orientation interpolation
图 7. 直线姿态插值

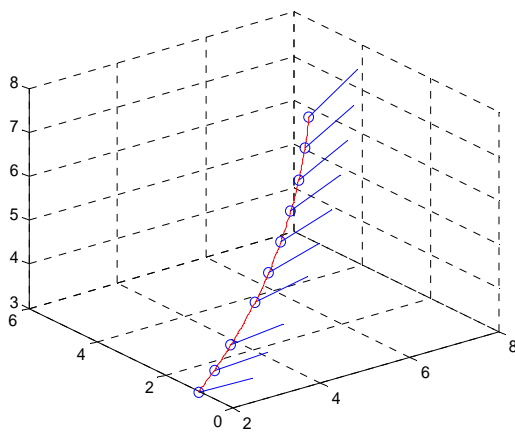


Figure 8. Arc orientation interpolation
图 8. 圆弧姿态插值

同理,将圆弧姿态计算结果写入 Matlab 程序可得图 8 所示结果。

5. 结束语

本文首先对 6 自由度弧焊机器人进行运动学建模,并在笛卡尔空间进行轨迹规划,将算法编写程序进行验证,通过生成的轨迹曲线可以直观的观察出理论计算的正确性,同时也为机器人的逆解求出关节位置奠定了基础。

参考文献 (References)

- [1] 孙英飞, 罗爱华. 我国工业机器人发展研究[J]. 科学技术与工程, 2012, 4(12): 2912-2918.
- [2] 兰虎, 陶祖伟, 段宏伟. 弧焊机器人示教编程技术[J]. 实验室研究与探索, 2011, 9(30): 46-49.
- [3] 熊有伦. 机器人学[M]. 北京: 机械工业出版社, 1993.
- [4] 沐俊福, 刘正华. 基于 OpenGL 的三维圆弧的绘制[J]. 电脑编程技巧与维护, 2012, 13: 62-63.
- [5] 陈国梁, 黄心汉, 王敏. 机器人圆周运动的轨迹规划与实现[J]. 华中科技大学学报, 2005, 33(11): 63-66.
- [6] 陈伟华, 张铁. 六自由度喷涂机器人插补算法的研究[J]. 微计算机信息, 2009, 25(3-2): 251-252.
- [7] 刘松国, 朱世强. 基于四元数和 B 样条的机械手平滑姿态规划期[J]. 浙江大学学报(工学版), 2009, 7(43): 1192-1196.
- [8] 罗家佳, 胡国清. 基于 MATLAB 的机器人运动仿真研究[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2005, 9(44): 640-644.
- [9] 赵献丹, 赵虎. 六自由度串联机械手运动学逆解研究[J]. 现代制造技术与装备, 2010, 3: 11-13.