

直角和贴体坐标系下两种格子 Boltzmann 方法的比较研究

李维仲, 冯玉静, 董波*, 张宁

(大连理工大学 海洋能源利用与节能教育部重点实验室, 大连 116023)

摘要:采用格子 Boltzmann 方法(LBM)和改进的插值格子 Boltzmann 方法(GILBM)研究了 45°斜方腔的顶盖驱动流和 Roach 通道内的流动特性,并与基准解进行了对比。结果表明,对于 45°斜方腔的顶盖驱动流,当雷诺数较小时,两种方法的计算结果与基准解吻合较好;但当雷诺数较大时,采用 LBM 的计算结果准确性降低,而基于 GILBM 方法得到的结果准确度升高,且计算稳定性好。对于 Roach 通道内的流体流动而言,两种方法的计算精度和复杂边界的复杂程度与雷诺数大小有关。根据流场边界形状的复杂程度,网格划分与计算精确度的不同要求,两种方法各有利弊。

关键词:LBM; GILBM; 45°斜方腔; Roach 通道; 雷诺数

中图分类号:O35 **文献标志码:**A **doi:**10.7511/jslx201403013

1 引言

近 20 多年来,格子 Boltzmann 方法(LBM)作为较新的计算流体力学方法,受到越来越多的关注,并且成功地应用于不可压缩流动、多孔介质内流动和多相流等多个领域^[1]。然而,随着 LBM 的不断发展,该方法也逐渐显出不足,一方面,经典的 LBM 模型要求计算网格必须是对称、均匀且等面积正交的^[2,3];另一方面,LBM 在解决具有大雷诺数问题时,需要更强大的计算机硬件资源支持^[4]。考虑到粒子分布函数在物理空间上是连续的,并且可以在任意网格系统下对其进行定义,有学者提出了插值补充格子 Boltzmann 方法(ISLBM)^[5,6]。与 LBM 相比,利用 ISLBM 研究具有复杂边界的流场内流体流动问题时,所需要的网格数大幅降低,计算效率显著提高。但是,ISLBM 要求计算平面与物理平面之间坐标转换关系必须有解析函数,这一缺点限制了 ISLBM 在工程实践中的应用。为了突破这一限制,Imamura 等^[7-9]对格子 Boltzmann 方法在贴体网格中的应用开展了相关研究,提出了改进的插值格子 Boltzmann 方法(GILBM)。

同 ISLBM 和 LBM 相比,GILBM 在处理不规则形状的边界问题上更具有优势,但是还不能说明在任何情况和任意的复杂流场计算中,GILBM 都优于 LBM。因此,本文分别应用 GILBM 和 LBM 两种方法研究在不同的雷诺数下 45°斜方腔内顶盖驱动流和 Roach 通道内的流动问题,并将模拟结果与基准解进行对比,考察了 GILBM 与 LBM 两种方法的优缺点以及适用范围。

2 数值方法简介

2.1 LBM 模型

本文选用 D2Q9 模型。粒子分布函数的演化方程为^[9]

$$f_i(\mathbf{r} + \mathbf{e}_i \delta t, t + \delta t) - f_i(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\tau} [f_i(\mathbf{r}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{r}, t)] \quad (1)$$

式中 i 为离散速度的方向, $i=0 \sim 8$, τ 为无量纲松弛时间。

粒子的平衡态分布函数为

$$f_i^{eq} = \rho \omega_i \left[1 + \frac{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})^2}{2c_s^4} - \frac{u^2}{2c_s^2} \right] \quad (2)$$

式中 $c_s = c/\sqrt{3}$, c_s 为格子声速,系数 ω_i 是与速度模型相关的常量。

2.2 改进的插值 LBM 模型(GILBM)

GILBM 模型中,将 LBM 中的演化方程(1)转化到贴体坐标系下,物理平面和计算平面坐标分别

收稿日期:2013-03-11;修改稿收到日期:2013-04-18.

基金项目:国家自然科学基金(51276030,51206017)

资助项目.

作者简介:李维仲(1956-),男,教授,博士生导师;

董波*(1982-),女,博士,讲师

(E-mail: bodong@dlut.edu.cn).

表示为 $\mathbf{r}=(x_1, x_2)=(x, y)$ 和 $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1, \xi_2)=(\xi, \eta)$ 。

由于碰撞过程中只涉及当前格点,所以只需将碰撞公式中的 \mathbf{r} 改成 $\boldsymbol{\xi}$ [9,10]。

$$f_i^*(\boldsymbol{\xi}, t) = f_i(\boldsymbol{\xi}, t) - \frac{1}{\tau} [f_i(\boldsymbol{\xi}, t) - f_i^{eq}(\boldsymbol{\xi}, t)] \quad (3)$$

在迁移过程中,计算平面中粒子的速度向量不再是常数,称为逆变速度,定义为

$$\tilde{c}_{i,\alpha} = c_{i,\beta} (\partial \xi_\alpha / \partial x_\beta) \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \quad (4)$$

将逆变速度在时间步长 Δt 上积分得到分布函数迁移前的位置。此时,迁移方程变为

$$f_i(\boldsymbol{\xi}, t + \Delta t) = f_i^*(\boldsymbol{\xi} - \Delta \boldsymbol{\xi}_{up,i}, t) \quad (5)$$

首先,通过雅克比转换计算逆变速度。其次,应用下面的二步Runge-Kutta方法计算 $\Delta \boldsymbol{\xi}_{up,i}$,

$$\text{第一步: } \Delta \boldsymbol{\xi}_{up,i}^{(1)} = \frac{1}{2} \Delta t \tilde{\mathbf{c}}_i(\boldsymbol{\xi}) \quad (6)$$

$$\text{第二步: } \Delta \boldsymbol{\xi}_{up,i} = \Delta t \tilde{\mathbf{c}}_i(\boldsymbol{\xi} - \Delta \boldsymbol{\xi}_{up,i}^{(1)}) + O(\Delta t^3) \quad (7)$$

最后,用二阶插值公式求解式(5),

$$f_i^*(\boldsymbol{\xi} - \Delta \boldsymbol{\xi}_{up,i}, t) = \sum_{m=0}^2 \sum_{l=0}^2 a_{i,m,2} a_{i,l,1} f_i^* \cdot (\xi_{i+m \cdot md}, \eta_{i+l \cdot nd}, t + \Delta t) \quad (8)$$

式中 $md = \text{sgn}(\Delta \xi_{up,i,x})$, $nd = \text{sgn}(\Delta \xi_{up,i,y})$, 用来确定插值节点, $a_{i,m,2}$ 和 $a_{i,l,1}$ 为插值系数[3,10],用式(9)计算如下:

$$\begin{aligned} a_{i,0,\alpha} &= \frac{1}{2} (|\Delta \xi_{up,i,\alpha}| - 1) (|\Delta \xi_{up,i,\alpha}| - 2) \\ a_{i,1,\alpha} &= -|\Delta \xi_{up,i,\alpha}| (|\Delta \xi_{up,i,\alpha}| - 2) \\ a_{i,2,\alpha} &= \frac{1}{2} |\Delta \xi_{up,i,\alpha}| (|\Delta \xi_{up,i,\alpha}| - 1) \end{aligned} \quad (9)$$

采用 GILBM 计算时,时间步长满足 Courant-Friedrichs-Lewy(CFL)条件为

$$\Delta t = \lambda \min_{i,\alpha,\xi} |1/\tilde{c}_{i,\alpha}|_\xi \quad (10)$$

式中 CFL 数 λ 满足 $0 < \lambda < 1$ 。 $\min_{i,\alpha,\xi} |1/\tilde{c}_{i,\alpha}|_\xi$ 遍取了计算平面所有格点上离散速度的实部和虚部的值。

3 计算结果与分析

采用 LBM 和 GILBM 两种方法,对 45°斜方腔顶盖驱动流和 Roach 通道内流体流动特性进行研究,并对两种方法的模拟结果进行比较。

3.1 45°斜方腔的顶盖驱动流

45°斜方腔顶盖驱动流的几何构型如图 1 所示。对 $Re=100$ 和 $Re=1000$ 两种情况进行模拟,边界条件如图 1 所示。为了使两种方法的上边界网格分辨率相同,GILBM 选取 80×80 ,LBM 选取 137×57 。当采用 GILBM 方法时,边界采用非平衡外推格式;对于 LBM 方法,上边界处理方法与 GILBM

相同,但固壁的格点不能准确落在边界上,只能近似采用反弹边界。

图 2 和图 3 给出当 $Re=100$ 和 $Re=1000$ 时,采用 GILBM 和 LBM 两种方法得到的斜方腔内流线图,两种方法的模拟结果相差不多。收敛系数均取为 10^{-6} ,当 $Re=100$ 时,GILBM 所需的计算时间是 LBM 的两倍,而当 $Re=1000$ 时,GILBM 所需的计算时间仅为 LBM 的三分之一。

为进一步比较两种方法的计算精度,针对主涡与次涡中心位置,将 LBM 和 GILBM 两种方法的模拟结果与文献[11]的结果进行比较,列入表 1。两种方法得到的涡中心位置的计算误差都小于 5%。当 $Re=100$ 时,利用 LBM 方法对涡中心位置的计算更为准确;当 Re 增大到 1000 时,利用 GILBM 计算得到涡的位置比利用 LBM 获得的模拟结果更准确。

图 4 是沿着斜方腔内水平几何中心线上的竖直速度 v 的分布曲线,坐标 x^* 是点到几何中心线初始位置的距离。当 $Re=100$ 时,利用 LBM 和 GILBM 两种方法得到的模拟结果都与基准解吻合良好;当 $Re=1000$ 时,利用 GILBM 获得的结果与基准解吻合得很好,而利用 LBM 计算的结果与基准解偏差较大;当 x^* 在 0.5~0.8 区域,不再稳定。

表 1 不同 Re 数下,模拟结果与文献中对主、次涡中心位置的计算结果的对比如

Tab.1 Comparison of position of primary and secondary vortex between present solution and Demirdzic's solution for different Reynolds number

Re	位置	坐标	GILBM	LBM	Demirdzic	相对误差/%	
						GILBM	LBM
100	主涡中心	x	1.08033	1.0860	1.1100	2.67	2.16
		y	0.53033	0.5340	0.54638	2.94	2.27
	次涡中心	x	0.3329	0.3375	0.33867	1.70	0.35
		y	0.1414	0.1431	0.14308	1.17	0.014
1000	主涡中心	x	1.3100	1.2750	1.3130	0.23	2.89
		y	0.5770	0.5585	0.57404	0.52	2.71
	次涡中心	x	0.77825	0.77107	0.77663	0.21	0.92
		y	0.4046	0.4032	0.39851	1.53	1.18

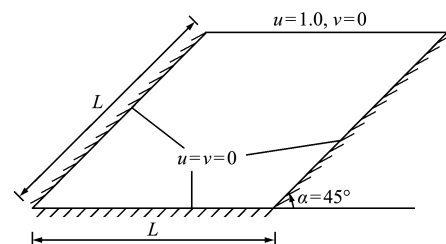


图 1 45°斜方腔驱动流模型

Fig.1 Inclined cavity with a tilt angle of 45° driven flow model

与斜方腔左右边界平行的斜几何中心线上的水平速度 u 的分布情况,如图 5 所示。 y^* 为沿着斜几何中心线上的点到初始点的距离。当 $Re=100$

时,利用 LBM 和 GILBM 方法得到的 u 都与基准解吻合得很好。在 $Re=1000$ 的情况下,利用 GILBM 方法得到的速度 u 分布更准确。

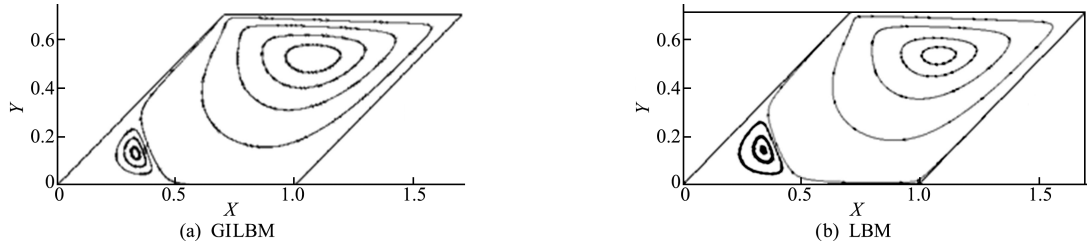


图 2 $Re=100$ 时的流线图
Fig. 2 Streamline for $Re=100$

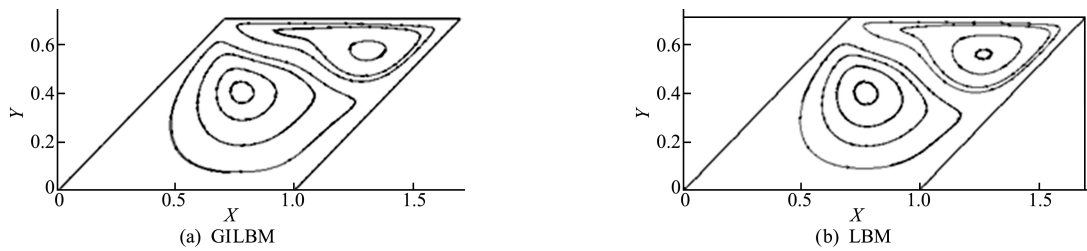


图 3 $Re=1000$ 时的流线图
Fig. 3 Streamline for $Re=1000$

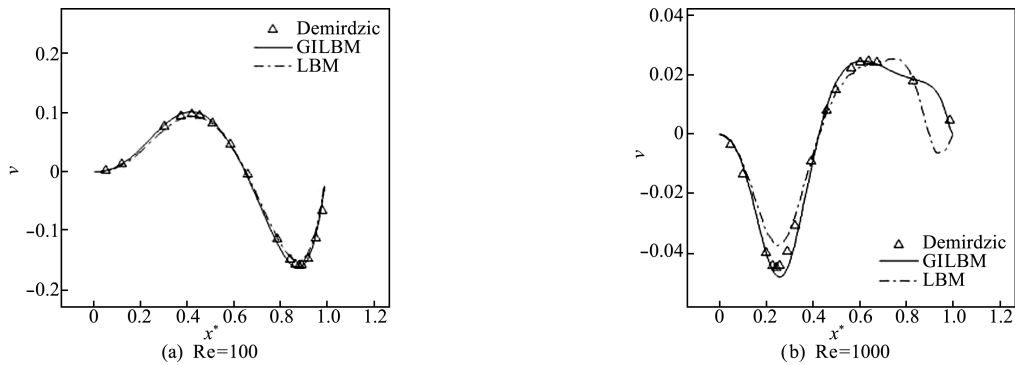


图 4 水平几何中心线上的竖直速度 v 的分布曲线
Fig. 4 The vertical velocity distribution curve in the horizontal centerline

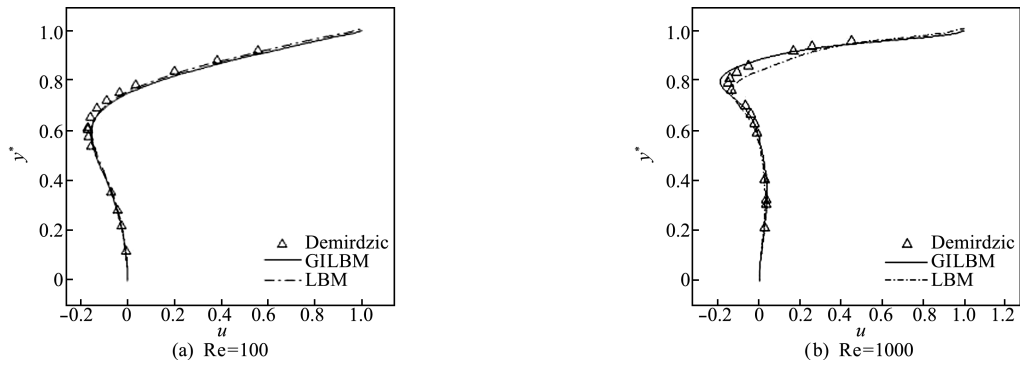


图 5 斜几何中心线上的水平速度 u 的分布曲线
Fig. 5 The horizontal velocity distribution curve in the oblique geometric centerline

3.2 Roach 通道

Roach 通道的几何尺寸与 Re 有关,如图 6 所示,入口速度 $u=3(y-y^2/2)$, $v=0$ 。上边界是对称

边界。作为固壁的下边界,GILBM 采用无滑移边界格式,而在 LBM 中,采用反弹边界。在 $Re=10$ 和 $Re=100$ 的情况下,对流体在 Roach 通道内的流动

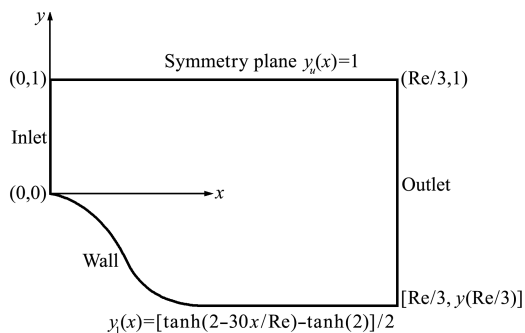


图6 Roach通道的几何结构
Fig.6 Geometric structure of Roach channel

问题进行模拟。

GILBM的计算网格为 80×80 ,当雷诺数为10和100时,LBM对应的计算网格为 $267 \times 159, 2670 \times 159$.收敛系数同为 10^{-6} 的情况下,当 $Re=10$ 时,LBM和GILBM的计算时间分别为27 min和16 min;当 $Re=100$ 时,LBM变为265 min,而

GILBM降低为13 min。

图7和图8为 $Re=10$ 时通道内速度矢量图和流线图,两种方法得到的结果类似,在边界变化剧烈的弯曲处都有涡产生。而当 $Re=100$ 时,得到的速度矢量图和流线图与 $Re=10$ 的情况下相似。

图9为Roach通道下壁面边界涡量 ω 的分布曲线,图9中 x^* 为通道出口处 x 方向的坐标值。当 $Re=10$ 时,在边界曲线变化剧烈的位置,边界涡量急速下降,与LBM相比,利用GILBM方法得到的结果与基准解^[12]吻合得更好。而到下边界线平缓变化后,边界涡量有一段小幅度缓慢地上升,最后保持稳定,与GILBM相比较,利用LBM获得的边界涡量值与基准解的偏差更小。当 Re 增大到100时,与LBM相比,利用GILBM方法获得的边界涡量值与基准解吻合得更好。

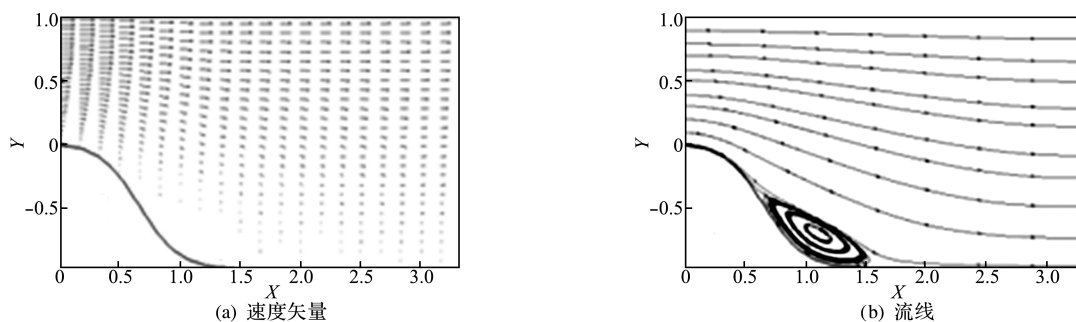


图7 当 $Re=10$ 时,基于GILBM得到的流场中的速度矢量和流线
Fig.7 The velocity vectors and streamlines obtained through GILBM for $Re=10$

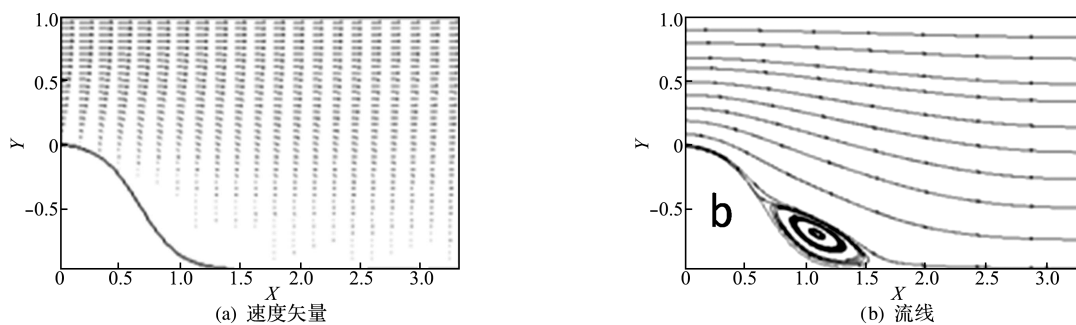


图8 当 $Re=10$ 时,基于LBM模拟得到的流场中的速度矢量和流线
Fig.8 The velocity vectors and streamlines obtained through LBM for $Re=10$

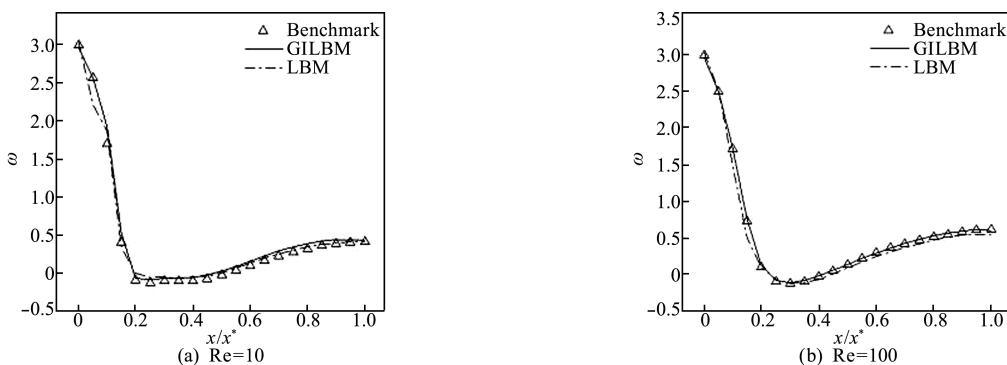


图9 边界涡量与基准解的比较
Fig.9 Comparison between the boundary vorticity and benchmark solutions

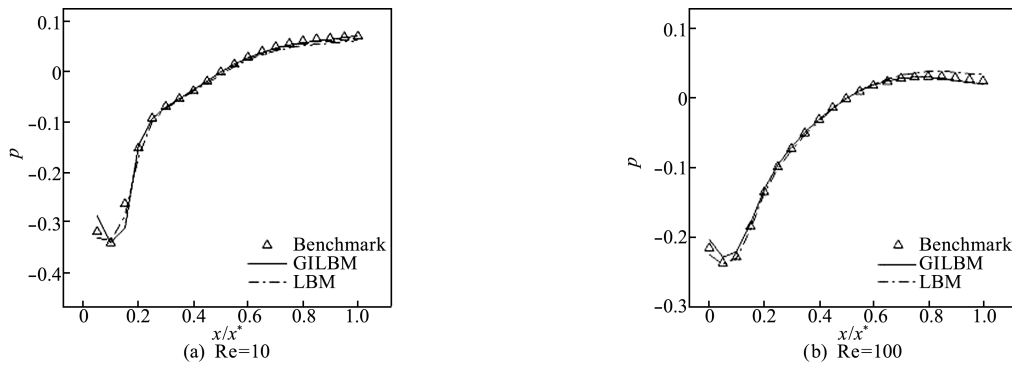


图 10 边界压力与基准解的比较

Fig. 10 Comparison between the boundary pressure and benchmark solutions

图 10 给出了边界压力沿着 Roach 通道下边界的变化趋势,当 $Re=10$ 时,两种方法获得的模拟结果与基准解的吻合程度接近,通过计算获得的两种方法与基准解之间的平均相对误差分别为 4.27%(GILBM)和 11.08%(LBM),基于 GILBM 方法模拟得到的边界压力值与基准解吻合得更好。而当 $Re=100$ 时,如图 10(b)所示,LBM 方法模拟结果的准确性不如 GILBM 方法。

4 结 论

采用 LBM 和 GILBM 对 45° 斜方腔内顶盖驱动流和 Roach 通道内的流体流动问题进行了研究,并将模拟结果与基准解进行比较,得出以下结论:

(1) 当对复杂边界的流场进行定性分析时,LBM 和 GILBM 都能达到计算要求。

(2) 当进行定量分析时,对于直线边界的复杂结构内流场模拟问题,当雷诺数较小时,LBM 比 GILBM 准确;当 Re 增大到一定程度时,LBM 方法的计算准确性降低,甚至会变得不稳定,GILBM 依然保持较高的准确性和稳定性。

(3) 当流场的边界是曲线时,GILBM 不仅对曲线边界的描述优于 LBM,而且无论雷诺数大小,GILBM 在边界处计算结果都比 LBM 更准确。

(4) 当计算区域增大时,LBM 方法需要增加网格数量,而 GILBM 方法不需要增加网格,对于大计算区域,计算效率远远高于 LBM 方法。进行复杂边界流场计算,LBM 原理简单明了,边界处理比较麻烦;GILBM 原理比 LBM 繁琐复杂,但复杂边界的处理相对简单。在研究问题时,可根据所需结果的侧重点和精确性要求适当选择方法即可。

参考文献(References):

[1] Chen S, Doolen G D. Lattice Boltzmann method for

fluid flows[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2003, **30**(1):329-364.

[2] Filippova O, Hänel D. Grid refinement for lattice-BGK models[J]. *Journal of Computational Physics*, 1998, **147**(1):219-228.

[3] 何雅玲,王 勇,李 庆.格子 Boltzmann 方法的理论及应用[M].北京:科学出版社,2008.(HE Ya-ling, WANG Yong, LI Qing. *Lattice Boltzmann Method: Theory and Application*[M]. Beijing: Science Press, 2008. (in Chinese))

[4] Filippova O, Hänel D. Acceleration of lattice-BGK schemes with grid refinement[J]. *Journal of Computational Physics*, 2000, **165**(2):407-427.

[5] He X, Luo L, Dembo M. Some progress in lattice Boltzmann method (Part I) nonuniform mesh grids[J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, **129**(2):357-363.

[6] He X, Doolen G. Lattice Boltzmann method on curvilinear coordinates system: flow around a circular cylinder[J]. *Journal of Computational Physics*, 1997, **134**(2):306-315.

[7] Peng G W, Xi H W, Duncan C, et al. Finite volume scheme for the lattice Boltzmann method on unstructured meshes[J]. *Physical Review E*, 1999, **59**(4):4675-4682.

[8] He X, Doolen G. Lattice Boltzmann method on curvilinear coordinates system: vortex shedding behind a circular cylinder [J]. *Journal of Computational Physics*, 1997, **134**(2):306-315.

[9] Imamura T, Suzuki K, Nakamura T, et al. Acceleration of steady-state lattice Boltzmann simulations on non-uniform mesh using local time step method[J]. *Journal of Computational Physics*, 2005, **202**(2):645-663.

[10] 周文宁.复杂微通道内流体流动的格子 Boltzmann 模拟

- [D]. 大连理工大学, 2010. (ZHOU Wen-ning. Simulation on Fluid Flow Through Complex Microchannel with Lattice Boltzmann Method[D]. Dalian University of Technology, 2010. (in Chinese))
- [11] Demirdžić I, Lilekć Ž, Peri M. Fluid flow and heat transfer test problems for non-orthogonal grids: Bench-mark solutions[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1992, **15**(3): 329-354.
- [12] Napolitano M, Orlandi P. Laminar flow in a complex geometry: a comparison [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1985, **5**(8): 667-683.

Comparison of two lattice Boltzmann schemes in cartesian coordinate and body-fitted coordinate system

LI Wei-zhong*, FENG Yu-jing, DONG Bo, ZHANG Ning

(Key Laboratory of Ocean Energy Utilization and Energy Conservation of Ministry of Education,
Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

Abstract: In this paper, Lattice Boltzmann Method (LBM) and generalized form of interpolation lattice Boltzmann method (GILBM) are applied to study the inclined cavity with a tilt angle of 45° lid-driven flow and fluid flow characteristics in Roach channel. The simulations are compared with the benchmark solutions. It is found out that for the inclined cavity with a tilt angle of 45° lid-driven flow, when the Reynolds number is small, the results obtained from the two methods are in good agreement with the benchmark solution. As the Reynolds number increases, the accuracy of simulation based on LBM reduces, while the accuracy of the consequence obtained from GILBM rises with good stability. In terms of fluid flow in the Roach channel, the accuracy of the two methods is related to complexity of the boundary and Reynolds number. According to the different requirements of the complexity of the boundary shape, meshing and accuracy, the two methods have some advantages and disadvantages respectively.

Key words: LBM; GILBM; inclined cavity with a tilt angle of 45° ; Roach channel; Reynolds number