

震荡小球在不可压缩流体介质中产生扰动场的理论分析¹⁾

蔡建程^{*,2)} 毛义军[†] 温选锋[†]

^{*}(浙江师范大学工学院, 浙江金华 321004)

[†](西安交通大学能动学院, 西安 710049)

摘要 为了改进基于不可压缩流场的声类比法的气动声数值预测方法, 首先要明确扰动在可压缩和不可压缩流体媒介中的传播特性. 推导了震荡小球在不可压缩流体中产生的小扰动的理论解, 分析其速度场与压力场的特点, 并与可压缩情况的解进行比较. 结果显示, 速度场中包含传播速度为无穷大和有限值的分量; 而压力场只有传播速度为无穷大的分量. 当流体黏性趋于零或小球震荡频率趋于无穷大时, 其流场与经典声学中震荡小球声辐射问题的近场声一致, 这表明震荡小球产生的近场扰动为不可压缩流场, 即伪声.

关键词 不可压缩流体, 振荡小球, 小扰动, 伪声

中图分类号: TB532 文献标识码: A doi: 10.6052/1000-0879-13-465

A THEORETICAL ANALYSIS OF THE FLOW DISTURBANCE INDUCED BY A SPHERE OSCILLATING IN INCOMPRESSIBLE FLUID¹⁾

CAI Jiancheng^{*,2)} MAO Yijun[†] WEN Xuanfeng[†]

^{*}(College of Engineering, Zhejiang Normal University, Zhejiang, Jinhua 321004, China)

[†](School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract In order to improve the prediction method of the aerodynamic noise using the acoustic analogy theory based on incompressible flow fields, the characteristics of the disturbance propagation in the incompressible and compressible fluids should be studied firstly. In this paper, the analytical solution for the flow disturbance generated by a sphere oscillating in an incompressible fluid is obtained. The velocity and pressure fields are analyzed, and are compared to the results in a compressible fluid, namely, the acoustic field. It is shown that with respect to the velocity fields the disturbance has components with infinite and finite propagating speeds, while with respect to the pressure only disturbance with infinite propagating speed exists. When the fluid viscosity vanishes or the oscillating frequency becomes infinite, the velocity is identical to the near-field sound generated by the sphere oscillating in the compressible fluid; thus the acoustic near-field disturbance is incompressible, i.e., the pseudo-sound.

Key words incompressible fluid, oscillating sphere, disturbance, pseudo-sound

流体运动受控于 Navier-Stokes(纳维-斯托克斯)方程, 其精确解(解析解)只有在少数简单情况才能得到. 这些情况要求流动状态以及边界条件均

简单, 并且对流动状态作一定假设, 比如理想不可压缩流体的运动、黏性不可压缩流体的小雷诺数流动等. 常见的精确解都已被收集在文献 [1-2] 中.

2013-11-05 收到第 1 稿, 2014-03-05 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金(51306163)和浙江省自然科学基金(LQ13E060001)资助项目.

2) 蔡建程, 1980 年生, 工学博士, 主要从事流体机械内流及流动噪声的研究. E-mail: cai_jiancheng@foxmail.com

小扰动作为流体运动的特殊现象, 其研究具有重要意义, 特别是声波的研究. 声学作为流体力学的一个分支, 其研究的重要性不言而喻, 日常生活、工农业生产、国防、航空航天中都涉及声学问题. 自从 Rayleigh 的奠基性声学著作《The Theory of Sound》(1896) 问世以来, 习惯将声学与机械振动归类于同一范畴, 这是因为经典声学从线性化 Navier-Stokes 方程出发, 其控制方程 (即波动方程) 与机械振动方程类似. 从 20 世纪中叶起, 由于航空业的迅速发展, 气动噪声问题变得日益突出. 气动噪声的定量预测已超出了经典声学理论, 直到 1952 年 Lighthill^[3] 发表论文《On sound generated aerodynamically. I. General theory》, 其研究才有突破性进展. 人们把 Lighthill 的气动声预测方法称为声类比 (acoustic analogy). 此后, 便有很多学者认为声学应该划归到流体力学范畴^[4-5].

基于声类比的气动噪声预测方法目前应用最为广泛, 最初由 Lighthill 提出, 后经 Curle^[6] 和 Ffowcs 等^[7] 推广到有物体存在于流场的情况. 它的核心思想是将流体运动相异于线性声波方程的部分视为声源, 把流动和声波的求解分离开来, 先求解流场并从流场中提取等效声源, 再由非齐次波动方程得到相应的声场. 后来 Powell^[8] 和 Howe^[5] 提出的涡声理论也沿用此思想. 关于气动声学预测方法的更详尽分析, 读者可以参考文献 [9]. 在低马赫数流动情况下, Lighthill 指出可以从不可压缩流场的结果中提取相应的声源进行气动声预测, 例如 Curle 理论中的分布偶极子可以用不可压缩流动的压力波动表示. 不可压缩流场结果中完全没有声学信息, 而只有伪声信息 (关于声和伪声的说明可参考文献 [10-11]), 如何利用伪声信息进行气动声的准确预测是一个挑战. 这就需要首先对不可压缩和可压缩介质中的扰动传播特性有清楚的认识. 可压缩介质中小扰动即声波的传播, 已有众多声学文献对其进行了推导, 而对于不可压缩介质中小扰动理论的研究则较少.

本文正是在这一背景下, 推导震荡小球在不可压缩流体介质假设下产生的小扰动场, 并与可压缩媒介下的结果相比较, 分析它们的区别与联系. 本文旨在为今后改进低 Mach 数流动下气动噪声定量预测做准备, 因为低 Mach 数流动经常使用不可压缩流动假设.

1 数学模型及边界条件

所研究的模型示意图如图 1 所示. 半径为 a 的

小球沿某直线以单频震荡 $U_{s0} \cos(\omega t)$, U_{s0} 为振幅, ω 为圆频率. 坐标原点取在震荡中心. 假设震荡小球产生的扰动为小扰动, 所产生的流体运动雷诺数远小于 1, 所以可以忽略动量方程中的对流加速度非线性项, 又由于不可压缩流体的密度为常数, 所以连续方程和动量方程简化为

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mu \nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla p' \quad (2)$$

式中, \mathbf{u} , ρ_0 和 μ 分别为流体的速度、密度和动力黏度, p' 指压力波动, t 为时间. 对式 (2) 分别求散度和旋度并利用式 (1), 得到

$$\nabla^2 p' = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \nabla \times \mathbf{u}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \nabla \times \mathbf{u} \quad (4)$$

其中, ν 为流体运动黏度 $\nu = \mu/\rho_0$, 记速度旋度为 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$. 虽然方程 (3) 看上去比方程 (4) 简单, 但由于压力 p' 的边界条件不易给定, 所以转而求解方程 (4).

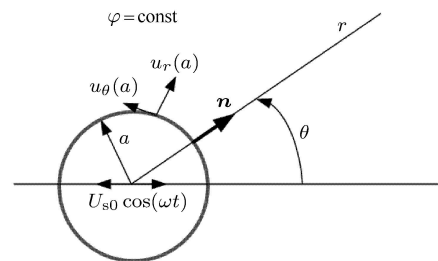


图 1 震荡球产生扰动场

对于理想可压缩流体的小扰动 (经典线性声学) 控制方程为

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (5)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p' = \mathbf{0} \quad (6)$$

对于可压缩流体其密度是变化的, 在小扰动前提下密度波动与压力波动通过式 (7) 联系

$$p' = c_0^2 \rho' \quad (7)$$

其中 c_0 为声速. 式 (5) 中已经利用了式 (7), 将密度扰动用压力扰动替代.

由于小球速度为 $u_s(t) = U_{s0} \cos(\omega t) = \text{Re}\{U_{s0} e^{-i\omega t}\}$, 当初初始条件的影响消失后, 流体运动必定为同频的波动, 设流体运动速度为

$$\mathbf{u}(t) = \text{Re}\{\mathbf{U} e^{-i\omega t}\} \quad (8)$$

其中 \mathbf{U} 为复速度幅度, 将上式代入到式 (4) 得到

$$v\nabla^2(\nabla \times \mathbf{U}) + K^2\nabla \times \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (9)$$

其中

$$K^2 = i\omega/v \quad (10)$$

由于流体运动关于小球运动轴是轴对称的, 所以极坐标下求解方程 (9) 更为方便, 设 $\mathbf{U} = \mathbf{e}_r U_r + \mathbf{e}_\theta U_\theta$, \mathbf{e}_r 和 \mathbf{e}_θ 为径向和天顶角方向的单位矢量, 方位角 φ 方向的速度为 0.

由于流体的黏性, 使得与小球表面接触的流体的速度等于小球表面的速度. 由于小球的震荡, 此边界条件位置离坐标原点是变化的. 假设小球振幅很小, 则可以把边界条件设在球表面的运动平均位置, 即 $r = a$ 处, 所以此边界条件为

$$U_r(a) = U_{s0} \cos \theta, \quad U_\theta(a) = -U_{s0} \sin \theta \quad (11)$$

另外, 物理上要求在无穷远 ($r \rightarrow \infty$) 处波动为 0.

2 方程的求解

为求解方便, 引入流函数 ψ 可使矢量方程 (4) 转化成标量方程. 考虑到运动的轴对称性, 流函数与方位角 φ 无关, 即 $\psi = \psi(r, \theta)$. 这样流体运动速度分量

$$\left. \begin{aligned} U_r &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ U_\theta &= -\frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

于是

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{U} &= \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rU_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right] = \\ &= -\mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \psi \end{aligned} \quad (13)$$

根据式 (11), 可以看出 $r = a$ 处有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= U_{s0} a^2 \sin \theta \cos \theta \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} &= U_{s0} a \sin^2 \theta \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式 (14) 意味着流函数有如下的解形式

$$\psi = f(r) U_{s0} \sin^2 \theta \quad (15)$$

其中 $f(r)$ 为待求函数. 把式 (15) 代入式 (13) 中, 得到

$$\nabla \times \mathbf{U} = -\frac{\mathbf{e}_\varphi}{r} U_{s0} \sin \theta \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \right) f(r) \quad (16)$$

将式 (16) 代入到方程 (4) 中, 可以得到关于 $f(r)$ 的四阶常微分方程

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + K^2 - \frac{2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \right) f(r) = 0 \quad (17)$$

由于上式左边两个括号中的微分算子不相同, 所以可以假设解的形式为 $f = f_1 + f_2$, f_1 和 f_2 分别满足

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \right) f_1(r) &= 0 \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + K^2 - \frac{2}{r^2} \right) f_2(r) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

上式第 1 个方程的通解为

$$f_1 = \frac{A}{r} + Br^2 \quad (19)$$

考虑到无穷远处扰动幅度必须有界, 所以 $B = 0$. 当 f_2 确定后由边界条件确定 A . f_1 表示的运动形式为空间所有流体质点的同步扰动, 即扰动的传播速度为无穷大. 下面推导 f_2 的解, 将看出它代表流体质点运动在空间分布上并不同步, 而是经历一个传播过程.

式 (18) 中第 2 个方程的解 f_2 也需满足无穷远处的扰动有界这一条件. 注意到 $K^2 = i\omega/v$, 得到两个根 $K_1 = (1+i)/\delta_v$, $K_2 = -(1+i)/\delta_v$, 其中

$$\delta_v = \sqrt{2v/\omega} \quad (20)$$

该量具有长度量纲, 代表黏性影响距离的一个度量, 可理解为黏度穿透深度. 回到 f_2 的控制方程

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + K^2 - \frac{2}{r^2} \right) f_2(r) = 0 \quad (21)$$

注意到当 $r \rightarrow \infty$ 时, $2/r^2$ 在方程中的作用将消失, 所以在无穷远处 f_2 的解形式为 $\exp(iK_{1,2}r)$. 其中 $\exp(iK_2r)$ 应该摒弃, 因为当 $r \rightarrow \infty$ 时该函数无界.

方程 (21) 的解可以由球 Bessel 函数构造出, 可以证明对于球 Bessel 方程 [12]

$$g''(r) + \frac{2}{r}g'(r) + \left[K^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] g(r) = 0 \quad (22)$$

$n = 1$ 时的解 $g(r)$ 与 r 的乘积 $f_2 = rg(r)$ 满足方程 (21). 选择一阶第三类球 Bessel 函数, 即球 Hankel 函数

$$\left. \begin{aligned} h_1^{(1)}(K_1 r) &= -\frac{i + K_1 r}{(K_1 r)^2} e^{iK_1 r} \\ h_1^{(2)}(K_1 r) &= \frac{i - K_1 r}{(K_1 r)^2} e^{-iK_1 r} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

组成方程 (21) 的解, 因为其包含 $\exp(\pm iK_1 r)$ 函数形式. $h_1^{(2)}(K_1 r)$ 应该除去, 因为 $r \rightarrow \infty$ 时它无界. 所以方程 (21) 的解为

$$f_2(r) = Crh_1^{(1)}(K_1 r) \quad (24)$$

结合时间因子 $e^{-i\omega t}$, 可以得到解的形式为 $\exp[-r/\delta_v + i(r/\delta_v - \omega t)]$, 表明为衰减波, 它表示的是由流体的黏性作用把震荡小球的扰动传播到远处, 即黏性引起的扩散过程, 除了高频情况它的传播速度很小, 其相速度为

$$c_v = \omega\delta_v = \sqrt{2\omega\nu} \quad (25)$$

至此, f_1 和 f_2 已经确定了, 所以待求的流函数为

$$\psi = U_{s0} \left[A/r - Crh_1^{(1)}(K_1 r) \right] \sin^2 \theta \quad (26)$$

由式 (14) 得到速度为

$$U_r = \frac{2U_{s0} \cos \theta}{r^2} \left[A/r - Crh_1^{(1)}(K_1 r) \right] \quad (27)$$

$$U_\theta = -\frac{2U_{s0} \sin \theta}{r} \left\{ -A/r^2 + C[K_1 r h_1^{(1)'}(K_1 r) + h_1^{(1)}(K_1 r)] \right\} \quad (28)$$

应用边界条件式 (11) 确定待定系数 A 和 C 为

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{2}a^3 \left[1 + \frac{3(iK_1 a - 1)}{(K_1 a)^2} \right] \\ C &= \frac{3}{2}iae^{-iK_1 a} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

最终得到的速度场为

$$U_r = \frac{a^3}{r^3} U_{s0} \cos \theta - \frac{3ia\delta_v^2}{2r^3} U_{s0} \cos \theta \left[(1 - iK_1 r)e^{iK_1(r-a)} - (1 - iK_1 a) \right] \quad (30)$$

$$U_\theta = \frac{a^3}{2r^3} U_{s0} \sin \theta + \frac{3ia\delta_v^2}{4r^3} U_{s0} \sin \theta \left[1 - iK_1 a - (1 - iK_1 r - K_1^2 r^2)e^{iK_1(r-a)} \right] \quad (31)$$

结合时间因子 $e^{-i\omega t}$, 便可得到单频波动的速度场表达式.

有了速度场后, 便可以用动量方程 (2) 得到压力场. 由于小球为小振幅的单频震荡, 由物理模型的线性性质, 可知流体的压力波动也为单频波动. 设

$$p'(\mathbf{x}, t) = \text{Re}\{P(\mathbf{x})e^{-i\omega t}\} \quad (32)$$

代入到方程 (2) 中, 并注意到对不可压缩流体有 $\nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})$, 得到

$$\nabla P = -\mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{U}) + i\omega \rho \mathbf{U} \quad (33)$$

利用式 (16), 注意到 $(d^2/dr^2 - 2/r^2)f(r) = -K_1^2 f_2(r)$, 再利用运动的轴对称性, 可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial r} &= 2\mu K_1^2 \frac{U_{s0} \cos \theta}{r^3} A \\ \frac{\partial P}{\partial \theta} &= \mu K_1^2 \frac{U_{s0} \sin \theta}{r^2} A \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

积分得到

$$P = -\mu K_1^2 \frac{U_{s0} \cos \theta}{r^2} A \quad (35)$$

系数 A 表达式见式 (29). 结合时间因子 $e^{-i\omega t}$, 就能得到压力波动的表达式

$$p' = \text{Re} \left\{ -\mu K_1^2 \frac{U_{s0} \cos \theta}{r^2} A e^{-i\omega t} \right\} \quad (36)$$

3 讨论

上节推导了震荡小球在不可压缩流体介质假设下的扰动场, 速度场由式 (30) 和式 (31) 描述, 而压力场由式 (36) 描述. 由速度场可以看出, 速度场中包括由黏性作用引起的具有有限传播速度的速度扰动波, 其特征是含因子 $\exp(K_1 r)$. 不具有此因子的项所代表的扰动具有无穷大的传播速度, 即各场点的物理量变动是同相位的, 所以也可以把这种扰动看成是不传播的 (类似于驻波). 当流体为无黏时, 或者小球震荡频率 $\omega \rightarrow \infty$ 时, 黏性穿透深度 δ_v 趋于 0, 此时速度场变为

$$U_r = \frac{a^3}{r^3} U_{s0} \cos \theta \quad (37)$$

$$U_\theta = \frac{a^3}{2r^3} U_{s0} \sin \theta \quad (38)$$

结合时间因子 $e^{-i\omega t}$, 可以看出各场点上速度都做同步变动, 并且振幅以离源点的距离 r 的 r^{-3} 形式衰减. 对于 $\omega \rightarrow 0$ 的情况, 此时 $K_1 r \rightarrow 0$, 速度场趋于

$$U_r = \left(\frac{3a}{2r} - \frac{a^3}{2r^3} \right) U_{s0} \cos \theta \quad (39)$$

$$U_\theta = \left(-\frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right) U_{s0} \cos \theta \quad (40)$$

可以看出速度场扰动衰减速度以 r^{-1} 形式进行.

对于压力场, 从式 (36) 可以看出, 压力波的传播速度为无穷大, 各点压力波动同步, 具有相同的相位, 该相位只与球的半径、震荡频率以及流体黏性相

关,而与空间点的位置无关.这归因于不可压缩流体假设.在这一前提下,压力的控制方程为 Laplace 方程(见式(3)),它可以视为波动方程在声速为无穷大时的特殊情况.

关于经典线性声学中小球震荡声辐射问题的求解,可以参见文献[13],这里列出其结果

$$p' = \operatorname{Re} \left\{ i \rho_0 c_0 k U_{s0} \cos \theta \frac{a^3 (ikr - 1)}{r^2 [2 - i2ka - (ka)^2]} e^{[ik(r-a) - i\omega t]} \right\} \quad (41)$$

$$u_r = \operatorname{Re} \left\{ U_{s0} \cos \theta \frac{a^3 [2 - i2kr - (kr)^2]}{r^3 [2 - i2ka - (ka)^2]} e^{[ik(r-a) - i\omega t]} \right\} \quad (42)$$

$$u_\theta = \operatorname{Re} \left\{ -U_{s0} \sin \theta \frac{a^3 (ikr - 1)}{r^3 [2 - i2ka - (ka)^2]} e^{[ik(r-a) - i\omega t]} \right\} \quad (43)$$

其中 $k = \omega/c_0$ 为波数.可以看出,随着 r 增大,径向速度 u_r 幅度的衰减比 u_θ 慢,另外压力波动 p' 与切向速度 u_θ 之间有 90° 的相位差,所以震荡小球的切向声强为 0. 由于压力和速度波动含有系数 $\cos(kr - \omega t)$,表明为行进波,但当 $ka \ll 1$ 和 $r \rightarrow a$ 时

$$u_r = U_{s0} \cos \theta \frac{a^3}{r^3} \cos(\omega t) \quad (44)$$

$$u_\theta = \frac{1}{2} U_{s0} \sin \theta \frac{a^3}{r^3} \cos(\omega t) \quad (45)$$

它与式(37)和式(38)表达的流场一致,所以代表的是一种不压缩流场,称为声辐射的近场伪声.

4 结论

本文推导了单频震荡小球在不可压缩流体介质中产生的线性扰动场,并与可压缩流体介质的情况(即声波)进行了比较,其主要结论如下:

(1) 对于速度场既具有传播速度为无穷大的扰动波,也包含由流体黏性引起的有限传播速度的扰动波(扩散波),而对于压力扰动只有传播速度为无穷大的分量,这是因为压力的控制方程为 Laplace 方程.

(2) 当流体黏性为 0 或小球震荡频率趋于无穷大时,黏性穿透深度 δ_v 趋于 0,速度场中只包括传播速度为无穷大的扰动分量,并且振幅随着离源点的距离 r 的 r^{-3} 形式衰减.经典声学中震荡小球声辐射问题在小球表面附近产生的流场与其一致,从而说明了小球附近的扰动场为不可压缩流场,即伪声.

(3) 当小球震荡频率趋于 0 时,速度扰动的幅度以 r^{-1} 形式衰减.

参考文献

- 1 Wang CY. Exact solutions of the unsteady Navier-Stokes equations. *Applied Mechanics Reviews*, 1989, 42 (11): 269-282
- 2 Wang CY. Exact solutions of the steady-state Navier-Stokes equations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1991, 23 (1): 159-177
- 3 Lighthill M. On sound generated aerodynamically. I. General theory. *Proceedings of the Royal Society of London Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1952, 211 (1107): 564-587
- 4 Crighton DG. Acoustics as a branch of fluid mechanics. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 1981, 106 (1): 261-298
- 5 Howe M. *Theory of Vortex Sound*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003
- 6 Curle N. The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound. *Proc R Soc Lond A*, 1955, 231 (1187): 505-514
- 7 Ffowcs WJ, Hawkings D. Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion. *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A*, 1969, 264 (1151): 321-342
- 8 Powell A. Theory of vortex sound. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1964, 36 (1): 177-195
- 9 居鸿宾,沈孟育.计算气动声学的问题,方法与进展. *力学与实践*, 1995, 17 (5): 1-10
- 10 Fahy F. *Foundations of Engineering Acoustics*. London: Academic Press, 2001
- 11 Crighton D, Dowling A, Ffowcs WJ, et al. *Modern Method in Analytical Acoustics-Lecture Notes*. Berlin: Springer-Verlag, 1992
- 12 梁昆森. *数学物理方法*. 北京: 高等教育出版社, 2010
- 13 张强. *气动声学基础*. 北京: 国防工业出版社, 2012

(责任编辑:胡漫)