第 29 卷 第 5 期
Vol. 29 No. 5

控 制 与 决 策
Control and Decision

2014 年 5 月
May 2014

文章编号: 1001-0920 (2014) 05-0919-06 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2012.1754

灰色 GM(1,1) 分数阶累积模型及其稳定性

吴利丰[1], 刘思峰[1], 刘 健[2]

(1. 南京航空航天大学 经济与管理学院，南京 210016；2. 南京理工大学 经济管理学院，南京 210094)

摘 要: 基于矩阵扰动理论, 研究利用累积法估计 GM(1,1) 模型参数时解的稳定性问题. 研究结果表明: 累积的阶数越高, 解的扰动界越大; 在扰动值相等的情况下, 新数据相比于老数据, 解的扰动界较小; 新数据对解的影响较小, 这与新信息优先原理相矛盾. 对此, 提出分数阶累积法, 当阶数小于 1 时, 这种矛盾有所缓解, 解的扰动界也较小. 最后通过具体实例验证了分数阶累积法的实用性与可靠性.

关键词: 灰色系统理论；GM(1,1) 模型；累积法；分数阶

中图分类号: N941.5 **文献标志码:** A

GM(1,1) model based on fractional order accumulating method and its stability

WU Li-feng[1], *LIU Si-feng*[1], *LIU Jian*[2]

(1. College of Economics and Management，Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing 210016，China；2. College of Economics and Management，Nanjing University of Science and Technology，Nanjing 210094，China．Correspondent：WU Li-feng，E-mail：wlf6666@126.com)

Abstract: Based on the matrix perturbation theory, the stability problem of the solution to accumulating GM(1,1) is studied. The research results show that the larger the order of accumulating is, the larger the perturbation bound is, and the perturbation bound is smaller when the newer data is perturbed under the equal perturbation. The traditional grey integer order accumulate method leads to the solution to model, which is contradictory with the principle of new information priority, thus the fractional order accumulating method is proposed. The contradiction is relieved and the perturbation bound is becoming smaller when the order is less than 1. A real example demonstrates the practicability and reliability of the proposed method.

Key words: grey system theory；GM(1,1) model；accumulating method；fractional order

0 引 言

GM(1,1) 模型自提出以来, 已被广泛应用于众多领域[1-3], 但作为诞生不久的学科, 理论还不完善. 众多学者对 GM(1,1) 模型进行了改进, 可分为以下几类: 1) 优化背景值或灰导数的构造[3]; 2) 优化 GM(1,1) 模型的初始条件[1]; 3) 对原始数据进行处理[4]; 4) 采用不同方法估计参数, 其中包括最小二乘法[1]、最小一乘法[2]和累积法[5-8]. 这些方法在一定程度上提高了 GM(1,1) 模型的模拟和预测精度, 特别是累积法[9]. 有学者采用累积法[9]估计其他灰色预测模型参数[10-13]. 然而, 在利用累积法估计 GM(1,1) 模型参数时, 数据的微小扰动对于模型参数的辨识会产生怎样的影响？目前还没有相关研究成果.

本文利用矩阵扰动理论证明了: 原有累积法累积的阶数越高, 解的扰动界越大; 当阶数小于 1 时, 解的扰动界较小. 基于分数阶的“in between”思想, 将整数阶累积推广到分数阶累积, 目的是降低扰动界, 缓解新数据对解的影响较小与新信息优先原理的矛盾.

1 基于传统累积法估计 GM(1,1) 模型参数的稳定性

定理 1 设 $A \in C^{n\times n}$ 是非奇异阵, $b \in C^n, x$ 是方程 $Ax = b$ 的解, 且 $1 > \|E\|_2\|A^{-1}\|_2$, $B = A +$

收稿日期: 2012-11-24；**修回日期:** 2013-02-05.

基金项目: 国家社科基金重点项目 (12AZD102)；国家自然科学基金项目 (71171113, 71173106, 71171116)；教育部人文社会科学研究项目 (12YJC630082)；江苏省基础研究计划——青年基金项目 (BK20130786)；国家级教学团队基金项目 (10td128)；南京航空航天大学研究生创新基地开放基金项目 (kfjj130128)；中央高校基本科研业务费专项资金项目；南京理工大学科研启动基金项目 (AE88370).

作者简介: 吴利丰 (1983−), 男, 博士生, 从事灰色系统理论及其应用的研究；刘思峰 (1955−), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统理论、数量经济学等研究.

$E(E\in C^{n\times n})$, 则方程 $A(x+h)=b+k$ 有唯一解 $x+h$, 并且满足

$$\frac{\|h\|}{\|x\|}\leqslant\frac{\kappa}{\gamma}\Big(\frac{\|E\|_2}{\|A\|}+\frac{\|k\|}{\|b\|}\Big).$$

其中

$$\kappa=\|A^{-1}\|_2\|A\|,\ \gamma=1-\kappa\|E\|_2/\|A\|>0.$$

相关证明过程参见文献[14].

定理 2[5] 按照累积法, GM(1,1) 模型 $x^{(0)}(k+1)+az^{(1)}(k)=b$ 的参数列满足

$$[a\quad b]^{\mathrm{T}}=B^{-1}Y.$$

其中

$$Y=\begin{bmatrix}-\sum\limits_{k=2}^{n}{}^{(1)}x^{(0)}(k)\\ -\sum\limits_{k=2}^{n}{}^{(2)}x^{(0)}(k)\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}\sum\limits_{k=2}^{n}{}^{(1)}z^{(1)}(k) & -\sum\limits_{k=2}^{n}{}^{(1)}\\ \sum\limits_{k=2}^{n}{}^{(2)}z^{(1)}(k) & -\sum\limits_{k=2}^{n}{}^{(2)}\end{bmatrix}.$$

定理 3[9] 对于 $k>0$ 和给定的观察值 $\{x_j:j=1,2,\cdots,m\}$, k 阶累积和为

$$\sum_{j=1}^{m}{}^{(k)}x_j=\sum_{j=1}^{m}\mathrm{C}_{m-j+k-1}^{m-j}x_j=\sum_{j=1}^{m}\mathrm{C}_{m-j+k-1}^{k-1}x_j.$$

定理 4 如果 $\hat{x}^{(0)}(r)=x^{(0)}(r)+\varepsilon$ $(r=2,3,\cdots,n)$ 分别发生扰动, 相应的 Y 和 B 都会发生变化, 则扰动界记为

$$L[x^{(0)}(r)]=|\varepsilon|\frac{\kappa}{\gamma}\Big(\frac{\sqrt{(n-r+1)^4+(2n-2r+1)^2}}{2\|A\|}+\frac{\sqrt{(n-r+1)^2+1}}{\|b\|}\Big),\ r=2,3,\cdots,n.$$

注 1 定理4不讨论原始序列中的第1个数 $x^{(0)}(1)$, 因为改变第1个数不会影响预测精度.

证明 1) 如果只发生扰动 $\hat{x}^{(0)}(2)=x^{(0)}(2)+\varepsilon$, 则由定理2和定理3可得

$$B=\begin{bmatrix}\sum\limits_{k=2}^{n}{}^{(1)}z^{(1)}(k) & -\sum\limits_{k=2}^{n}{}^{(1)}\\ \sum\limits_{k=2}^{n}{}^{(2)}z^{(1)}(k) & -\sum\limits_{k=2}^{n}{}^{(2)}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\sum\limits_{k=2}^{n}z^{(1)}(k) & -(n-1)\\ \sum\limits_{k=2}^{n}C_{n-k+1}^{1}z^{(1)}(k) & -\sum\limits_{k=2}^{n}C_{n-k+1}^{1}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ C_{n-1}^{1} & C_{n-2}^{1} & \cdots & C_2^1 & C_1^1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z^{(1)}(2) & -1\\ z^{(1)}(3) & -1\\ \vdots & \vdots\\ z^{(1)}(n) & -1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ C_{n-1}^{1} & C_{n-2}^{1} & \cdots & C_2^1 & C_1^1\end{bmatrix}_{2\times(n-1)}\cdot$$

$$\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}_{(n-1)\times n}\begin{bmatrix}x^{(0)}(1) & -1\\ x^{(0)}(2) & 0\\ \vdots & \vdots\\ x^{(0)}(n) & 0\end{bmatrix}_{n\times 2}=$$

$$\begin{bmatrix}n-1 & n-2+\frac{1}{2} & n-3+\frac{1}{2} & \cdots & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{n(n-1)}{2} & \frac{(n-1)^2}{2} & \frac{(n-2)^2}{2} & \cdots & 2 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x^{(0)}(1) & -1\\ x^{(0)}(2) & 0\\ \vdots & \vdots\\ x^{(0)}(n) & 0\end{bmatrix},\tag{1}$$

$$\hat{B}=\begin{bmatrix}n-1 & n-2+\frac{1}{2} & n-3+\frac{1}{2} & \cdots & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{n(n-1)}{2} & \frac{(n-1)^2}{2} & \frac{(n-2)^2}{2} & \cdots & 2 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x^{(0)}(1) & -1\\ x^{(0)}(2)+\varepsilon & 0\\ \vdots & \vdots\\ x^{(0)}(n) & 0\end{bmatrix}=$$

$$B+\begin{bmatrix}n-1 & n-2+\frac{1}{2} & n-3+\frac{1}{2} & \cdots & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{n(n-1)}{2} & \frac{(n-1)^2}{2} & \frac{(n-2)^2}{2} & \cdots & 2 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 0\\ \varepsilon & 0\\ \vdots & \vdots\\ 0 & 0\end{bmatrix}=B+\begin{bmatrix}(n-\frac{3}{2})\varepsilon & 0\\ \frac{(n-1)^2\varepsilon}{2} & 0\end{bmatrix},\tag{2}$$

$$Y=\begin{bmatrix}-\sum\limits_{k=2}^{n}{}^{(1)}x^{(0)}(k)\\ -\sum\limits_{k=2}^{n}{}^{(2)}x^{(0)}(k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sum\limits_{k=2}^{n}x^{(0)}(k)\\ -\sum\limits_{k=2}^{n}C_{n-k+1}^{1}x^{(0)}(k)\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}-1 & -1 & \cdots & -1\\ -C_{n-1}^{1} & -C_{n-2}^{1} & \cdots & -1\end{bmatrix}_{(n-1)\times n}\begin{bmatrix}x^{(0)}(2)\\ x^{(0)}(3)\\ \vdots\\ x^{(0)}(n)\end{bmatrix},\tag{3}$$

$$\hat{Y}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & \cdots & -1\\ -C_{n-1}^{1} & -C_{n-2}^{1} & \cdots & -1\end{bmatrix}_{(n-1)\times n}\cdot$$

$$[\,x^{(0)}(2)+\varepsilon\ \ x^{(0)}(3)\ \ \cdots\ \ x^{(0)}(n)\,]^{\mathrm{T}}=$$

$$Y+\begin{bmatrix}-1 & -1 & \cdots & -1\\ -C_{n-1}^{1} & -C_{n-2}^{1} & \cdots & -1\end{bmatrix}_{(n-1)\times n}\begin{bmatrix}\varepsilon\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}=$$

$$Y+\begin{bmatrix}-\varepsilon\\ -(n-1)\varepsilon\end{bmatrix}. \tag{4}$$

由式 (1) 和 (2) 可得

$$E=\begin{bmatrix}(n-\frac{3}{2})\varepsilon & 0\\ \frac{(n-1)^2\varepsilon}{2} & 0\end{bmatrix},$$

$$E^{\rm T}E=\begin{bmatrix}\frac{(n-1)^4+(2n-3)^2}{4}\varepsilon^2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

$E^{\rm T}E$ 的最大特征根为 $\frac{(n-1)^4+(2n-3)^2}{4}\varepsilon^2$, 因此有

$$\|E\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(E^{\rm T}E)}=\frac{\sqrt{(n-1)^4+(2n-3)^2}}{2}|\varepsilon|.$$

由式 (3) 和 (4) 可得 $k=\begin{bmatrix}-\varepsilon\\ -(n-1)\varepsilon\end{bmatrix}$.

由于所有向量范数都是等价的, 不管采用哪种范数来计算条件数, 本质上都是一致的. 为了讨论方便, 这里取 2 范数 $\|k\|_2=\sqrt{n^2-2n+2}|\varepsilon|$. 由定理 1 可得

$$\frac{\|h\|}{\|x\|}\leqslant\frac{\kappa}{\gamma}\Big(\frac{\|E\|_2}{\|A\|}+\frac{\|k\|}{\|b\|}\Big)=$$
$$|\varepsilon|\frac{\kappa}{\gamma}\Big(\frac{\sqrt{(n-1)^4+(2n-3)^2}}{2\|A\|}+\frac{\sqrt{n^2-2n+2}}{\|b\|}\Big),$$
$$L[x^{(0)}(2)]=$$
$$|\varepsilon|\frac{\kappa}{\gamma}\Big(\frac{\sqrt{(n-1)^4+(2n-3)^2}}{2\|A\|}+\frac{\sqrt{n^2-2n+2}}{\|b\|}\Big).$$

2) 依次类推, 如果只发生扰动 $\hat{x}^{(0)}(r)=x^{(0)}(r)+\varepsilon, r=3,4,\cdots,n$, 解的扰动界为

$$\frac{\|h\|}{\|x\|}\leqslant\frac{\kappa}{\gamma}\Big(\frac{\|E\|_2}{\|A\|}+\frac{\|k\|}{\|b\|}\Big)=$$
$$|\varepsilon|\frac{\kappa}{\gamma}\Big(\frac{\sqrt{(n-r+1)^4+(2n-2r+1)^2}}{2\|A\|}+$$
$$\frac{\sqrt{(n-r+1)^2+1}}{\|b\|}\Big),$$
$$L[x^{(0)}(r)]=$$
$$|\varepsilon|\frac{\kappa}{\gamma}\Big(\frac{\sqrt{(n-r+1)^4+(2n-2r+1)^2}}{2\|A\|}+$$
$$\frac{\sqrt{(n-r+1)^2+1}}{\|b\|}\Big),\ r=3,4,\cdots,n. \quad\square$$

2 基于分数阶累积法估计灰色模型参数的稳定性

虽然解的扰动界大, 但并不意味扰动一定大, 因为扰动不会超过扰动界. 但是, 随着原始序列样本量的增大, 解的扰动界变大, 这会给人一种“美中不足”的感觉. 因此从系统稳定的角度看, 希望得到较小的扰动界.

分数阶蕴含的一种“in between”思想得到了越来越多学者的认可[15-16]. 为了进一步研究累积阶数对 GM(1,1) 模型解的影响, 提出了分数阶累积法.

定义 1 对于 p/q 和给定的观察值 $\{x_j: j=1,2,\cdots,m\}$, p/q 阶累积和为

$$\sum_{j=1}^{m}{}^{(\frac{p}{q})}x_j=\sum_{j=1}^{m}C_{m-j+\frac{p}{q}-1}^{m-j}x_j.$$

规定

$$C_{\frac{p}{q}-1}^{0}=1,$$
$$C_{m-j+\frac{p}{q}-1}^{m-j}=$$
$$\frac{\Big(m-j+\frac{p}{q}-1\Big)\Big(m-j+\frac{p}{q}-2\Big)\cdots\Big(\frac{p}{q}+1\Big)\frac{p}{q}}{(m-j)!}.$$

定理 5 如果 $\hat{x}^{(0)}(r)=x^{(0)}(r)+\varepsilon(r=2,3,\cdots,n)$ 分别发生扰动, 则相应的 Y 和 B 都发生变化, 扰动界记为 $L^{\frac{p}{q}}[x^{(0)}(r)], r=2,3,\cdots,n$, 由此可得

$$L^{\frac{p}{q}}[x^{(0)}(r)]=$$
$$|\varepsilon|\frac{\kappa}{\gamma}\Big(\frac{\sqrt{\Big(C_{n-r+\frac{p}{q}}^{n-r}+C_{n-r-1+\frac{p}{q}}^{n-r-1}\Big)^2+(2n-2r+1)^2}}{2\|A\|}+$$
$$\frac{\sqrt{\Big(C_{n-r-1+\frac{p}{q}}^{n-r}\Big)^2+1}}{\|b\|}\Big),\ r=2,3,\cdots,n.$$

证明 1) 如果只发生扰动 $\hat{x}^{(0)}(2)=x^{(0)}(2)+\varepsilon$, 则有

$$B=\begin{bmatrix}\sum_{k=2}^{n}{}^{(1)}z^{(1)}(k) & -\sum_{k=2}^{n}{}^{(1)}\\ \sum_{k=2}^{n}{}^{(\frac{p}{q})}z^{(1)}(k) & -\sum_{k=2}^{n}{}^{(\frac{p}{q})}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{k=2}^{n}z^{(1)}(k) & -(n-1)\\ \sum_{k=2}^{n}C_{n-k+\frac{p}{q}-1}^{n-k}z^{(1)}(k) & -\sum_{k=2}^{n}C_{n-k+\frac{p}{q}-1}^{n-k}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ C_{n-3+\frac{p}{q}}^{n-2} & C_{n-4+\frac{p}{q}}^{n-3} & \cdots & C_{\frac{p}{q}}^{1} & C_{\frac{p}{q}-1}^{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z^{(1)}(2) & -1\\ z^{(1)}(3) & -1\\ \vdots & \vdots\\ z^{(1)}(n) & -1\end{bmatrix}=$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ C^{n-2}_{n-3+\frac{p}{q}} & C^{n-3}_{n-4+\frac{p}{q}} & \cdots & C^{1}_{\frac{p}{q}} & C^{0}_{\frac{p}{q}-1} \end{bmatrix}_{2\times(n-1)}
\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{(n-1)\times n}
\begin{bmatrix} x^{(0)}(1) & -1 \\ x^{(0)}(2) & 0 \\ \vdots & \vdots \\ x^{(0)}(n) & 0 \end{bmatrix}_{n\times 2} =
$$

$$
\begin{bmatrix} n-1 & n-2+\frac{1}{2} & n-3+\frac{1}{2} & \cdots & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ C^{n-2}_{n-2+\frac{p}{q}} & \dfrac{C^{n-2}_{n-2+\frac{p}{q}}+C^{n-3}_{n-3+\frac{p}{q}}}{2} & \dfrac{C^{n-3}_{n-3+\frac{p}{q}}+C^{n-4}_{n-4+\frac{p}{q}}}{2} & \cdots & 1+\dfrac{p}{2q} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x^{(0)}(1) & -1 \\ x^{(0)}(2) & 0 \\ \vdots & \vdots \\ x^{(0)}(n) & 0 \end{bmatrix}, \tag{5}
$$

$$
\hat{B} = \begin{bmatrix} n-1 & n-2+\frac{1}{2} & n-3+\frac{1}{2} & \cdots & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ C^{n-2}_{n-2+\frac{p}{q}} & \dfrac{C^{n-2}_{n-2+\frac{p}{q}}+C^{n-3}_{n-3+\frac{p}{q}}}{2} & \dfrac{C^{n-3}_{n-3+\frac{p}{q}}+C^{n-4}_{n-4+\frac{p}{q}}}{2} & \cdots & 1+\dfrac{p}{2q} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x^{(0)}(1) & -1 \\ x^{(0)}(2)+\varepsilon & 0 \\ \vdots & \vdots \\ x^{(0)}(n) & 0 \end{bmatrix} =
$$

$$
B + \begin{bmatrix} n-1 & n-2+\frac{1}{2} & n-3+\frac{1}{2} & \cdots & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ C^{n-2}_{n-2+\frac{p}{q}} & \dfrac{C^{n-2}_{n-2+\frac{p}{q}}+C^{n-3}_{n-3+\frac{p}{q}}}{2} & \dfrac{C^{n-3}_{n-3+\frac{p}{q}}+C^{n-4}_{n-4+\frac{p}{q}}}{2} & \cdots & 1+\dfrac{p}{2q} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =
$$

$$
B + \begin{bmatrix} \left(n-\frac{3}{2}\right)\varepsilon & 0 \\ \dfrac{\left(C^{n-2}_{n-2+\frac{p}{q}}+C^{n-3}_{n-3+\frac{p}{q}}\right)\varepsilon}{2} & 0 \end{bmatrix}, \tag{6}
$$

$$
Y = \begin{bmatrix} -\sum\limits_{k=2}^{n} {}^{(1)}x^{(0)}(k) \\ -\sum\limits_{k=2}^{n} {}^{(\frac{p}{q})}x^{(0)}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum\limits_{k=2}^{n} x^{(0)}(k) \\ -\sum\limits_{k=2}^{n} C^{n-k}_{n-k+\frac{p}{q}-1}x^{(0)}(k) \end{bmatrix} =
$$

$$
\begin{bmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -C^{n-2}_{n-3+\frac{p}{q}} & -C^{n-3}_{n-4+\frac{p}{q}} & \cdots & -C^{0}_{\frac{p}{q}-1} \end{bmatrix}_{(n-1)\times n}
\begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix}, \tag{7}
$$

$$
\hat{Y} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -C^{n-2}_{n-3+\frac{p}{q}} & -C^{n-3}_{n-4+\frac{p}{q}} & \cdots & -C^{0}_{\frac{p}{q}-1} \end{bmatrix}_{(n-1)\times n}
\begin{bmatrix} x^{(0)}(2)+\varepsilon \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix} =
$$

$$
Y + \begin{bmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -C^{n-2}_{n-3+\frac{p}{q}} & -C^{n-3}_{n-4+\frac{p}{q}} & \cdots & -C^{0}_{\frac{p}{q}-1} \end{bmatrix}_{(n-1)\times n}
\begin{bmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = Y + \begin{bmatrix} -\varepsilon \\ -C^{n-2}_{n-3+\frac{p}{q}}\varepsilon \end{bmatrix}. \tag{8}
$$

由式 (5) 和 (6) 可得

$$
E = \begin{bmatrix} \left(n-\frac{3}{2}\right)\varepsilon & 0 \\ \dfrac{\left(C^{n-2}_{n-2+\frac{p}{q}}+C^{n-3}_{n-3+\frac{p}{q}}\right)\varepsilon}{2} & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
E^{\mathrm{T}}E = \begin{bmatrix} \dfrac{\left(C^{n-2}_{n-2+\frac{p}{q}}+C^{n-3}_{n-3+\frac{p}{q}}\right)^2+(2n-3)^2}{4}\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

$E^{\mathrm{T}}E$ 的最大特征根为

$$\frac{\left(C_{n-2+\frac{p}{q}}^{n-2}+C_{n-3+\frac{p}{q}}^{n-3}\right)^{2}+(2n-3)^{2}}{4}\varepsilon^{2},$$

因此有

$$\|E\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(E^{\mathrm{T}}E)}=\frac{\sqrt{\left(C_{n-2+\frac{p}{q}}^{n-2}+C_{n-3+\frac{p}{q}}^{n-3}\right)^{2}+(2n-3)^{2}}}{2}|\varepsilon|.$$

由式 (7) 和 (8) 可得

$$k=\begin{bmatrix}-\varepsilon\\ -C_{n-3+\frac{p}{q}}^{n-2}\varepsilon\end{bmatrix}.$$

对 k 取 2 范数

$$\|k\|_2=\sqrt{(C_{n-3+\frac{p}{q}}^{n-2})^2+1}|\varepsilon|.$$

由定理 1 可得

$$\frac{\|h\|}{\|x\|}\leqslant\frac{\kappa}{\gamma}\Big(\frac{\|E\|_2}{\|A\|}+\frac{\|k\|}{\|b\|}\Big)=|\varepsilon|\frac{\kappa}{\gamma}\Big(\frac{\sqrt{\left(C_{n-2+\frac{p}{q}}^{n-2}+C_{n-3+\frac{p}{q}}^{n-3}\right)^{2}+(2n-3)^{2}}}{2\|A\|}+\frac{\sqrt{\left(C_{n-3+\frac{p}{q}}^{n-2}\right)^{2}+1}}{\|b\|}\Big),$$

$$L^{\frac{p}{q}}[x^{(0)}(2)]=|\varepsilon|\frac{\kappa}{\gamma}\Big(\frac{\sqrt{\left(C_{n-2+\frac{p}{q}}^{n-2}+C_{n-3+\frac{p}{q}}^{n-3}\right)^{2}+(2n-3)^{2}}}{2\|A\|}+\frac{\sqrt{\left(C_{n-3+\frac{p}{q}}^{n-2}\right)^{2}+1}}{\|b\|}\Big).$$

2) 依次类推, 如果只发生扰动 $\hat{x}^{(0)}(r)=x^{(0)}(r)+\varepsilon,r=3,4,\cdots,n$, 则解的扰动界为

$$\frac{\|h\|}{\|x\|}\leqslant\frac{\kappa}{\gamma}\Big(\frac{\|E\|_2}{\|A\|}+\frac{\|k\|}{\|b\|}\Big)=\frac{|\varepsilon|\kappa}{\gamma}\Big(\frac{\sqrt{\left(C_{n-r+\frac{p}{q}}^{n-r}+C_{n-r-1+\frac{p}{q}}^{n-r-1}\right)^{2}+(2n-2r+1)^{2}}}{2\|A\|}+\frac{\sqrt{\left(C_{n-r-1+\frac{p}{q}}^{n-r}\right)^{2}+1}}{\|b\|}\Big),$$

$$L^{\frac{p}{q}}[x^{(0)}(r)]=|\varepsilon|\frac{\kappa}{\gamma}\Big(\frac{\sqrt{\left(C_{n-r+\frac{p}{q}}^{n-r}+C_{n-r-1+\frac{p}{q}}^{n-r-1}\right)^{2}+(2n-2r+1)^{2}}}{2\|A\|}+\frac{\sqrt{\left(C_{n-r-1+\frac{p}{q}}^{n-r}\right)^{2}+1}}{\|b\|}\Big),\ r=3,4,\cdots,n.\quad\square$$

显然, 当 r 固定时, p/q 越大, $L^{\frac{p}{q}}[x^{(0)}(r)]$ 越大. 当 $0<p/q<1$ 时, $L^{\frac{p}{q}}[x^{(0)}(r)]<L[x^{(0)}(r)]$, 说明在扰动都是 ε 的情况下, 利用 p/q 阶累积法求解 GM(1,1) 模型参数得到的扰动界较小. 由此可知 $L^{\frac{p}{q}}[x^{(0)}(2)]>L^{\frac{p}{q}}[x^{(0)}(3)]>\cdots>L^{\frac{p}{q}}[x^{(0)}(n)]$, 即在扰动相等的情况下, 越新的数据发生扰动, 解的扰动界越小. 越新的数据对解的影响越小, 这与新信息优先原理相矛盾. 当 $0<p/q<1$ 时, 扰动界的差 $L^{\frac{p}{q}}[x^{(0)}(k-1)]-L^{\frac{p}{q}}[x^{(0)}(k)](k=3,4,\cdots,n)$ 变小, 因此, 利用 p/q 阶累积法求解 GM(1,1) 模型参数会使这种矛盾缓和, 但不能根除, 这是因为此时扰动界的差依然为正数, 只有当扰动界的差 $L^{\frac{p}{q}}[x^{(0)}(k-1)]-L^{\frac{p}{q}}[x^{(0)}(k)](k=3,4,\cdots,n)$ 为负数时, 才能体现新信息优先原理. 当 $p/q\geqslant 1$ 时, 利用 p/q 阶累积法求解 GM(1,1) 模型参数会使矛盾进一步加剧.

3 实例分析

为了便于比较, 采用文献 [4] 的算例. 用 2000～2005 年的数据 (如表 1 所示) 分别建立 3 种模型, 预测 2006 年的人均电力消费, 结果对比如表 2 所示.

表 1 中国人均电力消费表

参数	2000 年	2001 年	2002 年	2003 年	2004 年	2005 年	2006 年
$x^{(0)}(k)$	132.4	144.6	156.3	173.7	190.2	216.7	249.4

表 2 预测结果对比表

年份	平均相对误差/%		
	模型 (9)	模型 (10)	模型 (11)
2000～2005	0.94	0.93	0.88
2006	5.32	4.94	3.65

当 $p/q=3$ 时, 所建模型为

$$\hat{x}(k)=\Big(132.4+\frac{122.269\,8}{0.100\,5}\Big)(1-\mathrm{e}^{-0.100\,5})\mathrm{e}^{0.100\,5k}.$$

利用传统的累积法 $(p/q=1)$ 建模可得

$$\hat{x}(k+1)=\Big(132.4+\frac{121.553}{0.101\,8}\Big)(1-\mathrm{e}^{-0.101\,8})\mathrm{e}^{0.101\,8k}.$$

当 $p/q=1/2$ 时, 所建模型为

$$\hat{x}(k)=\Big(132.4+\frac{119.132\,7}{0.106\,4}\Big)(1-\mathrm{e}^{-0.106\,4})\mathrm{e}^{0.106\,4k}.$$

由表 2 可见, p/q 越小, 所建模型越稳定, 拟合精度和预测精度越高.

4 结　论

稳定性是研究任何系统都必须考虑的问题. 本文利用矩阵扰动理论证明了: 原有累积法累积的阶数越高, 解的扰动界越大; 在扰动相等的情况下, 发生扰动的数据越新, 解的扰动界越小, 数据对解的影响越小, 这与新信息优先原理相矛盾; 当阶数小于 1 时, 这种矛盾有所缓和, 但不能根除, 也没有体现新信息的重要性. 如何在提高 GM(1,1) 模型精度和稳定性的同时, 消除这种矛盾是以后研究的一个方向. 最后通过具体实例验证了当阶数小于 1 时, 灰色预测模型解的扰动界较小, 模型的解相对稳定. 然而, 阶数如何恰当取值也是值得研究的一个问题.

参考文献(References)

[1] Liu S F, Lin Y. Grey systems: Theory and applications[M]. London: Springer-Verlag, 2010: 12.

[2] Zhao Z, Wang J Z, Zhao J, et al. Using a grey model optimized by differential evolution algorithm to forecast the per capita annual net income of rural households in China[J]. Omega, 2012, 40(5): 525-532.

[3] Lin Y H, Chiu C C, Lee P C, et al. Applying fuzzy grey modification model on inflow forecasting[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2012, 25(4): 734-743.

[4] 崔立志, 刘思峰, 吴正朋. 新的强化缓冲算子的构造及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(3): 484-489.
(Cui L Z, Liu S F, Wu Z P. New strengthening buffer operators and applications[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2010, 30(3): 484-489.)

[5] 曾祥艳, 肖新平. GM(1,1)模型拓广方法研究与应用[J]. 控制与决策, 2009, 24(7): 1092-1096.
(Zeng X Y, Xiao X P. Study on generalization for GM(1,1) model and its application[J]. Control and Decision, 2009, 24(7): 1092-1096.)

[6] 郭文艳, 任大卫. 新信改进GM(1,1)模型参数估计的新方法[J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(24): 62-64.
(Guo W Y, Ren D W. New method of estimating model parameters of modified GM(1,1)[J]. Computer Engineering and Applications, 2008, 44(24): 62-64.)

[7] 李洪然, 张阿根, 叶为民. 参数累积估计灰色模型及地面沉降预测[J]. 岩土力学, 2008, 29(12): 3417-3421.
(Li H R, Zhang A G, Ye W M. Accumulating method GM(1,1) model and prediction of land subsidence[J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, 29(12): 3417-3421.)

[8] 黄磊, 张书毕. 参数累积估计PGM(1,1)模型在变形预测中的应用[J]. 城市勘测, 2012, 27(4): 152-155.
(Huang L, Zhang S B. The application of accumulating method PGM(1,1) model for deformation prediction[J]. Urban Geotechnical Investigation & Surveying, 2012, 27(4): 152-155.)

[9] 曹定爱. 累积法理论[M]. 北京: 科学出版社, 2011: 171.
(Cao D A. Accumulating method theory[M]. Beijing: Science Press, 2011: 171.)

[10] 苏欣, 张琳, 袁宗明. 城市燃气长期负荷的累积法预测[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2009, 41(3): 254-256.
(Su X, Zhang L, Yuan Z M. An accumulation method to predict the long-period load of city gas[J]. J of Harbin Institute of Technology, 2009, 41(3): 254-256.)

[11] 李峰, 王仲东. GM(0,N)模型参数估计的新方法[J]. 武汉理工大学学报, 2002, 26(5): 625-627.
(Li F, Wang Z D. A new method of estimating the model parameters of GM(0,N)[J]. J of Wuhan University of Technology, 2002, 26(5): 625-627.)

[12] 曾祥艳, 肖新平. 累积法GM(2,1)模型及其病态性研究[J]. 系统工程与电子技术, 2006, 28(4): 542- 545.
(Zeng X Y, Xiao X P. Research on morbidity problem of accumulating method GM(2,1) model[J]. Systems Engineering and Electronics, 2006, 28(4): 542-545.)

[13] 刘圣保, 张公让, 毛雪岷, 等. 反向累积法GM(2,1)模型及其病态性研究[J]. 合肥工业大学学报, 2011, 34(4): 603-608.
(Liu S B, Zhang G R, Mao X M, et al. Research on reverse accumulating GM(2,1) model and its morbidity problem[J]. J of Hefei University of Technology, 2011, 34(4): 603-608.)

[14] 孙继广. 矩阵扰动分析[M]. 北京: 科学出版社, 1987: 323.
(Sun J G. Matrix perturbation analysis[M]. Beijing: Sciences Press, 1987: 323.)

[15] 张碧陶, 皮佑国. 永磁同步电机伺服系统模糊分数阶滑模控制[J]. 控制与决策, 2012, 27(12): 1776-1780.
(Zhang B T, Pi Y G. Fractional order fuzzy sliding model control for permanent magnet synchronous motor servo drive[J]. Control and Decision, 2012, 27(12): 1776-1780.)

[16] Tripathi M P, Baranwal V K, Pandey R K, et al. A new numerical algorithm to solve fractional differential equations based on operational matrix of generalized hat function[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2013, 18(6): 1327-1340.

(责任编辑: 滕 蓉)