第 29 卷 第 5 期
Vol. 29 No. 5

控 制 与 决 策
Control and Decision

2014 年 5 月
May 2014

文章编号: 1001-0920 (2014) 05-0907-06

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2013.0120

基于时滞分割法的区间变时滞不确定系统鲁棒稳定新判据

张合新[1], 惠俊军[1,2], 周 鑫[1], 李国梁[1]

(1. 第二炮兵工程大学 控制工程系，西安 710025；2. 宝鸡市150信箱11分箱，陕西 宝鸡 721013)

摘 要: 针对一类存在泛数有界不确性性的区间变时滞线性系统, 利用 Lyapunov-Krasovskii (L-K) 泛函方法并结合线性矩阵不等式 (LMI) 技术建立一种新的保守性更低的鲁棒稳定性判据. 首先基于时滞分割方法将时滞区间均分成 N 等分, 针对不同的子区间构造合适的 L-K 泛函; 然后在各自的分割区间采用保守性较小的积分不等式处理泛函沿时间的导数, 基于凸组合技术建立了 LMI 形式的时滞相关稳定性新判据; 最后通过数值实例验证了结论的有效性.

关键词: Lyapunov-Krasovskii (L-K) 泛函；鲁棒稳定；区间时滞；积分不等式；线性矩阵不等式

中图分类号: TP13 **文献标志码:** A

New robust stability criteria for uncertain systems with interval time-varying delay based on delay-partitioning approach

ZHANG He-xin[1], *HUI Jun-jun*[1,2], *ZHOU Xin*[1], *LI Guo-liang*[1]

(1. Department of Automation，The Second Artillery Engineering University，Xi’an 710025，China；2. Mail Box 150 Extension 11，Baoji 721013，China．Correspondent：HUI Jun-jun，E-mail：ep22stone@163.com)

Abstract: For a class of linear systems with norm-bounded uncertainty and interval time-varying delay, less conservative robust stability criteria is proposed based on the Lyapunov-Krasovskii(L-K) functional approach and linear matrix inequalitiy(LMI) technique. Firstly, the delay interval is partitioned into N equidistant subintervals and designing new L-K functional technique for each subinterval. Then, combined with a less conservative integral inequality, the time derivative of a candidate L-K functional is evaluated in each of these delay segments. Based on the convex combination technique, a new delay-dependent stability criteria for the system is formulated in terms of LMIs. Finally, numerical examples are given to show the effectiveness of the proposed approach.

Key words: Lyapunov-Krasovskii(L-K) functional；robust stability；interval time-delay；integral inequality；linear matrix inequality(LMI)

0 引 言

时滞现象常存在于通讯系统、过程控制系统和核反应堆等工程实际中, 它的存在常常使得系统性能恶化甚至不稳定, 所以对时滞系统的稳定性分析与综合问题一直是控制理论研究的热点问题[1]. 近年来, 区间时滞系统受到研究者的广泛关注, 在这类系统中, 时滞处于一个变化的区间之内, 区间下界不一定为零, 网络控制系统便是区间时滞的一个典型例子[2].

目前关于时滞系统稳定性分析的基本框架是 Lyapunov-Krasovskii (L-K) 泛函结合线性矩阵不等式 (LMI). 在此框架下, 多数研究是针对如何降低系统的保守性而展开的. 就研究方法而言, 自由权矩阵方法和积分不等式方法备受关注. He 等[3-4]通过 Newton-Leibniz 公式引入自由权矩阵来表示相关项之间的关系, 提出了自由权矩阵方法. 该方法克服了交叉项界定和模型变换的不足, 在降低系统的保守性方面起到一定的积极作用. 但是过多的自由矩阵会增加计算的复杂性. 积分不等式方法是另一种重要的分析方法, 它的主要特点是形式简单, 含矩阵变量少, 有利于理论分析和计算. Gu[5]最早将积分不等式方法引入时滞系统的稳定性分析中, 随后 Han[6], Zhang 等[7-8], Sun 等[9], Kwon 等[10]学者对积分不等式做了进一步推广, 得到放大程度各不相同的形式, 从而在时滞系统的稳定性分析中得到保守性各不相同的结果[6-14]. 虽然以上两种方法在时滞系统的稳定性分析中被广泛采用, 但是已有文献[15]从数学上严格证明了

收稿日期: 2013-01-24；**修回日期:** 2013-07-25.

作者简介: 张合新(1965−), 男, 教授, 博士生导师, 从事飞行器制导与控制等研究；惠俊军(1977−), 男, 博士生, 从事时滞系统的稳定性分析与综合的研究.

这两种方法解空间的相同性, 其在减少保守性方面存在“瓶颈”. Han[16]在简单二次Lyapunov泛函的基础上引入离散时滞分割的思想, 显著减少了结论的保守性与计算复杂性. Peng等[17]基于时滞分割的思想提出时滞中点法, Balasubramaniam等[18]和Ramakrishnan等[19]分别对时滞分割方法做了进一步的深入研究. 然而, 文献[18-19]所提出的时滞分割方法随着分解数目的增加, 引入了过多的决策变量, LMI的维数也相应增加, 使得系统稳定的判定性条件变得复杂, 不利于LMI求解. 最近, Wang等[20]针对随机时滞系统提出一种新的时滞分解方法, 该方法针对不同的分割区间巧妙地构造合适的L-K泛函, 随着分割数的增加,系统的保守性逐渐降低且没有因此而增加系统的决策变量, 利于求解. 然而, 在文献[20]中, L-K泛函只包含简单积分项和二重积分项, 没有包含三重积分项. 显然, 在L-K泛函中引入三重积分项有利于降低结论的保守性[9].

借鉴以上研究成果, 本文针对区间变时滞不确定系统, 基于时滞分割法构造了新的包含三重积分项和增广项的L-K泛函, 基于L-K稳定性定理、积分不等式方法和凸组合技术, 建立了时滞相关鲁棒稳定性判据. 该判据扩大了系统稳定的时滞界范围, 与已有文献相比具有较低的保守性.

1 问题描述

考虑如下含区间变时滞不确定线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + (B + \Delta B(t))x(t - h(t)), \\ x(t) = \varphi(t),\ t \in [-h_M, 0]. \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x(t) \in R^n$ 为系统状态变量; $\varphi(t)$ 为初始函数; A 和 B 为适当维数的已知定常矩阵; $h(t)$ 为连续的时变时滞函数且满足如下条件:

$$\text{Case I}:\ 0 \leqslant h_m \leqslant h(t) \leqslant h_M, \dot{h}(t) \leqslant \mu,\ \forall t \geqslant 0, \tag{2}$$

$$\text{Case II}:\ 0 \leqslant h_m \leqslant h(t) \leqslant h_M,\ \forall t \geqslant 0; \tag{3}$$

$\Delta A(t)$, $\Delta B(t)$ 为具有时变结构不确定性的未知矩阵, 可描述为如下形式:

$$[\ \Delta A(t)\ \ \Delta B(t)\ ] = DF(t)[\ E_a\ \ E_b\ ], \tag{4}$$

D、E_a 和 E_b 为适当维数的定常矩阵, 而 $F(t)$ 是具有可测元的不确定时变矩阵, 且满足

$$F(t)^{\mathrm{T}} F(t) \leqslant I,\ \forall t, \tag{5}$$

I 表示适当维数的单位矩阵, 当 $F(t) = 0$ 时, 系统成为标称系统.

为了方便证明, 现将文中用到的引理归纳如下:

引理 1[8] 对于任意定常矩阵 $W \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$, $W = W^{\mathrm{T}} > 0$, 标量 $h := h(t) > 0$ 和向量函数 $\dot{x} : [-h, 0] \to \boldsymbol{R}^n$, 使得下面的积分有定义, 则以下不等式成立:

$$-h\int_{t-h}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)W\dot{x}(s)\mathrm{d}s \leqslant \varsigma_1^{\mathrm{T}}(t)\begin{bmatrix} -W & W \\ W & -W \end{bmatrix}\varsigma_1(t),$$

$$-\frac{h^2}{2}\int_{-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)W\dot{x}(s)\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\varsigma_2^{\mathrm{T}}(t)\begin{bmatrix} -W & W \\ W & -W \end{bmatrix}\varsigma_2(t).$$

其中

$$\varsigma_1^{\mathrm{T}}(t) = [\ x^{\mathrm{T}}(t)\ \ x^{\mathrm{T}}(t-h)\ ],$$

$$\varsigma_2^{\mathrm{T}}(t) = [\ hx^{\mathrm{T}}(t)\ \ \int_{t-h}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\ ].$$

引理 2[11] 设 $h_1 \leqslant h(t) \leqslant h_2$, 其中 $h(t) : \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$, 对于任意的 $R = R^{\mathrm{T}} > 0$, 如下不等式成立:

$$-\int_{t-h_2}^{t-h_1} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)R\dot{x}(s)\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\delta^{\mathrm{T}}(t)\{(h_2 - h(t))TR^{-1}T^{\mathrm{T}} +$$

$$(h(t) - h_1)YR^{-1}Y^{\mathrm{T}} + [\ Y\ \ -Y+T\ \ -T\ ] +$$

$$[\ Y\ \ -Y+T\ \ -T\ ]^{\mathrm{T}}\}\delta(t).$$

其中

$$\delta^{\mathrm{T}}(t) = [\ x^{\mathrm{T}}(t-h_1)\ \ x^{\mathrm{T}}(t-h(t))\ \ x^{\mathrm{T}}(t-h_2)\ ],$$

$$T = [\ T_1^{\mathrm{T}}\ \ T_2^{\mathrm{T}}\ \ T_3^{\mathrm{T}}\ ]^{\mathrm{T}},$$

$$Y = [\ Y_1^{\mathrm{T}}\ \ Y_2^{\mathrm{T}}\ \ Y_3^{\mathrm{T}}\ ]^{\mathrm{T}}.$$

引理 3[21] 假设 $\gamma_1 \leqslant \gamma(t) \leqslant \gamma_2$, 其中 $\gamma(\cdot) : \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$, 对于任意适当维数的常数矩阵 $\varXi_1$, $\varXi_2$ 和 $\varOmega$, 下面的矩阵不等式成立:

$$\varOmega + (\gamma(t) - \gamma_1)\varXi_1 + (\gamma_2 - \gamma(t))\varXi_2 < 0,$$

当且仅当

$$\varOmega + (\gamma_2 - \gamma_1)\varXi_1 < 0,\ \varOmega + (\gamma_2 - \gamma_1)\varXi_2 < 0.$$

引理 4[22] 给定具有适当维数的矩阵 $Q = Q^{\mathrm{T}}$, H, E, 则有 $Q + HF(t)E + E^{\mathrm{T}}F(t)^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}} < 0$, 对于任意满足 $F(t)^{\mathrm{T}}F(t) \leqslant I$ 的 $F(t)$ 成立的充要条件是存在 $\varepsilon > 0$, 使得

$$Q + \varepsilon^{-1}HH^{\mathrm{T}} + \varepsilon E^{\mathrm{T}}E < 0.$$

2 时滞相关鲁棒稳定性定理

首先考虑系统(1)的标称系统, 即

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - h(t)), \\ x(t) = \varphi(t),\ t \in [-h_M, 0]. \end{cases} \tag{6}$$

设 N 为大于零的正整数, $h_i(i = 1, 2, \cdots, N+1)$ 为标量, 对时滞区间进行如下平均分割:

$$h_m = h_1 < h_2 < \cdots < h_N < h_{N+1} = h_M. \tag{7}$$

其中: $h_m = h_1$, $h_{N+1} = h_M$, 用 h_δ 表示子区间 $[h_i, h_{i+1}]$ 的长度, 即 $h_\delta = h_{i+1} - h_i = (h_M - h_m)/N$, 则在Case I下有以下定理.

定理 1 对于给定常数 h_m 和 h_M, 如果存在正

定对称矩阵 $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ * & P_{22} & P_{23} \\ * & * & P_{33} \end{bmatrix}$, $Q_i, Z_i, R_i (i=2,3)$ 和适当维数的自由矩阵 $T_a, Y_a (a=1,2,3)$, 使得如下 LMIs 成立:

$$\begin{bmatrix} \varPhi & h_\delta \tilde{Y} \\ * & -Z_3 h_\delta \end{bmatrix} < 0,\ i=1,2,\cdots,N, \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} \varPhi & h_\delta \tilde{T} \\ * & -Z_3 h_\delta \end{bmatrix} < 0,\ i=1,2,\cdots,N, \tag{9}$$

则系统 (6) 是渐近稳定的. 其中

$$\varPhi = (\varPhi_{i,j})_{6\times 6},$$
$$\varPhi_{11} = P_{11}A + A^{\mathrm{T}}P_{11} + P_{12} + P_{12}^{\mathrm{T}} + Q_2 + Q_3 - Z_2 - h_i^2 R_2 - h_\delta^2 R_3 + A^{\mathrm{T}}MA,$$
$$\varPhi_{12} = Z_2 - P_{12} + P_{13},$$
$$\varPhi_{13} = P_{11}B + A^{\mathrm{T}}MB,\ \varPhi_{14} = -P_{13},$$
$$\varPhi_{15} = A^{\mathrm{T}}P_{21}^{\mathrm{T}} + P_{22}^{\mathrm{T}} + h_i R_2,$$
$$\varPhi_{16} = A^{\mathrm{T}}P_{31}^{\mathrm{T}} + P_{32}^{\mathrm{T}} + h_\delta R_3,$$
$$\varPhi_{22} = -Q_2 - Z_2 + Y_1 + Y_1^{\mathrm{T}},$$
$$\varPhi_{23} = -Y_1 + T_1 + Y_2^{\mathrm{T}},\ \varPhi_{24} = -T_1 + Y_3^{\mathrm{T}},$$
$$\varPhi_{25} = -P_{22}^{\mathrm{T}} + P_{23}^{\mathrm{T}},\ \varPhi_{26} = -P_{32}^{\mathrm{T}} + P_{33}^{\mathrm{T}},$$
$$\varPhi_{33} = -Y_2 - Y_2^{\mathrm{T}} + T_2 + T_2^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}MB,$$
$$\varPhi_{34} = -T_2 - Y_3^{\mathrm{T}} + T_3^{\mathrm{T}},\ \varPhi_{35} = B^{\mathrm{T}}P_{21}^{\mathrm{T}},$$
$$\varPhi_{36} = B^{\mathrm{T}}P_{31}^{\mathrm{T}},\ \varPhi_{44} = -T_3 - T_3^{\mathrm{T}} - Q_3,$$
$$\varPhi_{45} = -P_{23}^{\mathrm{T}},\ \varPhi_{46} = -P_{33}^{\mathrm{T}},$$
$$\varPhi_{55} = -R_2,\ \varPhi_{56} = 0,\ \varPhi_{66} = -R_3,$$
$$h_\delta = h_{i+1} - h_i = \frac{(h_M - h_m)}{N},$$
$$h_i = h_1 + \frac{(i-1)(h_M - h_m)}{N},$$
$$M = h_i^2 Z_2 + h_\delta Z_3 + \frac{1}{4}h_i^4 R_2 + \frac{1}{4}(h_{i+1}^2 - h_i^2)^2 R_3,$$
$$\tilde{Y} = [\ 0\ \ Y_1^{\mathrm{T}}\ \ Y_2^{\mathrm{T}}\ \ Y_3^{\mathrm{T}}\ \ 0\ \ 0\ ]^{\mathrm{T}},$$
$$\tilde{T} = [\ 0\ \ T_1^{\mathrm{T}}\ \ T_2^{\mathrm{T}}\ \ T_3^{\mathrm{T}}\ \ 0\ \ 0\ ]^{\mathrm{T}}.$$

证明　首先考虑 $h(t)$ 满足 Case I 时的情况, 为了简单起见, 首先证明 $h(t) \in [h_2, h_3]$ 子区间段时, 定理 1 成立, 进而推广到 $h(t) \in [h_i, h_{i+1}] (i = 1, 2, \cdots, N)$ 时, 定理 1 成立.

当 $h(t) \in [h_2, h_3]$ 时, 构造如下的 L-K 泛函:

$$V_2(t) = V_{21}(t) + V_{22}(t) + V_{23}(t). \tag{10}$$

其中

$$V_{21}(t) = \xi_2^{\mathrm{T}}(t) P \xi_2(t),$$
$$V_{22}(t) = \int_{t-h_2}^{t} x^{\mathrm{T}}(s) Q_2 x(s) \mathrm{d}s + \int_{t-h_3}^{t} x^{\mathrm{T}}(s) Q_3 x(s) \mathrm{d}s + h_2 \int_{-h_2}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s) Z_2 \dot{x}(s) \mathrm{d}s\mathrm{d}\theta + \int_{-h_3}^{-h_2}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s) Z_3 \dot{x}(s) \mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,$$
$$V_{23}(t) = \frac{h_2^2}{2}\int_{-h_2}^{0}\int_{\theta}^{0}\int_{t+\lambda}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s) R_2 \dot{x}(s) \mathrm{d}s\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\theta + \frac{h_3^2 - h_2^2}{2}\int_{-h_3}^{-h_2}\int_{\theta}^{0}\int_{t+\lambda}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s) R_3 \dot{x}(s) \mathrm{d}s\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\theta,$$
$$\xi_2^{\mathrm{T}}(t) = [\ x^{\mathrm{T}}(t)\ \ \int_{t-h_2}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\ \ \int_{t-h_3}^{t-h_2} x^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\ ].$$

取 L-K 泛函 $V_2(t)$ 沿系统 (6) 的导数, 有

$$\dot{V}_2(t) = \dot{V}_{21}(t) + \dot{V}_{22}(t) + \dot{V}_{23}(t). \tag{11}$$

其中

$$\dot{V}_{21}(t) = 2\xi_2^{\mathrm{T}}(t) P \dot{\xi}_2(t),$$
$$\dot{V}_{22}(t) = x^{\mathrm{T}}(t)(Q_2 + Q_3)x(t) - x^{\mathrm{T}}(t-h_2) Q_2 x(t-h_2) - x^{\mathrm{T}}(t-h_3) Q_3 x(t-h_3) + \dot{x}^{\mathrm{T}}(t)[h_2^2 Z_2 + (h_3 - h_2) Z_3]\dot{x}(t) - h_2\int_{t-h_2}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s) Z_2 \dot{x}(s)\mathrm{d}s - \int_{t-h_3}^{t-h_2} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s) Z_3 \dot{x}(s)\mathrm{d}s,$$
$$\dot{V}_{23}(t) = \dot{x}^{\mathrm{T}}(t)\Big[\frac{1}{4}h_2^4 R_2 + \frac{1}{4}(h_3^2 - h_2^2)^2 R_3\Big]\dot{x}(t) - \frac{h_2^2}{2}\int_{-h_2}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s) R_2 \dot{x}(t)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta - \frac{h_3^2 - h_2^2}{2}\int_{-h_3}^{-h_2}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s) R_3 \dot{x}(t)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta.$$

由引理 1 可得

$$-h_2\int_{t-h_2}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s) Z_2 \dot{x}(s)\mathrm{d}s \leqslant \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h_2) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} -Z_2 & Z_2 \\ * & -Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h_2) \end{bmatrix}, \tag{12}$$

$$-\frac{h_2^2}{2}\int_{-h_2}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s) R_2 \dot{x}(t)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta \leqslant \begin{bmatrix} h_2 x(t) \\ \int_{t-h_2}^{t} x(s)\mathrm{d}s \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} -R_2 & R_2 \\ R_2 & -R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_2 x(t) \\ \int_{t-h_2}^{t} x(s)\mathrm{d}s \end{bmatrix}, \tag{13}$$

$$\frac{h_3^2 - h_2^2}{2}\int_{-h_3}^{-h_2}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s) R_3 \dot{x}(t)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta \leqslant \begin{bmatrix} (h-3-h_2)x(t) \\ \int_{t-h_3}^{t-h_2} x(s)\mathrm{d}s \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} -R_3 & R_3 \\ R_3 & -R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (h_3-h_2)x(t) \\ \int_{t-h_3}^{t-h_2} x(s)\mathrm{d}s \end{bmatrix}. \tag{14}$$

由引理 2 可得

$$-\int_{t-h_3}^{t-h_2}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)Z_3\dot{x}(s)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\delta^{\mathrm{T}}(t)\{(h_3-h(t))TZ_3^{-1}T^{\mathrm{T}}+(h(t)-h_2)YZ_3^{-1}Y^{\mathrm{T}}+$$
$$[\,Y\ \ -Y+T\ \ -T\,]+t[\,Y\ \ -Y+T\ \ -T\,]^{\mathrm{T}}\}\delta(t).\tag{15}$$

将式(12)～(15)右面代入(11), 则 $\dot{V}_2(t)$ 可以表示为

$$\dot{V}_2(t)\leqslant\zeta^{\mathrm{T}}(t)(\varPhi+(h_3-h(t))TZ_3^{-1}T^{\mathrm{T}}+(h(t)-h_2)YZ_3^{-1}Y^{\mathrm{T}})\zeta(t).\tag{16}$$

其中

$$\zeta^{\mathrm{T}}(t)=\Big[\,x^{\mathrm{T}}(t)\ \ x^{\mathrm{T}}(t-h_2)\ \ x^{\mathrm{T}}(t-h(t))\ \ x^{\mathrm{T}}(t-h_3)\ \rightarrow\ \leftarrow\ \int_{t-h_2}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\ \ \int_{t-h_3}^{t-h_2}x^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\,\Big].$$

如果对于 $h(t)\in[h_2,h_3]$, 有以下条件成立:

$$\varPhi+(h_3-h(t))TZ_3^{-1}T^{\mathrm{T}}+(h(t)-h_2)YZ_3^{-1}Y^{\mathrm{T}}<0,\tag{17}$$

则根据L-K稳定性定理[1], 存在 $\varepsilon>0$, 使得 $\dot{V}(t)<-\varepsilon\,\|x(t)\|^2$, 从而保证系统(6)渐近稳定.

依据引理3, 式(17)等价于

$$\varPhi+(h_3-h_2)TZ_3^{-1}T^{\mathrm{T}}<0,\tag{18}$$
$$\varPhi+(h_3-h_2)YZ_3^{-1}Y^{\mathrm{T}}<0.\tag{19}$$

应用Schur补, 式(18)和(19)分别等价于当 $i=2$ 时的式(8)和(9).

不失一般性, 当 $h(t)\in[h_i,h_{i+1}](i=1,3,\cdots,N)$ 时, 构造如下L-K泛函:

$$V_i(t)=V_{i1}(t)+V_{i2}(t)+V_{i3}(t).\tag{20}$$

其中

$$V_{i1}(t)=\xi_i^{\mathrm{T}}(t)P\xi_i(t),$$
$$V_{i2}(t)=\int_{t-h_i}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)Q_2x(s)\mathrm{d}s+\int_{t-h_{i+1}}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)Q_3x(s)\mathrm{d}s+h_i\int_{-h_i}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)Z_2\dot{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\int_{-h_{i+1}}^{-h_i}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)Z_3\dot{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,$$
$$V_{i3}(t)=\frac{h_i^2}{2}\int_{-h_i}^{0}\int_{\theta}^{0}\int_{t+\lambda}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)R_2\dot{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\theta+\frac{(h_{i+1}^2-h_i^2)}{2}\int_{-h_{i+1}}^{-h_i}\int_{\theta}^{0}\int_{t+\lambda}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)R_3\dot{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\theta,$$
$$\xi_i^{\mathrm{T}}(t)=\Big[\,x^{\mathrm{T}}(t)\ \ \int_{t-h_i}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\ \ \int_{t-h_{i+1}}^{t-h_i}x^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\,\Big].$$

其中: 待定矩阵 $P,Q_2,Q_3,Z_2,Z_3,R_2,R_3$ 如 $V_2(t)$ 中所定义, 定义增广向量

$$\zeta^{\mathrm{T}}(t)=\Big[\,x^{\mathrm{T}}(t)\ \ x^{\mathrm{T}}(t-h_i)\ \ x^{\mathrm{T}}(t-h(t))\ \ x^{\mathrm{T}}(t-h_{i+1})\ \rightarrow\ \leftarrow\ \int_{t-h_i}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\ \ \int_{t-h_{i+1}}^{t-h_i}x^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\,\Big].$$

采用同样方法, 可证明当 $h(t)\in[h_i,h_{i+1}](i=1,3,\cdots,N)$ 时, 有 $\dot{V}(t)<-\varepsilon\,\|x(t)\|^2$, 因此系统是渐近稳定的. □

当时滞 $h(t)$ 为可微函数时, 即满足Case II, 在此条件下, 把定理1中的L-K泛函修改为

$$\tilde{V}_i(t)=V_i(t)+\int_{t-h(t)}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)Q_1x(s)\mathrm{d}s.\tag{21}$$

其中 Q_1 为适当维数的正定矩阵, 仿照定理1的证明过程可得如下定理, 这里证明略.

定理 2 对于给定常数 h_m,h_M 和 μ, 如果存在正定对称矩阵 $P=\begin{bmatrix}P_{11}&P_{12}&P_{13}\\ *&P_{22}&P_{23}\\ *&*&P_{33}\end{bmatrix}$, $Q_1,Q_2,Q_3,Z_i,R_i(i=2,3)$ 和适当维数的自由矩阵 T_a,Y_a, $a=1,2,3$, 使得如下LMIs成立:

$$\begin{bmatrix}\tilde{\varPhi}&h_\delta\tilde{Y}\\ *&-Z_3h_\delta\end{bmatrix}<0,\ i=1,2,\cdots,N,\tag{22}$$
$$\begin{bmatrix}\tilde{\varPhi}&h_\delta\tilde{T}\\ *&-Z_3h_\delta\end{bmatrix}<0,\ i=1,2,\cdots,N,\tag{23}$$

则系统(6)是渐近稳定的. 其中 $\tilde{\varPhi}_{11}=\varPhi_{11}+Q_1$, $\tilde{\varPhi}_{33}=\varPhi_{33}-(1-\mu)Q_1$, $\tilde{\varPhi}$ 中的其他项同定理1中的 $\varPhi$.

注 1 不同于文献[20]的时滞分割方法, 本文针对每一分割区间设计了新的L-K泛函, 其中增广项泛函 $V_{i1}(x(t),t)$ 和三重积分项泛涵 $V_{i3}(x(t),t)$ 的存在, 充分利用了系统的时滞信息, 为降低结论的保守性起到积极的作用.

注 2 在处理泛函沿系统的导数时, 不涉及模型变换和自由权矩阵的界定技术, 只是利用缩放程度更小的不等式(引理1和引理2)在不同的子区间进行估计, 减小了理论分析和计算的复杂性.

下面考虑不确定系统(1)的鲁棒稳定性问题.

定理 3 对于给定常数 h_m, h_M 和 μ, 如果存在标量 $\varepsilon_a>0$, $a=1,2$, 正定对称矩阵 $P=\begin{bmatrix}P_{11}&P_{12}&P_{13}\\ *&P_{22}&P_{23}\\ *&*&P_{33}\end{bmatrix}$, $Q_1,Q_2,Q_3,Z_i,R_i(i=2,3)$ 和适当维数的自由矩阵 $T_b,Y_b,b=1,2,3$, 使得如下LMIs成立:

$$\begin{bmatrix}\hat{\varPhi}_1&\varGamma_1D&\varepsilon_1\varGamma_2^{\mathrm{T}}\\ *&-\varepsilon_1I&0\\ *&*&-\varepsilon_1I\end{bmatrix}<0,\ i=1,2,\cdots,N,\tag{24}$$
$$\begin{bmatrix}\hat{\varPhi}_2&\varGamma_1D&\varepsilon_2\varGamma_2^{\mathrm{T}}\\ *&-\varepsilon_2I&0\\ *&*&-\varepsilon_2I\end{bmatrix}<0,\ i=1,2,\cdots,N,\tag{25}$$

则系统 (1) 是渐近稳定的. 其中

$$\hat{\Phi}_1=\begin{bmatrix}\tilde{\Phi} & \Gamma^{\mathrm{T}}M & h_\delta\tilde{Y}\\ * & -M & 0\\ * & * & -Z_3h_\delta\end{bmatrix},$$

$$\hat{\Phi}_2=\begin{bmatrix}\tilde{\Phi} & \Gamma^{\mathrm{T}}M & h_\delta\tilde{T}\\ * & -M & 0\\ * & * & -Z_3h_\delta\end{bmatrix},$$

$$\Gamma=[\,A\ \ 0\ \ B\ \ 0\ \ 0\ \ 0\,],$$

$$\Gamma_1=[\,P_{11}^{\mathrm{T}}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ P_{12}^{\mathrm{T}}\ \ P_{13}^{\mathrm{T}}\ \ M^{\mathrm{T}}\ \ 0\,]^{\mathrm{T}},$$

$$\Gamma_2=[\,E_a\ \ 0\ \ E_b\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\,].$$

证明　分别用 $A+\Delta A$ 和 $B+\Delta B$ 替代式 (22) 和 (23) 中的 A, B, 应用 Schur 补和引理 4 即可得证. □

3　仿真验证

下面通过 4 个数值实例进行仿真验证, 以说明本文方法的有效性.

例 1　考虑如下标称线性系统:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}.$$

当时滞变化率 $\mu=0.3$ 时, 表 1 给出了在不同的时滞下界 h_m, 系统稳定所允许的最大时滞上界 h_M 的值.

表 1　h_m 给定, $\mu=0.3$ 时系统允许的最大时滞 h_M

方法	$h_m=1$	$h_m=2$	$h_m=3$	$h_m=4$	$h_m=5$
文献 [4]	2.2125	2.4091	3.3342	4.2799	5.2393
文献 [14]	2.2474	2.4798	3.3896	4.3250	5.2773
文献 [20]	2.3564	3.0484	3.8779	4.7481	5.6475
定理 2 ($N=2$)	2.5278	3.0744	3.9136	4.7911	5.6953
文献 [20]	2.7077	3.4408	4.2307	5.0463	5.9319
定理 2 ($N=3$)	2.7368	3.4836	4.2857	5.1286	6.0020

由表 1 可明显看出, 相比文献 [4, 14, 20], 本文方法扩大了系统稳定的最大时滞上界范围, 具有较低的保守性.

例 2　考虑另一标称线性系统

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -0.9\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix}.$$

当时滞变化率已知或未知时, 表 2 和表 3 分别给出在不同的时滞下界 h_m, 系统稳定所允许的最大时滞上界 h_M 的值. 表 2 和表 3 的数值仿真结果表明, 本文方法具有更低的保守性.

表 2　h_m 给定, $\mu=0.5$ 时系统允许的最大时滞 h_M

方法	$h_m=0$	$h_m=1$	$h_m=2$	$h_m=3$	$h_m=4$
文献 [4]	2.0723	2.1276	2.5048	3.2591	4.0744
文献 [17]	2.0801	2.1513	2.7113	3.3839	4.1136
文献 [12]	2.1484	2.3239	2.8630	3.5729	4.3343
文献 [19] ($N=2$)	2.2022	2.3912	2.9578	3.6384	4.3736
定理 2 ($N=2$)	2.3631	2.4455	2.9313	3.5088	4.1510
定理 2 ($N=5$)	2.7489	3.0607	3.4179	3.8167	4.2531
定理 2 ($N=10$)	3.2852	3.5172	3.7685	4.0386	4.3284
定理 2 ($N=20$)	3.7340	3.8859	4.0448	4.2117	4.3868

表 3　h_m 给定, μ 取任何值时系统允许的最大时滞 h_M

方法	$h_m=0$	$h_m=1$	$h_m=2$	$h_m=3$	$h_m=4$
文献 [4]	1.5296	1.8737	2.5049	3.2591	4.0744
文献 [17]	1.6654	2.1251	2.7113	3.3839	4.1136
文献 [12]	1.7157	2.2302	2.8630	3.5729	4.3343
文献 [19] ($N=2$)	1.8828	2.3585	2.9578	3.6384	4.3736
定理 2 ($N=2$)	2.0851	2.4455	2.9313	3.5088	4.1510
定理 2 ($N=5$)	2.7489	3.0607	3.4179	3.8167	4.2531
定理 2 ($N=10$)	3.2852	3.5172	3.7685	4.0386	4.3284
定理 2 ($N=20$)	3.7340	3.8859	4.0448	4.2117	4.3868

例 3　考虑如下不确定系统, 系统参数如下:

$$A=\begin{bmatrix}-2+\delta_1 & 0\\ 0 & -1+\delta_2\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}-1+\delta_3 & 0\\ -1 & -1+\delta_4\end{bmatrix}.$$

其中: $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ 和 δ_4 为不确定参数, 且满足 $|\delta_1|\leqslant 1.6$, $|\delta_2|\leqslant 0.05$, $|\delta_3|\leqslant 0.1$, $|\delta_4|\leqslant 0.3$.

表 4 给出了当时滞变化率未知时系统稳定所允许的最大时滞上界. 由表 4 可得, 相比文献 [12-13,19], 本文所提出的鲁棒稳定性定理具有更低的保守性.

例 4　考虑另一个不确定系, 系统参数如下:

$$A=\begin{bmatrix}-0.5 & -2\\ 1 & -1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-0.5 & -1\\ 0 & 0.6\end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ E_a=E_b=\begin{bmatrix}0.2 & 0\\ 0 & 0.2\end{bmatrix}.$$

当时滞下界 $h_m=0$ 时, 表 5 列出了不同的时滞变化率下系统稳定所允许的最大时滞上界. 由表 5 可知, 相比文献 [12,17,19], 本文所提出方法具有明显的优势.

表 4　μ 未知时, 不同的时滞下界 h_m 所允许的最大时滞 h_M

方法	h_m					
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
文献 [13]	0.9442	0.9757	1.0208	1.0795	1.1500	1.2308
文献 [12]	1.0571	1.0953	1.1385	1.1865	1.2392	1.2966
文献 [19] ($N=2$)	1.1030	1.1337	1.1703	1.2123	1.2594	1.3111
定理 3 ($N=2$)	1.3213	1.3369	1.3571	1.3817	1.4102	1.4420
定理 3 ($N=3$)	1.3634	1.3809	1.4003	1.4216	1.4445	1.4688

表 5 当 $h_m = 0$ 时, 对于不同的 μ 系统允许的最大时滞 h_M

方法	μ		
	0.5	0.9	Any μ
文献 [17]	0.4760	0.4760	0.4760
文献 [12]	0.4783	0.4783	0.4783
文献 [19] ($N = 2$)	0.5151	0.5151	0.5151
定理 2 ($N = 2$)	0.7183	0.7183	0.7183
定理 2 ($N = 3$)	0.7711	0.7711	0.7711

4 结 论

本文基于一种新的时滞分割方法, 研究了一类区间变时滞不确定系统鲁棒稳定性问题. 不同于以往的时滞分割方法, 在构造L-K泛函时, 针对不同的分割区间构造包含三重积分项和增广项的Lyapunov泛函, 利用保守性较小的不等式分别在不同的子区间处理泛函导数产生的交叉项, 该方法避免了当时滞分割数目增大时判据形式复杂、计算耗时长这一不足, 有利于理论分析和计算. 最后基于线性矩阵不等式技术建立了新的鲁棒稳定性判据, 数值仿真算例验证了所提出方法的有效性.

参考文献(References)

[1] Gu K, Kharitonov V L, Chen J. Stability of time-delay systems[M]. Basel: Birkhauser, 2003: 1-17.

[2] Yue D, Han Q L, Peng C. State feedback controller design of networked control systems[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems-II: Express Briefs, 2004, 51(11): 640-644.

[3] He Y, Wu M, She J H, et a1. Parameter-dependent Lyapunov functional for stability of time-delay systems with polytypic-type uncertainties[J]. IEEE Trans on Automatic Contro1, 2004, 49(5): 828-832.

[4] He Y, Wang Q G, Lin C, et al. Delay-range-dependent stability for systems with time-varying delay[J]. Automatica, 2007, 43(2): 371-376.

[5] Gu K. An integral inequality in the stability problem of time-delay systems[C]. The 39th IEEE Conf on Decision and Control. Sydney, 2000: 2805-2810.

[6] Han Q L. Absolute stability of time-delay systems with sector-bounded nonlinearity[J]. Automatica, 2005, 41(12): 2171-2176.

[7] Zhang X M, Wu M, Han Q L, et al. A new integral inequality to delay-dependent robust control[J]. Asian J of Control, 2006, 8(2): 153-160.

[8] Zhang X M, Han Q L. New Lyapunov-Krasovskii functionals for global asymptotic stability of delayed neural networks[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2009, 20(3): 533-539.

[9] Sun J, Liu G P, Chen J, et al. Improved delay-range-dependent stability criteria for linear systems with time-varying delays[J]. Automatica, 2010, 46(2): 466-470.

[10] Kwon O M, Park J H, Lee S M. An improved delay-dependent criterion for asymptotic stability of uncertain dynamic systems with time-varying delays[J]. J of Optimization Theory and Applications, 2010, 145(2): 343-353.

[11] Ramakrishnan K, Ray G. Robust stability criteria for uncertain neutral systems with interval time-varying delay[J]. J of Optimization Theory and Applications, 2011, 149(2): 366-384.

[12] Ramakrishnan K, Ray G. Delay-dependent robust stability criteria for linear uncertain systems with interval time varying delay[C]. IEEE Region 10 Conf on TENCON 2009. Singapore: IEEE, 2009: 1-6.

[13] Jiang X F, Han Q L. New stability criteria for linear systems with interval time varying delay[J]. Automatica, 2008, 44(10): 2680-2685.

[14] Shao H Y. New delay-dependent stability criteria for systems with interval delay[J]. Automatica, 2009, 45(3): 744-749.

[15] Xu S Y, Lam J. On equivalence and efficiency of certain stability criteria for time-delay systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2007, 52(1): 95-101.

[16] Han Q L. A discrete delay decomposition approach to stability of linear retarded and neutral systems[J]. Automatica, 2009, 45(2): 517-524.

[17] Peng C, Tian Y. Improved delay-dependent robust stability criteria for uncertain systems with interval time-varying delay[J]. IET Control Theory and Application, 2008, 2(9): 752-761.

[18] Balasubramaniam P, Nagamani G. A delay decomposition approach to delay-dependent passivity analysis for interval neural networks with time-varying delay[J]. Neurocomputing, 2011, 74(10): 1646-1653.

[19] Ramakrishnan K, Ray G. Robust stability criteria for uncertain linear systems with interval time-varying delay[J]. J of Control Theory and Applications, 2011, 9(4): 559-566.

[20] Wang C, Shen Y. Delay partitioning approach to robust stability analysis for uncertain stochastic systems with interval time-varying delay[J]. IET Control Theory and Applications, 2012, 6(7): 875-883.

[21] Yue D, Tian D, Zhang Y. A piecewise analysis method to stability analysis of continuous/discrete systems with time-varying delay[J]. Int J of Robust Nonlinear Control, 2009, 19(13): 1493-1518.

[22] Petersen I R, Hollot C V. A Riccati align approach to the stabilization of uncertain linear systems[J]. Automatica, 1986, 22(4): 397-411.

(责任编辑：孙艺红)