

基于局域网络的加权财富演化模型

路 兰, 高齐圣

(青岛大学 经济学院, 山东 青岛 266071)

摘 要: 基于复杂网络理论, 考虑到局部连接、成本以及收益分配, 构建一个基于局域网络的加权财富演化模型. 首先应用率方程法推导出节点度分布和财富分布的动力学方程, 理论分析和数值仿真表明, 网络模型的节点度与财富值均符合幂律分布; 然后, 通过分析聚集系数、度相关性、财富分布以及财富熵等统计量, 发现该网络是一个负向匹配网络, 网络中的财富分布是不均衡的, 个体间财富异质性与结构参数 r 以及 M 相关; 最后结合实证进行了说明和验证.

关键词: 复杂网络; 局域网络; 幂律分布; 财富熵; 异质性

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Weighted wealth evolving model based on local-world network

LU Lan, GAO Qi-sheng

(School of Economics, Qingdao University, Qingdao 266071, China. Correspondent: LU Lan, E-mail: gyblan718@163.com)

Abstract: Based on the complex network theory, a local-world evolving weighted wealth network model is constructed, which considers local connection, cost and income distribution. By applying the rate equations, the kinetic equations of degree and wealth are obtained. Then, through the analysis of cluster coefficient, degree correlation, wealth distribution and wealth entropy, it is found that the wealth model is a negative network. The network displays wealth imbalance, and the wealth heterogeneity possesses a positive association with the structure parameter r as well as a negative association with M . Finally, an example is given to illustrate and validate the proposed conclusion.

Key words: complex network; local-world network; power-law distribution; wealth entropy; heterogeneity

0 引 言

现实社会中许多自组织现象均是由个体间不断地相互作用而形成的. 当社会群体足够大时, 集群行为将会独立于个体间相互作用的细节以及个体的特性. 因此, 应用统计物理可以很好地解释这些社会现象. 物理学家们进行了各种统计数据分析和统计模型的研究, 例如金融时间序列的统计力学分析^[1]、城市人口分布^[2]、网络分析^[3-4]、编队的一致性研究^[5-7]以及社会经济的财富动态演化^[8-10]等.

社会科学里的各种结论中, 由 Pareto 发现的财富或收入的分布形式是最古老、最重要、具有普适性的规律. 即对于较大的财富值 m , 服从 $p(m) \sim m^{-(1+\gamma)}$, 其中 γ 称为帕累托指数, $1 \leq \gamma \leq 3$. 迄今为止, 已有大量关于经济模型中财富分布的研究. Bouchaud 和 Mezard^[11]提出了一个简单的平均场理论模型

(Bouchaud-Mezard 模型), 用于解释财富分布的幂律尾现象. 随后, Garlaschelli 等^[12]在不同的连接网络结构的基础上考虑了 Bouchaud-Mezard 模型, 从而分析了财富分布由对数正态分布向幂律尾分布的不平滑过度. 这种过度在现实的社会财富分布中同样存在. Iglesias 等^[13]研究了一类总财富不变, 且网络拓扑结构与个体财富的动力性无关的财富模型. Kim 等^[14]先后提出了两类财富诱导出的财富网络模型, 网络中节点生产和积累财富, 通过率方程法得出了度分布和财富分布. 然而, 随着复杂网络研究的兴起, 经济学家和经济物理学家已逐渐认识到在经济系统中存在一个相互作用机制并形成网络结构, 这种结构影响并支配着经济系统的运行, 尤其是社会经济关系网络直接影响到个体所拥有的财富. 因此通过社会经济关系结构来认识我国收入和财富分配的不平等问题是十分必

收稿日期: 2013-02-20; 修回日期: 2013-05-22.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61104075); 教育部人文社科研究规划基金项目(11YJA630019).

作者简介: 路兰(1982-), 女, 博士生, 从事经济系统复杂性的研究; 高齐圣(1966-), 男, 教授, 博士生导师, 从事经济系统复杂性等研究.

要和现实的.

收益是个体和机构进行经济活动的主要目标,也是人类社会关系最有利的动机之一. 当一个企业存在经济亏损时,企业所有者不能弥补所有生产成本. 除非条件改变,否则企业所有者最终将关闭企业,并退出该行业. 因而,在构造经济网络模型时,收益和成本自然是不可或缺的因素. 为了改进现有模型的不足,本文提出一类更为现实的加权网络模型. 在该模型中将企业视为节点,企业间的合作关系视为边,每个节点为了维持连边需要付出一定的连接成本,将连接成本作为网络的边权;每个节点拥有一定创造财富的能力,即节点获得新的连接后创造出收益;同时该节点也会将其部分收益作为报酬回馈给它的供应者. 模型中,不仅允许局部择优连接,而且考虑了成本、收益以及收益分配等问题. 运用率方程法推导出动力学方程,以刻画财富积累过程与网络结构的相互作用关系. 通过求解这些方程,得出模型度分布以及财富分布的数值表达式. 通过数值仿真,给出了度分布、聚集系数、度相关性等网络结构的性质,同时从财富分布以及财富熵等方面分析了我国财富分布的不均衡性. 最后,通过实证分析验证了以上理论分析结果.

1 加权局域网络财富模型

1.1 理论模型

模型中,财富是个体不断加入网络的动因,且网络中的个体利用建立的连边来生产和累积财富. 网络中的个体既可以作为供应商,给其他个体提供产品或服务从而获得财富,也可以作为零售商,通过利用从别人得到的产品和服务来生产财富.

在每一个时间步 t , 进行如下操作.

1) 初始网络. 在 $t = 0$ 时,网络中有 m 个孤立的节点,各节点对应的生产财富的能力水平记为 A_i , 其中 $i = -m + 1, -m + 2, \dots, 0$. 设初始网络中各节点的财富值均为 0.

2) 网络增长. 在每一个时间步 t 向网络中增加一个新节点,同时增加 m 条新边. 首先,随机地从网络已有的节点中选取 M 个节点 ($M \geq m$) 作为新节点 t 的局域网络,记为 σ_t . 每一条新边均从定义的局域网络中进行选择,且将新节点作为其目标节点的供应者. 于是连接概率定义为

$$\Pi(t \rightarrow i) = \frac{M}{m+t} \frac{w(i)}{\sum_{j=1}^N w(j)}. \quad (1)$$

3) 财富演化过程. 每个节点加入网络后开始生产财富. 产生新链接时个体所获得的收益是不同的,因而各节点生产财富的能力也是不同的. 设节点 i 的收

益 $I_i(t)$ 服从参数为 A_i 和 $k_i(t)$ 的二项分布,其中 A_i 为节点 i 的能力, $k_i(t)$ 为 t 时刻节点 i 的连接度. 为了便于计算,假设各节点生产财富的能力均服从某一分布,且其值在加入网络时给定,并不再变化,则有 $E(I_i(t)) = A_i k_i(t)$. 该节点为获得连接所投入的成本为 c_{it} ,则节点 i 的收益函数为 $y(i) = E(I_i(t)) - c_{it}$, 设 $c_{it} = c_{ti}$. 同时,当节点生产财富时,将其比例 γ 的财富按照节点度的比例分配给供应者作为报酬. 即: 设新节点 t 根据财富值选择了节点 i 进行连接,则节点 i 将其在 t 时比例为 γ 的财富值按照节点度的比例赋予其供应者 l (即节点 i 的邻居节点) 作为报酬,其比例值为

$$\delta_l = \frac{k_l(t)}{\sum_{j \in b(i)} k_j(t)}. \quad (2)$$

其中: $b(i)$ 为节点 i 的邻居节点集, $\sum_{j \in b(i)} k_j(t)$ 为节点 i 的邻居节点的连接度总和. 即每个时间步 t , 节点 i 创造财富量由个体创造财富的能力以及连边的数目决定. 收益函数为 $y(i) = E(I_i(t)) - c_{it}$. 若 $y(i) > 0$, 则该个体有利润; 若 $y(i) < 0$, 则该个体是亏损的. 根据利润最大化的原则,节点 i 会根据自己利润的多少来调节 γ 值,适当地增加或减少其对供应商的报酬.

1.2 理论推导

由于 t 时刻网络中财富的增量等于所有节点财富增量的总和,可将期望财富量记为 $w(t) = E[W(t)]$, 满足如下方程:

$$w(t) - w(t-1) = \sum_{i=1}^t \sum_{j \in b(i)} (E[A_j] - c_{ij}), \quad t = 1, 2, \dots \quad (3)$$

由于在 $t = 0$ 时刻网络中财富为 0, 即 $w(0) = 0$, 由式 (3) 知, 在时刻 $t = 1, 2, \dots$ 时, 网络中期望财富量可表示为

$$\begin{aligned} w(t) &= \sum_{i=1}^t \sum_{j \in b(i)} (E[A_j] - c_{ij}) + w(t-1) = \\ &w(t-2) + \sum_{i=1}^{t-1} \sum_{j \in b(i)} (E[A_j] - c_{ij}) + \\ &\sum_{i=1}^t \sum_{j \in b(i)} (E[A_j] - c_{ij}) = \\ &w(0) + \sum_{i=1}^t \sum_{j \in b(i)} (E[A_j] - c_{ij}) + \\ &\sum_{i=1}^{t-1} \sum_{j \in b(i)} (E[A_j] - c_{ij}) + \dots + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^1 \sum_{j \in b(i)} (E[A_j] - c_{ij}) = \\ & \sum_{i=1}^t (t+1-i) \sum_{j \in b(i)} (E[A_j] - c_{ij}) = \\ & \frac{t(t+1)}{2} \sum_{j \in b(i)} (E[A_j] - c_{ij}). \end{aligned}$$

为了简化计算, 假设连接成本 $c_{it} = c$ 为常数, 且 $E(A_j) > c$. 注意到, 当 i 趋于无穷时, $\sum_{j \in b(i)} E[A_j]$ 收敛, 从而可以得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{w(t)}{t^2} = \eta_1,$$

其中

$$\eta_1 = \lim \frac{1}{2} \sum_{j \in b(i)} E[A_j].$$

由模型演化过程可知, 个体获得财富的途径有2个: 通过自身创造或者从其余个体分得. 而节点 i 在时间步 i 仅能从其目标节点 $b(i)$ 按照度优先概率 $\delta_i = k_i(i) / \sum_{j \in b(i)} k_j(i)$ 分得部分财富, 从而有

$$W_i(i) = r \sum_{j \in b(i)} \left[I_j(i) \frac{k_i(i)}{\sum_{j' \in b(j)} k_{j'}(i)} \right].$$

进一步, 当 $t = i + 1, i + 2, \dots$ 时, 有

$$\begin{aligned} W_i(t) - W_i(t-1) = \\ (1-r)I_i(t) + r \sum_{j \in b(i)} \left[I_j(t) \frac{k_i(t)}{\sum_{j' \in b(j)} k_{j'}(t)} \right]. \end{aligned}$$

假设 $k_i(t, a)$ 和 $w_i(t, a)$ 为连续变化过程, 该概率可分别解释为变化率, 则可得到如下动力学方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_i(t, a)}{\partial t} = \\ (1-r)a(k_i(t, a) - m) + \\ rk_i(t, a) \sum_{j \in b(i)} E \left[\frac{I_j(t)}{\sum_{j' \in b(j)} k_{j'}(t)} \right] = \\ (1-r)a(k_i(t, a) - m) + \\ rk_i(t, a) \sum_{j \in b(i)} \frac{E[I_j(t)]}{\sum_{j' \in b(j)} k_{j'}(t)}. \end{aligned}$$

由于 $b(j)$ 表示节点 j 的邻居的集合, 有

$$\sum_{j' \in b(j)} k_{j'}(t) \approx k_j(t) \langle k \rangle.$$

其中: $\langle k \rangle$ 为网络的平均度, $k_j(t)$ 为节点 j 在时刻 t 的连接度值. 由于 $\langle k \rangle = 2E/N$, 其中 E 为网络中总边数, N 为节点总数, 则有

$$\langle k \rangle = \frac{2E}{N} = \frac{2mt}{m+t-1} = \frac{2m}{1 + \frac{m-1}{t}}.$$

当 t 足够大时, $\langle k \rangle \approx 2m$, 则有

$$\sum_{j' \in b(j)} k_{j'}(t) \approx 2mk_j(t).$$

由此可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_i(t, a)}{\partial t} = (1-r)a(k_i(t, a) - m) + \\ rk_i(t, a) \sum_{j \in b(i)} \frac{E[A_j]}{2m}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial k_i(t, a)}{\partial t} = m \prod_{\text{Local}} w_i(t, a),$$

其中

$$\prod_{\text{Local}} w_i(t, a) = \frac{M}{m+t-1} \frac{w_i(t-1, a)}{\sum_{j \in \sigma_i} w_j(t-1)}.$$

另有

$$\sum_{j \in \sigma_t} w_j(t-1) = \langle w(t-1) \rangle M,$$

而 $\langle w(t-1) \rangle = \frac{w(t-1)}{m+t-1}$, 因 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{w(t)}{t^2} = \eta_1$, 故可设 $w(t-1) \approx \eta_1(t-1)^2$. 从而可得

$$\sum_{j \in \sigma_t} w_j(t-1) = \langle w(t-1) \rangle M = M \frac{\eta_1(t-1)^2}{m+t-1},$$

所以有

$$\begin{aligned} \prod_{\text{local}} w_i(t, a) = \\ \frac{M}{m+t-1} \frac{w_i(t-1, a)}{M \frac{\eta_1(t-1)^2}{m+t-1}} = \frac{w_i(t-1, a)}{\eta_1(t-1)^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial k_i(t, a)}{\partial t} = m \frac{w_i(t-1, a)}{\eta_1(t-1)^2}.$$

经简化后的动力学方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_i(t, a)}{\partial t} = (1-r)a(k_i(t, a) - m) + \\ rk_i(t, a) \sum_{j \in b(i)} \frac{E[A_j]}{2m}, \\ \frac{\partial k_i(t, a)}{\partial t} = m \frac{w_i(t-1, a)}{\eta_1(t-1)^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

初始条件为

$$\begin{aligned} k_i(i) = m, \\ w_i(i, a) = rm \sum_{j \in b(i)} \frac{E[A_j]}{2m} = \frac{r}{2} \sum_{j \in b(i)} E[A_j]. \end{aligned} \quad (5)$$

由上述式子可知

$$\begin{aligned} w_i'(t) = \\ (1-r)a(k_i(t) - m) + rk_i(t) \sum_{j \in b(i)} \frac{E[A_j]}{2m} \Rightarrow \\ w_i''(t) = (1-r)ak_i'(t) + rk_i'(t) \sum_{j \in b(i)} \frac{E[A_j]}{2m}. \end{aligned} \quad (6)$$

将 $k_i'(t) = m \frac{w_i(t-1, a)}{\eta_1(t-1)^2}$ 代入式(6), 可知

$$\begin{aligned}
w_i''(t) = & \frac{r\beta}{2i} - \left(1 - \frac{c_0}{m}\right)\eta_1(\alpha_1 - 1) \left(\frac{t}{i}\right)^{\alpha_2 - 1} + c_0, \quad (8) \\
(1-r)am \frac{w_i(t-1, a)}{\eta_1(t-1)^2} + & \\
rm \frac{w_i(t-1, a)}{\eta_1(t-1)^2} \sum_{j \in b(i)} \frac{E[A_j]}{2m} = & \\
\frac{w_i(t-1, a)}{\eta_1(t-1)^2} \left[am(1-r) + mr \sum_{j \in b(i)} \frac{E[A_j]}{2m} \right] = & \\
\frac{w_i(t-1, a)}{\eta_1(t-1)^2} \left[am(1-r) + r \sum_{j \in b(i)} \frac{E[A_j]}{2} \right], & \\
w_i(t) = & \\
\frac{r\beta(\alpha_1 - 1)}{2} - \left(1 - \frac{c_0}{m}\right)\eta_1(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)i \left(\frac{t}{i}\right)^{\alpha_1} - & \\
\frac{r\beta(\alpha_2 - 1)}{2} - \left(1 - \frac{c_0}{m}\right)\eta_1(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)i \left(\frac{t}{i}\right)^{\alpha_2}. & \quad (9)
\end{aligned}$$

从而有

$$w_i''(t) = (A + B) \frac{w_i(t)}{\eta_1 t^2}. \quad (7)$$

该微分方程的通解为

$$w_i(t) = c_1 t^{\alpha_1} + c_2 t^{\alpha_2},$$

则

$$\begin{aligned}
k_i'(t) = m \frac{w_i(t, a)}{\eta_1 t^2} = & \\
m \frac{c_1 t^{\alpha_1} + c_2 t^{\alpha_2}}{\eta_1 t^2} = & \\
\frac{m}{\eta_1} (c_1 t^{\alpha_1 - 2} + c_2 t^{\alpha_2 - 2}). &
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\alpha_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4(A + B)}}{2}, & \\
\alpha_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4(A + B)}}{2}. &
\end{aligned}$$

令 $A = am(1-r)$, $B = r\beta/2$, 其中 $\beta = \sum_{j \in b(i)} E[A_j]$,

且 α_1 和 α_2 为方程 $y^2 - y - (A + B) = 0$ 的两个根. 由 $k_i'(t) = \frac{m}{\eta_1} (c_1 t^{\alpha_1 - 2} + c_2 t^{\alpha_2 - 2})$ 可得

$$k_i(t) = \frac{m}{\eta_1} \left(\frac{c_1}{\alpha_1 - 1} t^{\alpha_1 - 1} + \frac{c_2}{\alpha_2 - 1} t^{\alpha_2 - 1} \right) + c_0,$$

其中 c_0 是常数. 根据初始条件

$$k_i(i) = m, \quad w_i(i, a) = \frac{r\beta}{2},$$

可以求得

$$\begin{aligned}
c_1 = \frac{\frac{r\beta(\alpha_1 - 1)}{2} - \left(1 - \frac{c_0}{m}\right)\eta_1(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)i}{(\alpha_1 - \alpha_2)i^{\alpha_1}}, & \\
c_2 = \frac{\left(1 - \frac{c_0}{m}\right)\eta_1(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)i - \frac{r\beta(\alpha_2 - 1)}{2}}{(\alpha_1 - \alpha_2)i^{\alpha_2}}. &
\end{aligned}$$

因此可得 $k_i(t)$ 和 $w_i(t)$ 的显示表达式为

$$\begin{aligned}
k_i(t) = & \\
\frac{m}{\eta_1} \left[\frac{r\beta}{2i} - \left(1 - \frac{c_0}{m}\right)\eta_1(\alpha_2 - 1) \left(\frac{t}{i}\right)^{\alpha_1 - 1} - \right. &
\end{aligned}$$

1.3 度分布与财富分布

由上面的理论分析可以得到 $k_i(t)$ 和 $w_i(t)$ 的相关表达式. 为了更好地理解模型的结构以及我国财富分布的规律, 下面将分析该网络中的度分布和财富分布形式. 首先分析网络的度分布形式.

当 $t \rightarrow \infty$ 时, 由于 $\alpha_2 < 0$, 方程 $k_i(t)$ 中的 $(t/i)^{\alpha_2 - 1}$ 趋于 0, 令 $(t/i)^{\alpha_1 - 1}$ 的系数为 λ_1 , 则有

$$k_i(t) = \lambda_1 (t/i)^{\alpha_1 - 1} + c_0.$$

为简便起见, 假设所有节点的能力 $A_i \equiv a$, 其中 $i = -m + 1, -m + 2, \dots$, 则可得

$$\begin{aligned}
p\{k_i(t) > k\} = p\left\{ \lambda_1 \left(\frac{t}{i}\right)^{\alpha_1 - 1} + c_0 > k \right\} = & \\
p\left\{ \frac{i}{t} < \left(\frac{k - c_0}{\lambda_1}\right)^{-\frac{1}{\alpha_1 - 1}} \right\}. &
\end{aligned}$$

由于每一个时间步都有且仅有一个节点加入到原网络中, 节点 i 服从均匀分布, 有

$$f_k(k) \propto \left(\frac{k - c_0}{\lambda_1}\right)^{-(1 + \frac{1}{\alpha_1 - 1})}. \quad (10)$$

由式(10)可知, 网络的度分布服从指数为 $\frac{1}{\alpha_1 - 1}$ 的幂律分布.

同理, 分析网络中的财富分布可知, 当 $k \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$ 时, 令 $(t/i)^{\alpha_1}$ 项的系数为 λ_1' , 则有

$$w_i(t) = \lambda_1' (t/i)^{\alpha_1},$$

$$p(w_i(t) > k) =$$

$$1 - F_w(k) = p(\lambda_1' (t/i)^{\alpha_1} > k) =$$

$$p\left(i > \left(\frac{k}{\lambda_1'}\right)^{-\frac{1}{\alpha_1}} t + 1\right) =$$

$$1 - \left(\frac{k}{\lambda_1'}\right)^{-\frac{1}{\alpha_1}} - \frac{1}{t},$$

因此

$$f_w(k) = \frac{dF_w(k)}{dk} \propto \left(\frac{k}{\lambda_1'}\right)^{-(1 + \frac{1}{\alpha_1})}. \quad (11)$$

由式(11)可知, 网络的财富分布服从指数为 $1/\alpha_1$ 的幂律分布.

注意到, 当 i 较小时, $(t/i)^{\alpha_2}$ 收敛于 0 的速度很慢. 当 k 趋近于 1 时, 有 $k \geq 1$. k 趋近于 1, 意味着 i 接

近于 t , 即 $i - t \approx 0$. 此时有

$$F_w(k) = p\{w_i(t) \leq k\} = p\left\{w_i(t) + \frac{dw_i(t)}{dt}\Big|_{i=t} (i-t) \leq k\right\} = p\left\{\frac{r\beta(i-t)}{2t} + \left(1 - \frac{c_0}{m}\right)\eta_1(\alpha_1 - 1) \times (\alpha_2 - 1)(i-t) \leq k\right\} = p\left\{i \leq \frac{k}{\frac{r\beta}{2t} + \left(1 - \frac{c_0}{m}\right)\eta_1(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)} + t\right\},$$

所以有

$$F_w(k) = \frac{k}{\frac{r\beta}{2} + \left(1 - \frac{c_0}{m}\right)\eta_1(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)t} + 1,$$

因此可得

$$f_w(k) = \frac{dF_w(k)}{dk} \propto \frac{1}{k_0 + k_1 t}. \quad (12)$$

类似于节点的连接度分布, $f_w(k)$ 在 $t \rightarrow i$ 时, 节点的连接度分布服从指数为 0 的幂律分布. 由此可知网络中的财富分布也是服从双幂律分布的, 分布指数分别为 0 和 $1/\alpha_1$.

2 仿真分析

2.1 结构分析

2.1.1 度与度分布

度是节点属性中简单而又重要的概念, 网络中的所有节点度的平均值即为平均顶点度 $\langle k \rangle$. 文中构建的财富网络模型是一个无向网络, 节点的度表示与该节点相连接的节点数. 直观上看, 一个节点的度越大, 意味着该节点在某种意义上越重要. 在本文中, 节点的度越大说明该个体越活跃, 即该个体的经济活动很频繁. 图 1 中给出了该网络的累计节点度分布. 从图 1 中可以看出, 在双对数坐标下, 当度值较大时, 累计节点度分布基本符合幂律分布. 通过回归分析可知, 可用 $y = 7.08227 - 1.26012x$ 近似模拟, $r^2 \approx 0.9513$, 数据模拟的结果与理论分析是一致的.

注 1 在进行仿真时, 参数设置为: $t = 1000, r = 0.6, m = 3, M = 20$.

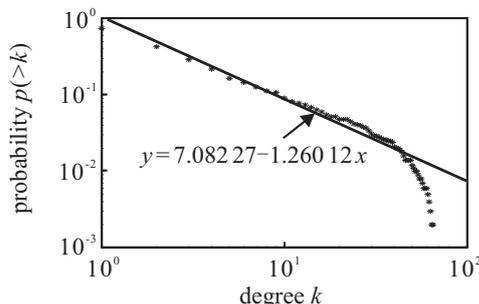


图 1 累积节点度分布

2.1.2 网络结构的聚集系数

聚集系数是网络的另一个重要参数, 用于衡量网络的集团化程度. 节点的聚集系数越大, 其邻近之间关联越紧密. 同时, 聚集性与网络的功能紧密相关.

在 t 时刻, 节点 i 的局部聚集系数 $c_i(t)$ 可定义为节点 i 邻居节点间的实际连边数与其最大可能连边数的比值. 设 $|E_i(t)|$ 表示节点 i 的邻居节点之间实际存在的连边数. 从而, 局部聚集系数 $c_i(t)$ 可定义为

$$c_i(t) = \frac{|E_i(t)|}{k_i(t)(k_i(t) - 1)/2}. \quad (13)$$

由 $c_i(t)$ 可直接得到聚集谱 $c(k, N)$, 表示度为 k 的所有节点聚集系数的平均值, 是 k 和最大时刻 $t = N$ 的函数.

图 2 给出了关于财富模型的聚集谱的变化规律. 从中可以发现, 网络中的聚集谱的大小随节点度的增大而逐渐减少, 即度数小的节点具有较高的聚集系数, 度数较大的节点具有较低的聚集系数. 这意味着财富网络并不是完全随机的, 而是在某种程度上具有类似于社会关系网络中“物以类聚, 人以群分”的特性.

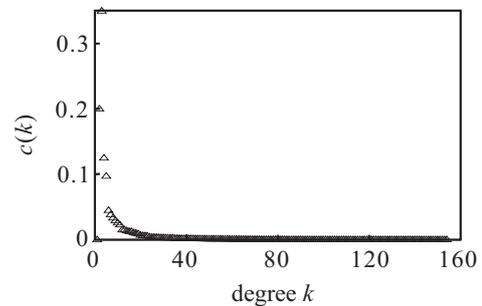


图 2 聚集系数

2.1.3 度相关性

度分布 $f_k(k)$ 是网络的首要基本拓扑特性. 对于无相关性的网络, 度分布完全决定了网络的统计性质. 然而, 很大一部分网络在某种意义上是相关的, 即度为 k 的节点与度为 k' 的节点建立连接, 与度 k 有关. 在这些情形下, 引进条件概率 $p(k|k')$ 是非常必要的, 定义 $p(k|k')$ 是度为 k 的节点选择度为 k' 的节点建立连接的概率. 由于对该条件概率的直接求解很困难, 可将其转化为求某点 i 的最近邻节点的平均度, 即

$$k_{NN}(i) = \frac{1}{k_i} \sum_{j \in N_i} k_j, \quad (14)$$

其中 N_i 为节点 i 的最近邻域. 根据定义, 可计算度为 k 的节点的最近邻域节点的平均度, 记为 $k_{NN}(k)$, 从而得出的表达式能隐式体现出对 k 的依赖性.

图 3 中的两条曲线分别代表度相关性值 $k_{NN}(k)$ 以及其一阶导数的变化趋势. 由图 3 可知, $k_{NN}(k)$ 值随着度值的增大而逐渐减少, 呈递减趋势(此点从

图3中的一阶导数曲线可以得到证明),因此图3中的曲线是减函数,表明该财富网络为负向匹配网络,即度较小的节点易与度较大的节点相连接.这与图2所示的聚集系数的变化趋势是一致的,即度数较小的节点具有较高的聚集系数,其邻居的度值也将较大.

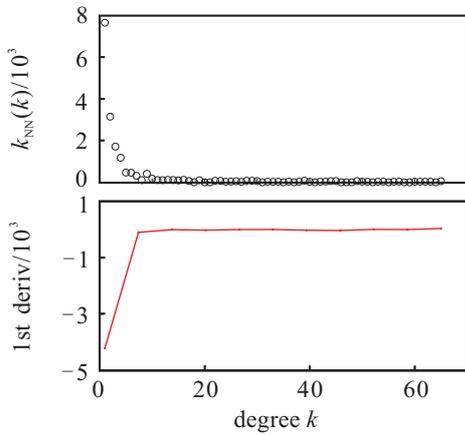


图3 度相关性

2.2 财富分析

2.2.1 财富分布

财富分布与节点连接度分布类似,刻画的是网络中节点的财富分布情况.由理论推导式(3)和(4)可知,该财富网络中的财富分布符合双幂律分布,即较少个体的财富值服从指数为 $1/\alpha_1$ 的幂律分布;而大部分的个体财富值则服从指数为0的幂律分布.通过计算机模拟得到图4,图4中的曲线并不服从统一的分布规律.通过回归分析可知,当 $w > 50000$ 时,只有少部分的个体财富值可近似用曲线 $y = (1.123e - 12) - 1.6879x$ 来进行模拟;而大部分的个体财富值并不符合这一分布.图4中的模拟曲线与理论推导的结论完全相符.

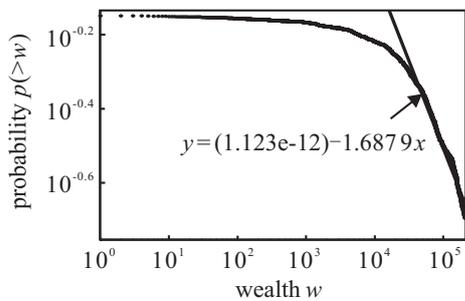


图4 财富分布

2.2.2 财富熵

在文献[15]中,谭跃进等为了刻画无标度网络的无序性,引进了一个重要的指标:网络结构熵.设网络包含 N 个节点,假定第 i 个节点的度为 d_i ,记 $I_i = d_i / \sum_{j=1}^N d_j$,则网络结构熵定义为

$$E = - \sum_{i=1}^N I_i \ln I_i. \quad (15)$$

根据熵的物理意义,网络结构熵刻画了概率分布 I_i 的不确定性;在文献[16]中将其反映到复杂网络上,网络结构熵则刻画了网络节点度值的均匀性.网络结构熵刻画的是复杂网络的无序性,而基尼系数刻画的是复杂网络的异质性.同理,为了刻画网络中的财富值的均匀性,本文将结构熵的概念推广至财富熵,用来体现网络中的个体财富分布的无序性,即用来刻画财富网络的异质性.财富熵值越大,财富异质性就越强.

设一个网络具有 N 个节点,将其按照财富值的大小进行排序,记为 v_1, v_2, \dots, v_N ,而相应的财富值记为 w_1, w_2, \dots, w_N ,记 $I_i = w_i / \sum_{j=1}^N w_j$,则网络财富熵也定义为

$$E = - \sum_{i=1}^N I_i \ln I_i. \quad (16)$$

在 $N = 500, m = 3, M = 20$ 的前提下,参数 r 对财富熵 E 的影响如表1所示.

表1 不同参数 r 下的财富熵

r	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
E	4.2859	4.6138	5.2003	5.6171	6.1821

在 $N = 500, m = 3, r = 0.6$ 的前提下,参数 M 对财富熵 E 的影响如表2所示.

表2 不同参数 M 下的财富熵

M	10	15	20	25	30
E	6.4108	5.5762	5.2103	5.0422	4.7506

由表1可知,财富熵 E 随着参数 r 的增大而逐渐增大,这与实际是相符的. r 增大,表明节点每次转移的财富值在不断地增多,从而增加了个体间财富的异质性.表2中的数据表明,当 M 值逐渐增大时,财富熵 E 则不断地下降.这表明随着局域世界规模的不断扩大,网络的财富分布越发地均衡化.

3 实证分析

3.1 数据整理以及分析方法

本文基于2007年山东省144部门的投入产出完全消耗系数表,将其中第一、第三产业以及第二产业中的电力、电热的生产和供应业,燃气生产和供应业,水的生产和供应业,建筑业,废品废料和其他制造业门类剔除后,并根据山东省2008年统计年鉴中表12-5合并相关的产业,共筛选出34个部门作为分析对象.投入产出完全消耗系数表较为全面地反映了产业间的直接关联和间接关联.在进行数据处理时,分

别对其横、纵向求皮尔逊相关系数. 根据相关系数的相关定义, 若相关系数大于 0.4, 即产业间的关联达到中等程度相关以上, 则产业间有关联, 否则无关联. 进而得到无方向的第二产业关联二值矩阵. 随后, 将相关产业根据或运算进行合并, 将该无方向的第二产业关联矩阵进行简化, 最终得到产业间的有效关联.

3.2 产业关联网络的特征分析

限于篇幅, 本部分主要给出该产业关联网络中产业的度值、聚集系数、度分布以及利润分布图, 并进行简单的分析.

表 3 和表 4 分别给出了山东省排名前 5 位和后 5 位的产业名称、度值以及其聚集系数. 经分析可知, 山东省第二产业的关联网络中各产业的度值分布并不均匀, 而且度值较大的产业的聚集系数较小, 随着度值的下降, 其产业聚集系数逐渐增大. 如排名第 34 位的家具制造业的聚集系数达到了 0.25. 该结论也证实了理论分析的结果. 其次, 从表 3 和表 4 中的度值可以发现, 产业的度值的波动相对缓和, 这是由于该关联网络的度计算仅限于第二产业中的 34 个部门, 其异质性明显小于 123 个部门.

表 3 度值、聚集系数前 5 位的产业

产业名称	度 值	聚集系数
非金属矿物制品业	34	0.060 6
化学原料及化学制品制造业	33	0.062 5
饮料制造业	31	0.066 67
医药制造业	31	0.066 67
黑色金属矿采选业	30	0.068 97

表 4 度值、聚集系数后 5 位的产业

产业名称	度 值	聚集系数
塑料制品业	15	0.142 857
纺织服装、鞋、帽制造业	15	0.142 857
烟草制品业	12	0.181 818
印刷业和记录媒介的复制业	10	0.222 222
家具制造业	09	0.25

图 5 给出了产业关联网络的度分布规律. 经分析发现, 山东省产业关联网络度分布符合双段幂律分布, 与中国 2002 年宏观经济多部门网络^[17]的度分布

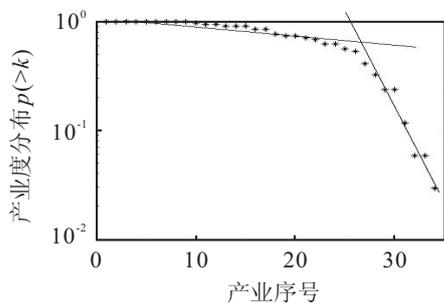


图 5 产业度分布

类似. 因此可以认为山东省第二产业的关联网络属于无标度网络.

图 6 给出了山东省第二产业中 34 个部门的利润分布规律. 经分析可知, 产业部门的利润分布与图 4 中给出的财富分布的理论图是相似的. 在利润达到阈值后, 产业部门的利润分布近似服从 Pareto 分布, 这很好地证实了理论分析的准确性.

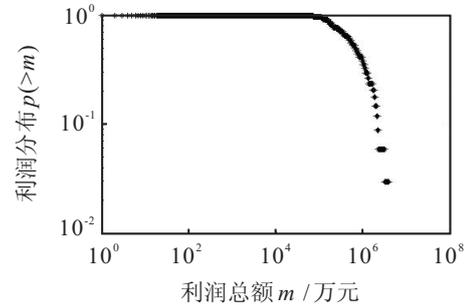


图 6 产业利润分布

4 结 论

本文不仅考虑了局域择优连接和局部财富重新分配, 并且将连接成本与利润引入网络模型中, 构建了一个更加贴近现实的财富演化网络模型. 采用理论与实证研究相结合的方法, 得到如下结论.

1) 社会经济关系结构直接影响到个体所拥有的财富值.

从网络结构方面看, 通过理论推导与仿真实验可知, 该网络的度分布服从幂律分布, 因此网络具有一定的无标度特性, 即大多数节点的度值都较小, 只有极少数的节点拥有较大的度值.

从社会网络的角度看, 度值较大的节点都是一些重要的节点, 他们拥有较多的人脉关系, 更易获得一些社会资源以及信息等, 因此使得各节点获得财富的机会明显不同. 另外, 经研究表明, 该网络是一个负向匹配网络, 即度较小的节点易与度较大的节点相连接, 这与聚集系数的特点是相符的. 即度值较小的节点的聚集性较强, 表明其邻居之间的关系更为紧密, 极易形成集团.

从财富分布方面看, 该网络中的财富分布是不均衡的, 在财富值达到一定的阈值后, 网络中的财富分布服从 Pareto 分布, 属于幂律分布的一种. 另外, 网络结构参数 γ 以及 M 的变化直接影响到网络中个体财富的异质性. 所以社会关系结构与财富分布是紧密相关的.

2) 不平等性是影响我国经济财富均衡化的重要因素.

不少人认为财富分配差距的悬殊是经济发展过程中不可避免的、带有规律性的现象. 然而, 从本文的理论分析可知, 财富分配差距悬殊现象的产生并不是

偶然的. 总体而言, 它的产生既与个体能力差异等客观因素有关, 又与因社会关系结构而造成的财富分配起点和过程的非公平性为标志的财富分配机会不平等这样的非正义因素相关. 例如, 广泛存在于中国富豪群体中的圈子现象即为一个财富分配机会不平等的典型例子. 富豪圈中的成员通过自己的人脉以及相关的活动增强其社会影响力, 从而比其他人更易获得大量的财富. 因此, 社会关系结构中的不平等性是财富分配的一个重要因素. 当然, 这种不平等性不仅仅体现在个体间, 地区与地区以及国家与国家之间的不平等性也是非常明显的.

3) 利用复杂网络研究社会经济关系网络结构是非常有效的途径.

本文建立了 2007 年山东省第二产业的关联网, 分析了该网络的结构以及各产业的利润分布情况. 通过分析可知, 其与文中的理论分析结论是一致的, 从而很好地证实了理论分析的准确性. 因此, 通过复杂网络来研究社会经济关系结构是非常有效的途径.

参考文献(References)

- [1] Duan W Q, Stanley H E. Volatility, irregularity, and predictable degree of accumulative return series[J]. *Physical Review E*, 2010, 81(6): 066116.
- [2] Sakai Y. Characteristics of population distributions in municipalities[J]. *J of the Physical Society of Japan*, 2007, 76(7): 074801.
- [3] Menezes M A, Barabasi A L. Fluctuations in network dynamics[J]. *Physical Review Letters*, 2004, 92(2): 028701.
- [4] Rosvall M, Sneppen K. Reinforced communication and social navigation generate groups in model networks[J]. *Physical Review E*, 2009, 79(2): 026111.
- [5] Challet D, Marsilib M, Zhangga Y C. Modeling market mechanism with minority game[J]. *Physica A*, 2000, 276(1): 284-315.
- [6] Krapivsky P L, Redner S. Dynamics of majority rule in two-state interacting spin systems[J]. *Physical Review Letters*, 2003, 90(23): 238701.
- [7] Lallouache M, Chakrabarti A S, Chakrabarti B K. Opinion formation in kinetic exchange models: Spontaneous symmetry-breaking transition[J]. *Physical Review E*, 2010, 82(5): 056112.
- [8] Wang J, Fu F, Wang L. Effects of heterogeneous wealth distribution on public cooperation with collective risk[J]. *Physical Review E*, 2010, 82(1): 016102.
- [9] Chatterjee A, Yarlagadda S, Chakrabarti B K. *Econophysics of Wealth Distributions: Econophys-Kolkata I*[M]. Italia: Springer-Verlag, 2005: 229-245.
- [10] Yakovenko V M, Rosser Jr J B. Colloquium: Statistical mechanics of money, wealth, and income[J]. *Reviews of Modern Physics*, 2009, 81(4): 1703-1725.
- [11] Bouchaud J P, Mezard M. Wealth condensation in a simple model of economy[J]. *Physica A*, 2000, 282(3): 536-545.
- [12] Garlaschelli D, Loffredo M I. Wealth dynamics on complex networks[J]. *Physica A*, 2004, 338(1): 113-118.
- [13] Iglesias J R, Goncalves S, Pianegonda S. Wealth redistribution in our small world[J]. *Physica A*, 2003, 327(1): 12-17.
- [14] Kim S, Kim G I, Lee G. Wealth networks with local redistribution[J]. *Physica A*, 2008, 387(19): 4973-4981.
- [15] 谭跃进, 吴俊. 网络结构熵及其在非标度网络中的应用[J]. *系统工程理论与实践*, 2004, 24(6): 1-3. (Tan Y J, Wu J. Network structure entropy and its application to scale-free networks[J]. *Systems Engineering -Theory & Practice*, 2004, 24(6): 1-3.)
- [16] 王林, 戴冠中, 胡海波. 无标度网络的一个新的拓扑参数[J]. *系统工程理论与实践*, 2006(6): 49-53. (Wang L, Dai G Z, Hu H B. A new topological parameter of scale-free network[J]. *Systems Engineering-Theory & Practice*, 2006(6): 49-53.)
- [17] 刘刚, 郭敏. 中国宏观经济多部门网络及其性质的实证研究[J]. *经济问题*, 2009(2): 31-34. (Liu G, Guo M. An empirical reserach on chinese nacroeconomic multi-sector network[J]. *China Industrial Economics*, 2009(2): 31-34.)

(责任编辑: 李君玲)