

模糊输出反馈实现动态不确定非线性系统的几乎干扰解耦

李长英, 王 伟

(大连理工大学 控制科学与工程学院, 辽宁 大连 116024)

摘 要: 研究一类单输入单输出动态不确定非线性系统的几乎干扰解耦问题. 首先设计一类新型的模糊高增益观测器估计非线性系统的未知状态; 然后结合自适应模糊 backstepping 控制、小增益定理和改变供能函数方法, 给出鲁棒自适应模糊控制器的设计. 所设计的控制器不仅可以保证整个闭环系统在输入到状态实际稳定意义下稳定, 同时抑制了干扰对输出的影响. 仿真结果表明了所提出控制方法的有效性.

关键词: 非线性系统; 自适应模糊控制; 几乎干扰解耦; 高增益观测器; 小增益定理

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Almost disturbance decoupling for dynamic uncertain nonlinear systems via fuzzy output feedback

LI Chang-ying, WANG Wei

(School of Control Science and Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China. Correspondent: WANG Wei, E-mail: wangwei@dlut.edu.cn)

Abstract: The problem of disturbance decoupling with stability is investigated for a class of single-input single-output(SISO) nonlinear systems, in which the states are not available for feedback. A novel fuzzy adaptive high-gain observer is firstly designed to estimate the unmeasured states. Then, by combining adaptive fuzzy backstepping design and small-gain theorem with supplying function, an output feedback control design is described to achieve the asymptotic stability of the closed-loop system in the sense of input-to-state practically stability(ISpS) with respect to the disturbance input, while the effect of the disturbance on output is diminished to an arbitrary degree of accuracy. Simulation results show the effectiveness of the proposed approach.

Key words: nonlinear systems; adaptive fuzzy control; almost disturbance decoupling; high-gain-based observer; small-gain theorem

0 引 言

解决外界干扰对非线性系统输出影响的问题可分为干扰解耦^[1]和干扰抑制^[2](或几乎干扰解耦^[3])两类: 干扰解耦是指外界干扰对系统输出的影响被完全消除, 即完全干扰解耦; 干扰抑制是指当外部干扰对系统输出的影响无法完全消除时, 考虑尽量抑制外界干扰对系统输出的影响, 即设计控制器实现在 L_p 增益的意义下, 外界干扰对系统输出的影响任意小. 非线性系统的几乎干扰解耦问题是由 Marino 等^[3]提出的, 目前, 关于此问题的研究已取得了许多理论成果和实际应用^[1-4]. 文献 [1-3] 在解决几乎干扰解耦问题时均以假设系统中非线性函数完全已知且满足匹配

条件. 为了放宽这一限制, 许多学者将自适应模糊控制^[5]与 backstepping 设计^[6]相结合来解决不满足匹配条件的非线性不确定系统几乎干扰解耦问题^[4]. Chen 等^[4]针对 MIMO 嵌入式下三角结构的非线性不确定系统, 提出了模糊自适应 backstepping 控制方法, 不仅保证了整个闭环系统的稳定性, 而且在 L_2 增益的意义下抑制了干扰对输出的影响.

带有未建模动态的非线性不确定系统的鲁棒控制是控制领域的研究重点, 这类系统的鲁棒控制问题得到了广泛的研究^[7-10]. 文献 [7-8] 分别引入小增益定理和动态信号来解决带有未建模动态的非线性不确定系统的鲁棒控制问题, 但均未考虑外界干扰对系统的影响. 虽然文献 [9-10] 通过引入改变供能函数的方

收稿日期: 2013-03-19; 修回日期: 2013-07-05.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61034003).

作者简介: 李长英(1982—), 女, 博士生, 从事非线性控制、模糊自适应控制的研究; 王伟(1955—), 男, 教授, 博士生导师, 从事智能控制、复杂工业过程的建模、控制与优化等研究.

法来解决带有不确定输入动态非线性系统的鲁棒几乎干扰解耦问题,但是只考虑了干扰对输出的影响,没有考虑干扰对系统内部的影响,而且文献[1-4,7-8]的非线性鲁棒控制方法都是在系统状态完全可测的条件下设计的.事实上,多数实际非线性系统的状态不完全可测,针对此类非线性系统,文献[11-13]分别设计了不同的高增益观测器,基于backstepping方法给出输出反馈控制器的设计,并利用Lyapunov函数证明了整个闭环系统的稳定性.

综合以上问题,本文针对单输入单输出(SISO)非线性不确定系统,应用模糊逻辑系统逼近未知函数,设计一种新型高增益观测器来估计不可测状态.基于backstepping设计、小增益定理和改变供能函数的方法,提出了模糊自适应输出反馈控制器的设计方案.所提出的控制方案可以保证:当外部干扰不存在时,受控系统的所有信号一致有界;当外部干扰存在时,受控系统从干扰到输出的某一固定增益任意小,同时以干扰为输入的受控系统是输入到状态实际稳定的.同时,所研究的SISO非线性系统与以往文献比较有如下优点:1)非线性系统存在不确定性和未建模动态,且部分状态不可测;2)非线性系统不仅考虑干扰对控制输出的影响,而且考虑干扰对系统状态的影响.

1 问题描述和模糊逻辑系统

1.1 问题描述

本文考虑如下一类SISO非线性不确定系统:

$$\begin{cases} \dot{z} = q_0(t, z, y) + q_1(t, z, y)\omega, \\ \dot{x}_i = x_{i+1} + f_i(x_1, \dots, x_i) + h_i(t, z, x)\omega, \\ \dot{x}_n = u + f_n(x_1, \dots, x_n) + h_n(t, z, x)\omega, \\ y = x_1, i = 1, 2, \dots, n-1. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$ 为系统的状态向量; $u \in R$, $y \in R$ 分别为系统的控制输入和输出; $\omega \in R^s$ 为系统的外部扰动; $z \in R^{n_0}$ 为不可测的部分状态; f_i 为未知的光滑函数; q_0 , q_1 和 h_i 为不确定且满足Lipschitz条件的连续函数.本文假设仅有系统的输出 y 可测,其余系统状态皆不可测.

假设 1^[7-11] 系统(1)中 z -子系统存在ISpS-Lyapunov函数 V_0 ,即对于任意的 $t \in R_+$, $z \in R^{n_0}$, $y \in R$ 和 $\omega \in R^s$,存在 K_∞ 函数 $\underline{\alpha}$, $\bar{\alpha}$, α_0 , γ_0 , γ_1 和正常数 c_0 满足

$$\underline{\alpha}(|z|) \leq V_0(t, z) \leq \bar{\alpha}(|z|), \quad (2)$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial t}(t, z) + \frac{\partial V_0}{\partial z}(t, z)[q_0(t, y, z) + q_1(t, y, z)\omega] \leq$$

$$\alpha_0(|z|) + \gamma_0(|y|) + \gamma_1(|\omega|) + c_0, \quad (3)$$

其中 $|\cdot|$ 为向量的欧氏范数.

假设 2 对于任意的 $1 \leq i \leq n$, $t \in R_+$, $z \in R^{n_0}$

和 $y \in R$,存在正常数 ψ_{i0} 、光滑非负函数 ψ_{i1} 和 ψ_{i2} ,使得

$$|h_i(t, z, x)| \leq \psi_{i1}(|y|) + \psi_{i2}(|z|) + \psi_{i0}, \quad (4)$$

其中 $\psi_{i1}(0) = \psi_{i2}(0) = 0$.

假设 3^[12-13] 对于任意的 $1 \leq i \leq n$,系统(1)中的光滑函数 $f_i(x_i)$ 满足局部Lipschitz条件,即对于任意的 $t \in R_+$, $x_i, \hat{x}_i \in R^i$,存在局部的Lipschitz非负函数 $L(y)$ 满足

$$|\tilde{f}_i| \leq L(y)(|x_2 - \hat{x}_2| + |x_3 - \hat{x}_3| + \dots + |x_i - \hat{x}_i|). \quad (5)$$

其中: $\tilde{f}_i = f_i(x_i) - f_i(\hat{x}_i)$; $x_i = (x_1, x_2, \dots, x_i)^T$ 为系统(1)的部分状态向量; $\hat{x}_i = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_i)^T$ 为 $x_i = (x_1, x_2, \dots, x_i)^T$ 的估计.

1.2 模糊逻辑系统

存在模糊逻辑系统

$$y(x) = \theta^T \varphi(x). \quad (6)$$

其中: $\theta \in R^n$ 为参数向量, $\varphi(x)$ 为模糊基函数向量.

引理 1^[5] $f(x)$ 为紧集 Ω 内的连续函数, $\forall \varepsilon > 0$,存在模糊逻辑系统(6)使得

$$\sup_{x \in \Omega} |f(x) - \theta^T \varphi(x)| \leq \varepsilon.$$

注 1 存在闭集

$$\bar{\Omega} = \{x \in R^n \mid |x| \leq M\},$$

其中 M 是任意的.定义系统(1)中的 $f_i(x_i)$ 为闭集 $\bar{\Omega}$ 上的光滑函数,根据引理 1,必然存在模糊逻辑系统逼近 $f_i(x_i)$.

利用模糊逻辑系统逼近 f_i ,有

$$\hat{f}_i(\hat{x}_i|\theta_i) = \theta_i^T \varphi_i(\hat{x}_i), \hat{x}_i = (y, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_i)^T. \quad (7)$$

定义最优参数向量为

$$\theta_i^* = \arg \min_{\theta_i \in \Omega, \hat{x}_i \in U} [\sup |\hat{f}_i(\hat{x}_i|\theta_i) - f_i(\hat{x}_i)|], \quad (8)$$

其中 Ω 和 U 为关于 θ_i 和 \hat{x}_i 的有界闭集^[5].

模糊逼近误差定义为

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= f_i(\hat{x}_i) - \hat{f}_i(\hat{x}_i|\theta_i^*), \\ \delta_i &= f_i(\hat{x}_i) - \hat{f}_i(\hat{x}_i|\theta_i). \end{aligned} \quad (9)$$

假设 4 存在常数 δ_{i0} 和 ε_{i0} ,使得 $|\varepsilon_i| \leq \varepsilon_{i0}$, $|\delta_i| \leq \delta_{i0}$.定义 $w_i = \varepsilon_i - \delta_i$,则有 $|w_i| \leq \varepsilon_{i0} + \delta_{i0} = w_{i0}$.

1.3 控制目标

对于任意给定的正实数 η ,一定存在 K -函数 γ ,可以设计形如下式的输出反馈控制律:

$$\dot{\zeta} = v(\zeta, y), u = \mu(\zeta, y), \quad (10)$$

使得系统满足:

1) 当 $\omega = 0$ 时,闭环系统(1)和(10)所有信号一致有界.

2) 当 $\omega \in L_\infty$ 时, 闭环系统从平衡点出发的输出 $y(t)$ 满足

$$\int_0^T |y(t)|^2 dt \leq \eta \int_0^T \gamma(|\omega(t)|) dt + \pi_0 T, \quad \forall T > 0. \quad (11)$$

2 自适应模糊输出反馈控制

2.1 高增益观测器设计

设计模糊高增益观测器

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_i = \hat{x}_{i+1} + \hat{f}_i(\hat{x}_i|\theta_i) + k_i r(t)^i (y - \hat{x}_1), \\ \dot{\hat{x}}_n = u + \hat{f}_n(\hat{x}_n|\theta_n) + k_n r(t)^n (y - \hat{x}_1), \\ \dot{r}(t) = l(r, y), \\ i = 1, 2, \dots, n-1, \end{cases} \quad (12)$$

其中 $l(r, y)$ 为待设计的 $n+1$ 阶连续可微函数.

设 $e = x - \hat{x}$ 为观测误差, 则观测误差方程为

$$\begin{aligned} \dot{e}_i = & e_{i+1} + (f_i(x_i) - \hat{f}_i(\hat{x}_i)) + \delta_i(x_i, \theta_i) - \\ & k_i r(t)^i (y - \hat{x}_1) + h_i(t, z, x)\omega. \end{aligned} \quad (13)$$

基于高增益观测器的误差分析惯例, 定义如下比例误差:

$$\xi_i = \frac{e_i}{r(t)^{i-1+a}}. \quad (14)$$

本文假设 $a > 1$.

引理 2 对于任意的严格正实数 a, p 和 d , 存在对称正定矩阵 P 满足

$$A^T P + PA \leq -dP, \quad pI \leq P \leq I, \quad 0 < p \leq 1, \quad (15)$$

$$-aP \leq DP + PD \leq aP. \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} D &= \text{diag}(0, 1, \dots, n-1), \quad n \geq 2, \\ A &= \begin{bmatrix} -k_1 & & & & \\ -k_2 & I_{i-1} & & & \\ \vdots & & & & \\ -k_n & 0 & \dots & 0 & \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}, \\ B_i &= \underbrace{[0 \dots 1 \quad \dots 0]}_i^T. \end{aligned}$$

选择 k_i 使得 A 是 Hurwitz 矩阵.

选择 Lyapunov 函数 $V_\xi = \xi^T P \xi$, V_ξ 对 t 求导数得

$$\dot{V}_\xi = \dot{\xi}^T P \xi + \xi^T P \dot{\xi}. \quad (17)$$

由式 (13) 和 (14) 可得

$$\begin{aligned} \dot{\xi} = & r(t)A\xi - \frac{\dot{r}(t)}{r(t)}(aI + D)\xi + \\ & \sum_{i=1}^n B_i \frac{[f_i(x_i) - \hat{f}_i(\hat{x}_i)] + \delta_i + h_i \omega}{r(t)^{i-1+a}}. \end{aligned} \quad (18)$$

利用引理 2 和假设 3, 将式 (19) 代入 (17) 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_\xi \leq & -dr(t)\xi^T P \xi - 2a \frac{\dot{r}(t)}{r(t)} \xi^T P \xi + 2|\xi^T| |P\delta| - \\ & \frac{\dot{r}(t)}{r(t)} \xi^T (DP + PD)\xi + |\xi^T| |Ph\omega| + \\ & 2L(y) \sum_{i=2}^n |\xi^T P_i| (|\xi_2| + |\xi_3| + \dots + |\xi_i|) \leq \\ & -dr\xi^T P \xi + 2|\xi^T| |P\delta| + 2|\xi^T| |Ph\omega| - \\ & \left[a \left(\frac{2\dot{r}(t)}{r(t)} - \frac{|\dot{r}(t)|}{r(t)} \right) - \frac{2(n-1)L(y)}{\sqrt{p}} \right] \xi^T P \xi. \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$\delta = [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n]^T, \quad h = [h_1, h_2, \dots, h_n]^T.$$

为了保证不等式 (19) 中

$$a \left(\frac{2\dot{r}(t)}{r(t)} - \frac{|\dot{r}(t)|}{r(t)} \right) - \frac{2(n-1)L(y)}{\sqrt{p}} > 0,$$

选取高增益函数

$$\dot{r}(t) = -\frac{r(t)}{a} \left[\frac{d}{3}(r(t) - 1) - \frac{2(n-1)}{\sqrt{p}} L(y) \right]. \quad (20)$$

其中: $r(0) = 1, r(t) \geq 1$. 选取合适的 Lyapunov 函数 V_r , 使得当 $y(t)$ 有界时, 增益函数 $r(t)$ 也是有界的^[12-13].

注 2 通过 Lyapunov 稳定性分析可得到 $r(t)$ 的微分方程 (20), 用反证法进行证明 $r(t) \geq 1$. 若 $r(t) < 1$, 则根据式 (20) 和引理 2, 有 $\dot{r}(t) > 0$, 那么 $r(t) \geq r(0) = 1$. 与假设 $r(t) < 1$ 矛盾, 故 $r(t) \geq 1$, 保证 $r(t) \neq 0$.

利用 Young 不等式 $2a^T b \leq \varepsilon|a|^2 + |b|^2/\varepsilon$, 可得

$$\begin{aligned} 2|\xi^T| |Ph\omega| \leq & \frac{12p}{d} |P|^2 \left[\sum_{i=1}^n \psi_{i1}(|y|) \right]^4 + \\ & \frac{12p}{d} |P|^2 \left[\sum_{i=1}^n \psi_{i2}(|z|) \right]^4 + \frac{12p}{d} |P|^2 \omega^4 + \\ & \frac{12p}{d} |P|^2 \left[\sum_{i=1}^n \psi_{i0} \right]^2 \omega^2 + \frac{d}{4p} |\xi|^2, \end{aligned} \quad (21)$$

$$2|\xi^T| |P\delta| \leq \frac{2p}{d} |P\delta_0|^2 + \frac{d}{2p} |\xi|^2. \quad (22)$$

将式 (20)~(22) 代入 (19), 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_\xi \leq & -\frac{1}{4} d \xi^T P \xi + \frac{2p}{d} |P\delta_0|^2 + \phi_1(y) + \\ & \phi_2(z) + \phi_0 \omega^2 + \frac{12p}{d} |P|^2 \omega^4. \end{aligned} \quad (23)$$

由假设 2 可知, $\phi_1(y)$ 和 $\phi_2(z)$ 均为非负光滑函数, ϕ_0 为正常数.

2.2 模糊自适应 backstepping 设计

本节利用 backstepping 技术设计模糊自适应控制器和参数自适应律. 模糊自适应 backstepping 输出反馈控制基于如下假设:

$$\begin{aligned}\chi_1 &= \beta'(y^2)y, \\ \chi_i &= \hat{x}_i - \vartheta_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n.\end{aligned}\quad (24)$$

Step 1 根据式(1)和(12), y 对时间 t 求导数得

$$\begin{aligned}\dot{y} &= x_2 + f_1(x_1) + h_1(t, z, x)\omega = \\ \hat{x}_2 + r(t)^{1+a}\xi_2 + \hat{f}_1(x_1|\theta_1^*) + \varepsilon_1 + h_1(t, z, x)\omega = \\ \hat{x}_2 + r(t)^{1+a}\xi_2 + \theta_1^T \varphi_1(x_1) + \\ \tilde{\theta}_1^T \varphi_1(x_1) + \varepsilon_1 + h_1(t, z, x)\omega.\end{aligned}\quad (25)$$

选择 Lyapunov 函数

$$V_1 = V_\xi + \frac{1}{2}\beta(y^2) + \frac{1}{\lambda_1}\tilde{\theta}_1^T \tilde{\theta}_1.\quad (26)$$

其中: $\tilde{\theta}_1 = \theta_1^* - \theta_1$; $\beta(y^2)$ 为光滑 k_∞ -函数, 在后面的设计中给出; $\lambda_1 > 0$ 为设计参数. 下文中 $\beta(y^2)$ 简写为 β , $r(t)$ 简写为 r .

由式(25), V_1 对时间 t 求导数得

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 \leq & \dot{V}_\xi + \beta'y[\chi_2 + \vartheta_1 + \theta_1^T \varphi_1(x_1) + r^{1+a}\xi_2 + \\ & \varepsilon_1 + h_1\omega] + \frac{2}{\lambda_1}\tilde{\theta}_1^T(\lambda_1\beta'y\varphi_1(x_1) - \dot{\theta}_1).\end{aligned}\quad (27)$$

利用 Young 不等式, 得到

$$\beta'yr^{1+a}\xi_2 \leq \frac{2p}{d}r^{2+2a}(\beta'y)^2 + \frac{d}{8p}|\xi|^2,\quad (28)$$

$$\begin{aligned}\beta'yh_1\omega \leq & \frac{1}{4}(\beta'y)^2\psi_{11}(|y|)^2 + \frac{1}{2}(\beta'y)^2 + \\ & \psi_{12}(|z|)^4 + (1 + \psi_{10}^2)\omega^2 + \frac{1}{4}\omega^4.\end{aligned}\quad (29)$$

由于 $\phi_1(y)$ 为光滑函数, 存在光滑非负函数 $\hat{\phi}_1$ 满足 $\phi_1(y) \leq y^2\hat{\phi}_1(y), \forall y \in R$.

将式(23), (28)和(29)代入(27)可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 \leq & -\frac{1}{8}d\xi^T P\xi + \frac{2p}{d}|P\delta_0|^2 + \phi_2(z)^4 + \\ & \left(\frac{1}{2} + \phi_0 + \psi_{10}^2\right)\omega^2 + \left(\frac{12p|P|^2}{d} + \frac{1}{4}\right)\omega^4 + \\ & \frac{2}{\lambda_1}\tilde{\theta}_1^T(\lambda_1\beta'y\varphi_1(x_1) - \dot{\theta}_1) + \\ & \beta'y[\chi_2 + \vartheta_1 + \theta_1^T \varphi_1(x_1) + \varepsilon_1 + \\ & \beta'y\hat{\psi}_1(y) + \frac{y}{\beta'}\hat{\phi}_1(y)] + \psi_{12}(|z|)^4,\end{aligned}\quad (30)$$

其中 $\hat{\psi}_1(y) = \frac{2p}{d}r^{2+2a} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\psi_{11}(|y|)^2$.

选择虚拟控制函数 ϑ_1 和参数自适应律 θ_1 分别为

$$\begin{aligned}\vartheta_1 &= -y\nu_1(y^2) - \beta'y\hat{\psi}_1(y) - \frac{y}{\beta'}\hat{\phi}_1(y) - \\ & \theta_1^T \varphi_1(x_1) - \varepsilon_{10} \tanh\left(\frac{\varepsilon_{10}\beta'y}{\kappa}\right),\end{aligned}\quad (31)$$

$$\dot{\theta}_1 = \lambda_1\beta'y\varphi_1(x_1) - \sigma(\theta_1 - \theta_{10}).\quad (32)$$

其中: $\kappa > 0, \sigma > 0$ 和 θ_{10} 为设计参数; $\nu_1(y^2)$ 为待设计的不减的光滑函数.

对于任意 $\kappa > 0$, $\tanh(\cdot)$ 函数满足不等式

$$\beta'y\varepsilon_1 - \beta'y\varepsilon_{10} \tanh\left(\frac{\varepsilon_{10}\beta'y}{\kappa}\right) \leq 0.2785\kappa = \kappa'.$$

将式(31)和(32)代入(30)可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 \leq & -\frac{1}{8}d\xi^T P\xi - \beta'y^2\nu_1(y^2) + \chi_1\chi_2 + \\ & \phi_2(z) + \left(\frac{1}{2} + \phi_0 + \psi_{10}^2\right)\omega^2 + \\ & \left(\frac{12p|P|^2}{d} + \frac{1}{4}\right)\omega^4 + \psi_{12}(|z|)^4 + \\ & \frac{2p}{d}|P\delta_0|^2 + \frac{2\sigma}{\lambda_1}\tilde{\theta}_1^T(\theta_1 - \theta_{10}) + \kappa'.\end{aligned}\quad (33)$$

Step i ($2 \leq i \leq n-1$) χ_i 对时间 t 求导数可得

$$\begin{aligned}\dot{\chi}_i &= \hat{x}_{i+1} + H_i + \tilde{\theta}_i^T \varphi_i(\hat{x}_i) + w_i - \\ & \frac{\partial \vartheta_{i-1}}{\partial y}(r^{1+a}\xi_2 + \delta_1 + h_1\omega),\end{aligned}\quad (34)$$

其中

$$H_i =$$

$$k_i r(t)^i (y - \hat{x}_1) + \theta_i^T \varphi_i(\hat{x}_i) - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \vartheta_{i-1}}{\partial \theta_k} \dot{\theta}_k -$$

$$\frac{\partial \vartheta_{i-1}}{\partial r} \dot{r} - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \vartheta_{i-1}}{\partial \hat{x}_k} \dot{\hat{x}}_k - \frac{\partial \vartheta_{i-1}}{\partial y} [\hat{x}_2 + \theta_1^T \varphi_1(x_1)].$$

选择 Lyapunov 函数

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2}\chi_i^2 + \frac{1}{\lambda_i}\tilde{\theta}_i^T \tilde{\theta}_i,\quad (35)$$

选择虚拟控制函数和参数自适应律分别为

$$\begin{aligned}\vartheta_i &= -\chi_{i-1} - c_i\chi_i - \chi_i \left(\frac{\partial \vartheta_{i-1}}{\partial y}\right)^2 \hat{\psi}_i - \\ & H_i - w_{i0} \tanh\left(\frac{w_{i0}\chi_i}{\kappa}\right),\end{aligned}\quad (36)$$

$$\dot{\theta}_i = \lambda_i\varphi_i(\hat{x}_i)\chi_i - \sigma(\theta_i - \theta_{i0}).\quad (37)$$

其中: $\hat{\psi}_i(y) = \frac{1}{4}\psi_{11}(|y|)^2 + \frac{3}{2} + \frac{2^i p}{d}r^{2+2a}$, $\gamma_i > 0$ 和 θ_{i0} 均为设计参数.

利用 Young 不等式和 $\tanh(\cdot)$ 函数满足的不等式, 可得到

$$\begin{aligned}-\chi_i \frac{\partial \vartheta_{i-1}}{\partial y}(r(t)^{1+a}\xi_2 + \delta_1) \leq \\ \frac{d}{2^{i+2}p}|\xi|^2 + \delta_{10}^2 + \left(\frac{2^i p}{d}r(t)^{2+2a} + 1\right) \left(\frac{\partial \vartheta_{i-1}}{\partial y}\right)^2 \chi_i^2,\end{aligned}\quad (38)$$

$$\begin{aligned}-\chi_i \frac{\partial \vartheta_{i-1}}{\partial y} h_1\omega \leq \\ \psi_{12}(|z|)^4 + (1 + \psi_{10}^2)\omega^2 + \\ \frac{1}{4}\omega^4 + \left(\chi_i \frac{\partial \vartheta_{i-1}}{\partial y}\right)^2 \left[\frac{1}{4}\psi_{11}(|y|)^2 + \frac{1}{2}\right],\end{aligned}\quad (39)$$

$$\chi_i w_i - \chi_i w_{i0} \tanh\left(\frac{w_{i0}\chi_i}{\kappa}\right) \leq \kappa',\quad (40)$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^i \frac{2\sigma}{\gamma_k} \tilde{\theta}_k^T (\theta_k - \theta_{k0}) \leq \\ -\sum_{k=1}^i \frac{\sigma}{\gamma_k} \tilde{\theta}_k^T \tilde{\theta}_k + \sum_{k=1}^i \frac{\sigma}{\gamma_k} |\theta_k^* - \theta_{k0}|^2.\end{aligned}\quad (41)$$

V_i 对时间 t 求导数, 并将式 (34), (36) ~ (41) 代入得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_i \leq & -\frac{1}{2^{i+2}} d \xi^T P \xi - \sum_{k=2}^i c_k \chi_k^2 + \chi_i \chi_{i+1} + \\ & \phi_2(z) + i \psi_{12}(|z|)^4 - \beta' y^2 \nu_1(y^2) + \\ & (i + \phi_0 + i \psi_{10}^2) \omega^2 + \left(\frac{12p|P|^2}{d} + \frac{i}{4}\right) \omega^4 + \\ & i \kappa' + \frac{2p}{d} |P \delta_0|^2 + (i-1) \delta_{10}^2 + \\ & \sum_{k=1}^i \frac{\sigma}{\lambda_k} |\theta_k^* - \theta_{k0}|^2 - \sum_{k=1}^i \frac{\sigma}{\lambda_k} \tilde{\theta}_k^T \tilde{\theta}_k. \end{aligned} \quad (42)$$

Step n 控制 u 出现在第 n 步虚拟设计中, 考虑选择 Lyapunov 函数

$$V = V_{n-1} + \frac{1}{2} \chi_n^2 + \frac{1}{\lambda_n} \tilde{\theta}_n^T \tilde{\theta}_n. \quad (43)$$

选取控制器 u 和自适应律 θ_n 分别为

$$\begin{aligned} u = & -\chi_{n-1} - c_n \chi_n + \chi_n \left(\frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial y}\right)^2 \hat{\psi}_n - \\ & H_n - w_{n0} \tanh(w_{n0} \chi_n / \kappa), \end{aligned} \quad (44)$$

$$\dot{\theta}_n = \lambda_n \varphi_n(\hat{x}_n) \chi_n - \sigma(\theta_n - \theta_{n0}), \quad (45)$$

其中 $\hat{\psi}_n(y) = \frac{1}{4} \psi_{11}(|y|)^2 + \frac{3}{2} + \frac{2^n p}{d} r^{2+2\alpha}$.

V_n 对时间 t 求导数得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & -\frac{1}{2^{n+2}} d \xi^T P \xi - \sum_{k=2}^n c_k \chi_k^2 + \phi_2(z) + \\ & n \psi_{12}(|z|)^4 + \left(\frac{12p|P|^2}{d} + \frac{n}{4}\right) \omega^4 + \\ & (n + \phi_0 + n \psi_{10}^2) \omega^2 - \beta' y^2 \nu_1(y^2) + \\ & \frac{2p}{d} |P \delta_0|^2 + (n-1) \delta_{10}^2 + n \kappa' + \\ & \sum_{k=1}^n \frac{\sigma}{\lambda_k} |\theta_k^* - \theta_{k0}|^2 - \sum_{k=1}^n \frac{\sigma}{\lambda_k} \tilde{\theta}_k^T \tilde{\theta}_k. \end{aligned} \quad (46)$$

2.3 小增益定理分析

定理 1 基于假设 1 ~ 假设 4、引理 1 和引理 2, 对动态不确定非线性系统 (1) 设计高增益观测器 (12) 和自适应输出反馈控制器 (44), 选择虚拟控制器 (31)、(36)、参数自适应律 (32)、(37) 和 (45), 当外部干扰不存在时, 使得受控系统的所有信号一致有界.

证明 当 $\omega = 0$ 时, 首先选取 Step 1 引入的光滑函数 $\nu_1(y)$ 满足

$$\beta'(y^2) y^2 \nu_1(y^2) \geq \beta(y^2). \quad (47)$$

由于 $\beta'(y^2) \neq 0$, 一定存在光滑函数 $\nu_1(y)$ 使不等式成立.

因为 $\psi_{i2}(|z|)$ 为已知的非负光滑函数且 $\psi_{i2}(0) = 0$, 所以存在光滑 k_∞ -类函数 Φ 使得

$$\phi_2(z) + n \psi_{12}(|z|)^4 \leq \Phi(|z|^4). \quad (48)$$

令

$$\begin{aligned} c = & \min \left\{ \frac{1}{2^{n+2}} d, 2c_i, 2, \sigma \right\}, \\ \pi_0 = & \frac{2p}{d} |P \delta_0|^2 + (n-1) \delta_{10}^2 + n \kappa' + \\ & \sum_{k=1}^n \frac{\sigma}{\lambda_k} |\theta_k^* - \theta_{k0}|^2, \end{aligned}$$

则式 (46) 可进一步表达为

$$\dot{V}_n \leq -c V_n + \Phi(|z|^4) + \pi_0. \quad (49)$$

根据式 (2), 对于任意 $0 \leq \varepsilon_1 \leq c$, 式 (49) 满足

$$\dot{V}_n \leq -\varepsilon_1 V_n. \quad (50)$$

V_n 只需要满足

$$V_n \geq \max \left\{ \frac{2\Phi(\alpha^{-1}(V_0(z))^4)}{c - \varepsilon_1}, \frac{2\pi_0}{c - \varepsilon_1} \right\}. \quad (51)$$

为了满足小增益定理^[7]条件, 对于任意 $\varepsilon_2 > 0$, 式 (47) 选取的 $\beta(y^2)$ 同时满足

$$\gamma^{-1} \circ \gamma_0(|y|) \leq \frac{1}{4} \beta(y^2) + \varepsilon_2 \leq \frac{1}{2} V_n + \varepsilon_2, \quad (52)$$

其中运算符“ \circ ”是函数 γ^{-1} 和 γ_0 的复合运算.

将式 (52) 代入 (3), 得到

$$\frac{\partial V_0}{\partial z} q(t, y, z) \leq -\alpha_0(|z|) + \gamma(V_n) + c_0 + \gamma(2\varepsilon_2). \quad (53)$$

对于任意 $0 < \varepsilon_3 < 1, \varepsilon_4 > 0$, 只需满足

$$\begin{aligned} \varepsilon_4 V_0 \geq & \max \left\{ \varepsilon_4 \bar{\alpha} \circ \alpha_0^{-1} \circ \frac{2\gamma(V_n)}{1 - \varepsilon_3}, \right. \\ & \left. \varepsilon_4 \bar{\alpha} \circ \alpha_0^{-1} \circ \frac{2\gamma(2\varepsilon_2) + 2c_0}{1 - \varepsilon_3} \right\}. \end{aligned} \quad (54)$$

式 (53) 可以进一步表达为

$$\dot{V}_0 \leq -\varepsilon_3 \alpha_0(|z|) \leq -\varepsilon_3 \alpha_0 \circ \underline{\alpha}(V_0(z)). \quad (55)$$

因此, 在式 (51) 和 (54) 的条件下, 式 (50) 和 (55) 成立, 满足小增益引理的条件.

对于任意 $s > 0$, 选择

$$\gamma(s) < \frac{1 - \varepsilon_3}{2} \alpha_0 \circ \bar{\alpha}^{-1} \circ \underline{\alpha} \left(\sqrt{\lambda^{-1} \left(\frac{c - \varepsilon_1}{2} s \right)} \right), \quad (56)$$

$$\gamma_1(s) = \frac{2\lambda \left(\underline{\alpha}^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon_4} s \right) \right)^4}{c - \varepsilon_1}, \quad (57)$$

$$\gamma_2(s) = \varepsilon_4 \bar{\alpha} \circ \alpha_0^{-1} \circ \frac{2\gamma(s)}{1 - \varepsilon_3}. \quad (58)$$

由式 (56) ~ (58) 得到

$$\gamma_1 \circ \gamma_2 < s. \quad (59)$$

根据小增益定理^[7], 可知 z -子系统、闭环系统 (12)、(13) 和 (44) 是 ISpS, 故闭环系统中所有信号均一致有界, 且输出 y 收敛于原点的一个邻域内. \square

2.4 改变供能函数分析

定理 2 基于假设 1 ~ 假设 4、引理 1 和引理 2, 且假设 1 和假设 2 中函数 γ_0, α_0 和 ψ_{i2} 满足

$$\limsup_{s \rightarrow 0^+} \frac{\gamma_0(s)}{s^2} < +\infty, \limsup_{s \rightarrow 0^+} \frac{\psi_{i2}(s)^4}{\alpha_0(s)} < +\infty. \quad (60)$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \frac{1}{4} \rho \circ \underline{\alpha}(s) \alpha_0(s), \\ \gamma(s) &= \rho \circ \bar{\alpha} \circ \alpha_0^{-1} \circ 6\gamma_1(s)\gamma_1(s) + \\ &\quad (n + \phi_0 + n\psi_{10})s^2 + \left(\frac{12}{d}|P|^2 + \frac{n}{4}\right)s^4. \end{aligned}$$

对动态不确定非线性系统 (1) 设计高增益观测器 (12) 和自适应输出反馈控制器 (44), 选择虚拟控制器 (31)、(36)、参数自适应律 (32)、(37) 和 (45), 当外部干扰存在时, 使得受控系统从干扰到输出的某一固定增益任意小, 同时以干扰为输入的闭环系统是输入到状态实际稳定的.

证明 当 $\omega \in L_\infty$ 时, 首先构造能量函数 U_0 , 有

$$U_0(t, z) = \int_0^{V_0(z)} \rho(\tau) d\tau. \quad (61)$$

其中: $\rho: R_+ \rightarrow R_+$ 为不减的光滑函数, 且 $\forall \tau > 0$ 满足 $\rho(\tau) > 0$; U_0 为正定函数. 由式 (2)、(3) 和 (46), U_0 对时间 t 求导数得

$$\begin{aligned} \dot{U}_0 &\leq \\ &\quad -\frac{1}{2} \rho \circ \underline{\alpha}(|z|) \alpha_0(|z|) + \rho \circ \bar{\alpha} \circ \alpha_0^{-1}(6c_0)c_0 + \\ &\quad \rho \circ \bar{\alpha} \circ \alpha_0^{-1} \circ 6\gamma_0(|y|)\gamma_0(|y|) + \\ &\quad \rho \circ \bar{\alpha} \circ \alpha_0^{-1} \circ 6\gamma_1(|\omega|)\gamma_1(|\omega|). \end{aligned} \quad (62)$$

根据式 (46) 和文献 [15] 中的引理 2, 一定存在函数 ρ 满足

$$\frac{1}{4} \rho \circ \underline{\alpha}(|z|) \alpha_0(|z|) \geq \phi_2(z) + n\psi_{12}(|z|)^4. \quad (63)$$

同样选取函数 $\beta(y^2)$ 为

$$\beta(y^2) + 2\eta^{-1}y^2 \geq 2\rho \circ \bar{\alpha} \circ \alpha_0^{-1} \circ 6\gamma_0(|y|)\gamma_0(|y|). \quad (64)$$

选取 Lyapunov 函数 $V_c = V_n + U_0$, 令自适应律 (32)、(37) 和 (45) 中 $\sigma = 0$. 由式 (46)、(47) 和 (62)~(64), V_c 对时间 t 求导数得

$$\begin{aligned} \dot{V}_c &\leq \\ &\quad -\alpha(|z|) - \frac{1}{2^{n+2}} d\xi^T P\xi - \frac{1}{2} \beta(y^2) - \\ &\quad \sum_{k=2}^n c_k \chi_k^2 - \eta^{-1}y^2 + \gamma(|\omega|) + \pi_0. \end{aligned} \quad (65)$$

其中

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \\ &\quad \frac{2p|P\delta_0|^2}{d} + (n-1)\delta_{10}^2 + n\kappa' + \rho \circ \bar{\alpha} \circ \alpha_0^{-1}(6c_0)c_0, \end{aligned}$$

α 和 γ 均为 K -函数.

由式 (65), 对于 $\forall T > 0$, 存在正常数 η 满足

$$\int_0^T |y(t)|^2 dt \leq \eta \int_0^T \gamma(|\omega(t)|) dt + \pi_0 T.$$

根据 V_0 的定义和 backstepping 设计过程中选取

的 V_n , 可知 V_c 是径向无界的正定函数. 定义

$$\begin{aligned} W(z, y, \xi, \chi_2, \dots, \chi_n) &= \\ &\quad \alpha(|z|) + \frac{1}{2^{n+2}} d|\xi|^2 + \\ &\quad \sum_{k=2}^n c_k \chi_k^2 + \frac{1}{2} \beta(y^2) + \eta^{-1}y^2, \end{aligned}$$

则式 (65) 可进一步表达为

$$\dot{V}_c \leq -W + \gamma(|\omega|) + \pi_0. \quad (66)$$

根据 χ_k 的定义, 显然 W 也是径向无界的正定函数. 利用文献 [14-15] 中的 ISpS 定理, 系统 (1) 以 ω 为输入是输入到状态实际稳定的. \square

注 3 由定理 1 和定理 2 可知, 存在 KL-函数 β_c 和正常数 d_c 使得

$$\begin{aligned} |(z(t), \xi(t), y(t), \dots, \chi_n(t))| &\leq \\ \beta_c(|z(0), y(0), \xi(0), \chi(0)|, t) &+ d_c. \end{aligned}$$

由式 (13)、(14) 和 (24) 可知, $(z(t), x(t), \hat{x}(t))$ 有界.

3 仿真研究

考虑如下非线性系统:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -z(t)^3 + y(t)^2, \\ \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + \frac{x_1 - x_1^3}{1 + x_1^4} + z(t)^3 \omega_1, \\ \dot{x}_2(t) &= u(t) - e^{-x_1^2} \sin(5x_1) + \omega_2, \\ y(t) &= x_1(t). \end{aligned} \quad (67)$$

其中 $\omega_1 = \sin(t)$ 和 $\omega_2 = 1$ 为外部干扰.

根据假设 1 和假设 2, 选取

$$\begin{aligned} V_0 &= z^2, \quad \underline{\alpha}(|z|) = \bar{\alpha}(|z|) = z^2, \quad \alpha_0(|z|) = z^4, \\ \gamma_0(|y|) &= \frac{3 \times 4^{1/3}}{4} |y|^{8/3}, \quad \gamma_1(|\omega|) \equiv 0, \\ \psi_{i1} &= \psi_{22} \equiv 0, \quad \psi_{12}(|z|) = |z|^3, \quad \psi_{i0} = 1, \\ &\quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

选取模糊隶属函数

$$\begin{aligned} \mu_{F_1^l}(x_1) &= \exp\left[-\frac{(x_1 - 3 + l)^2}{16}\right], \\ &\quad l = 1, 2, \dots, 5; \\ \mu_{F_2^l}(x_1) &= \exp\left[-\frac{(x_1 - 3 + l)^2}{4}\right], \\ &\quad l = 1, 2, \dots, 5. \end{aligned}$$

虚拟控制器和模糊控制器的设计参照式 (31) 和 (44), 高增益函数的选取参照式 (20), 其中 $L(y) = 1.5$, 光滑函数 ν_1 满足

$$\nu_1(s) \geq \frac{3 \times 4^{1/3}}{4} s^{1/3} \rho\left(\sqrt{\frac{3 \times 4^{1/3}}{2}} s^{2/3}\right).$$

对于任意 $s \geq 0$, 有 $\rho(s) \geq 16s^4$. 设计参数和初值选取如下:

$$\begin{aligned}
 &k_1 = 2, k_2 = 22, \gamma_1 = \gamma_2 = 0.01, \\
 &\sigma = 0.1, \varepsilon_{10} = \varepsilon_{20} = 0.1, \\
 &\eta = 15, c = 5, \theta_{10} = \theta_{20} = 0, \\
 &x_1(0) = 1.4, x_2(0) = -1.4, \\
 &\hat{x}_1(0) = 0.2, \hat{x}_2(0) = 0, r(0) = 1, z(0) = 0, \\
 &\theta_1(0) = [\theta_{11}(0), \theta_{12}(0), \theta_{13}(0), \theta_{14}(0), \theta_{15}(0)] = \\
 &\quad [-0.4, 0.2, 0, 0.1, 0.3], \\
 &\theta_2(0) = [\theta_{21}(0), \theta_{22}(0), \theta_{23}(0), \theta_{24}(0), \theta_{25}(0)] = \\
 &\quad [0.4, 0.2, 0, -0.1, 0.8].
 \end{aligned}$$

研究参数 a, d, p 的变化对系统的影响如下:

- 情况 1) $d = 20, a = 3, p = 0.5$;
- 情况 2) $d = 20, a = 3, p = 0.9$;
- 情况 3) $d = 20, a = 6, p = 0.9$;

- 情况 4) $d = 20, a = 2, p = 0.9$;
- 情况 5) $d = 22, a = 3, p = 0.9$;
- 情况 6) $d = 18, a = 3, p = 0.9$.

仿真结果如图 1~图 3 所示. 图 1 为系统在选取情况 1) 和情况 2) 参数时系统输出、观测误差和控制输入的轨迹. 由图 1 可见, 当参数 d 和 a 固定时, 参数 p 选取得越小, 观测误差 e_1, e_2 和输出 y 的收敛速度越快. 图 2 为系统在选取情况 3) 和情况 4) 参数时系统输出、观测误差和控制输入的轨迹. 由图 2 可见, 当参数 d 和 p 固定时, 参数 a 选取得越大, 观测误差 e_1, e_2 和输出 y 的收敛速度越快. 图 3 为系统在选取情况 5) 和情况 6) 参数时系统输出、观测误差和控制输入的轨迹. 由图 3 可见, 当参数 a 和 p 固定时, 参数 d 选取得越大, 观测误差 e_1, e_2 和输出 y 的收敛速度越快.

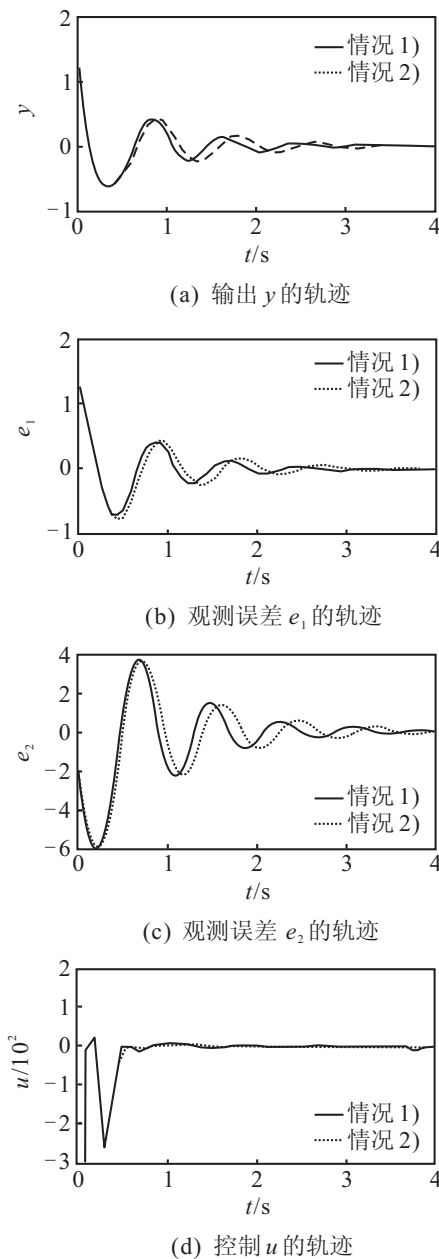


图 1 仿真实验曲线(情况 1)和情况 2))

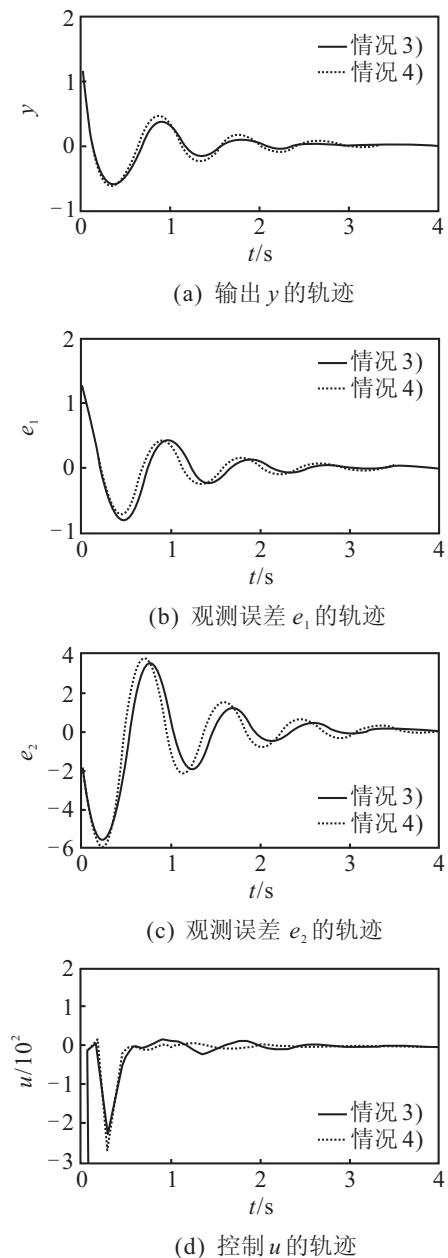


图 2 仿真实验曲线(情况 3)和情况 4))

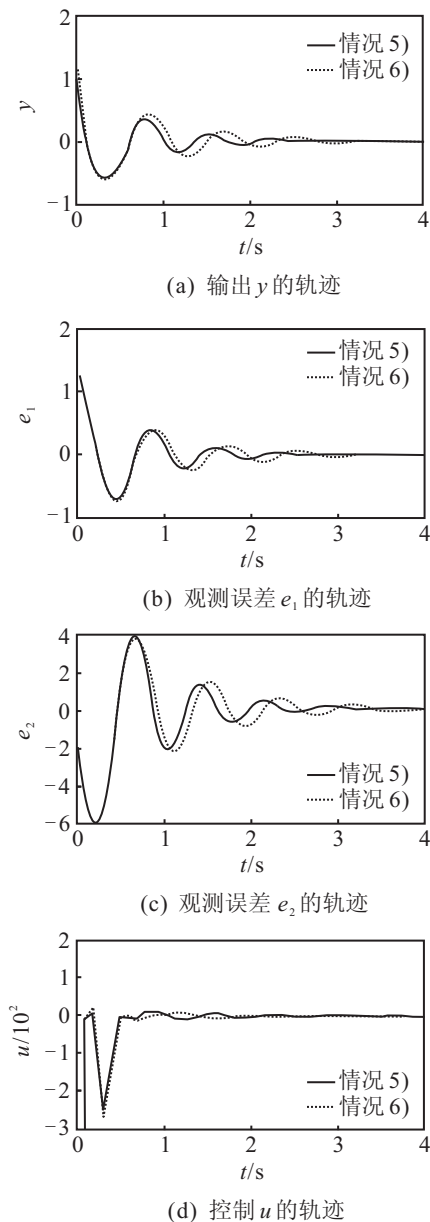


图3 仿真实验曲线(情况5)和情况6)

4 结论

针对SISO不确定非线性系统,基于模糊自适应控制和backstepping方法,给出了输出反馈控制器的设计.通过Lyapunov稳定性、小增益理论和供给函数设计分析,证明了整个闭环系统以干扰为输入的ISpS稳定,在某固定增益的意义上抑制了干扰对输出的影响.最后通过仿真实验表明了所提出方法的有效性.

参考文献(References)

- [1] 宫清先,张化光,孟祥萍.一类非线性多时滞系统的干扰解耦控制[J].控制与决策,2007,22(2):206-210.
(Gong Q X, Zhang H G, Meng X P. Disturbance decoupling control for a class of nonlinear multi-delay systems[J]. Control and Decision, 2007, 22(2): 206-210.)
- [2] Zhan W, Wang L Y. Disturbance attenuation via state feedback for systems with a saturation nonlinearity in the

control channel[J]. Automatica, 1996, 32(6): 929-931.

- [3] Marino R, Respondek W, Schaft Van Der A J. Almost disturbance decoupling for single-input single-output nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1989, 34(9): 1013-1017.
- [4] Chen B, Liu X P, Tong S C. Fuzzy approximate disturbance decoupling of MIMO nonlinear systems by backstepping approach[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2007, 158(10): 1097-1125.
- [5] Wang L X. Adaptive fuzzy systems and control: Design and stability analysis[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1994: 233-237.
- [6] Kristic M, Kanellakopoulos I, Kokotovic P V. Nonlinear and adaptive control design[M]. New York: Wiley, 1995: 29-48.
- [7] Tong S C, He X L, Li Y M. Direct adaptive fuzzy backstepping robust control for single input and single output uncertain nonlinear systems using small-gain approach[J]. Information Sciences, 2010, 180(9): 1738-1758.
- [8] Jiang Z P, Hill D J. A robust adaptive backstepping scheme for nonlinear systems with unmodeled dynamics[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1999, 44 (9): 1705-1711.
- [9] Jiang Z P. Global output feedback control with disturbance attenuation for minimum-phase nonlinear systems[J]. Systems & Control Letters, 2000, 39(3): 155-164.
- [10] Jiang Z P, Repperger Daniel W, Hill D J. Decentralised nonlinear output-feedback stabilization with disturbance attenuation[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2001, 46(10): 1623-1629.
- [11] Lin W, Qian C J, Huang X Q. Disturbance attenuation of a class of nonlinear systems via output feedback[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2003, 13(15): 1359-1369.
- [12] Li C Y, Tong S C, Wang W. Fuzzy adaptive high-gain-based observer backstepping control for SISO nonlinear systems[J]. Information Sciences, 2011, 181(11): 2405-2421.
- [13] Li C Y, Wang W. Fuzzy almost disturbance decoupling for MIMO nonlinear uncertain systems based on high-gain observer[J]. Neurocomputing, 2013, 111: 104-114.
- [14] Jiang Z P, Mareels Iven M Y, Wang Y. A Lyapunov formulation of the nonlinear small-gain theorem for interconnected ISS systems[J]. Automatica, 1996, 32(8): 1211-1215.
- [15] Stontag E D, Teel A. Changing supply functions in input-state stable systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1995, 40(8): 1476-1478.

(责任编辑:郑晓蕾)