

## Dynamic Modeling of Acceleration Sensor Based on Generalized Least Square Method

YANG Zhao-xin, DU Hong-mian\*, FAN Jing-biao, ZU Jing

(National Key Laboratory For Electronic Measurement Technology, North University of China, Taiyuan 030051, China)

**Abstract:** For the important role of mathematical model in data processing of dynamic calibration and combining the experimental data of dynamically calibrating acceleration sensor test system based on the Hopkinson bar, a generalized least square method of dynamic model is introduced. And using Matlab/ Simulink simulation module to simulate and verify the result, the results show that this time domain data-processing method is provided with the characteristics of simplicity and accuracy, it is quite suitable for the establishment of differential equation model in dynamic calibration process.

**Key words:** acceleration sensor; dynamic calibration; generalized least square method; Matlab/ Simulink  
EEACC: 7230; 7320E

## 基于广义最小二乘法加速度传感器的动态建模

杨兆欣, 杜红棉\*, 范锦彪, 祖静

(中北大学电子测试技术国家重点实验室, 太原 030051)

**摘要:** 针对数学模型在动态校准实验数据处理中的重要地位, 结合 Hopkinson 杆对加速度传感器测试系统动态校准所得实验数据, 介绍了一种基于广义最小二乘法的动态数学模型建立方法。并利用 Matlab/ Simulink 模块进行了仿真验证, 由仿真结果表明该时间域数据处理方法具有简洁性、准确性的特点, 特别适合于动态校准中建立差分方程模型。

**关键词:** 加速度传感器; 动态校准; 广义最小二乘法; Matlab/ Simulink

中图分类号: TM938.82

文献标识码: A

文章编号: 1004-1699(2009)02-0195-04

加速度传感器作为一类重要的传感器, 被广泛地应用于航空航天、交通运输、建筑及机器人等领域。加速度传感器性能包括静态和动态两个方面。目前国内外对其静态特性研究已较为深入和全面, 但其针对瞬态过程参数测量的动态测试研究尚不成熟。而测试系统动态测量的核心问题是研究测试系统的动态特性和改进动态特性的方法。所以, 对加速度传感器动态性能的研究就显得非常重要。

加速度传感器数学模型是描述传感器输入、输出以及结构参数之间的动态关系的一个或一组方程式。它包含那些决定系统本质属性的重要因素, 可以反映各主要因素之间的逻辑关系和数学关系<sup>[1]</sup>。基于动态数学模型可以设计和研制模拟电路网络或数字运算环节去提高响应的快速性, 修正动态误差, 实现动态解耦等<sup>[2]</sup>。神经网络的出现为建模技

术带来了新的思想, 近几年神经网络(neural network, NN) 被用于建模中并取得了一定的研究成果。但在对于加速度传感器动态建模时神经网络全局搜索能力差、收敛速度慢, 结果易陷入局部极值, 单独使用神经网络效果不是很理想; 而传统的建模方法存在模型阶次计算量大、阶次高、病态严重等问题。本文采用一种特殊白化滤波器的广义最小二乘法<sup>[3]</sup>, 能够避免因方程组病态严重所引起的数值病态问题从而提高了解的精度, 且较易实现递推算法, 适合参数化系统模型辨识的场合, 可用于动态、静态、线性、非线性系统。

文章从实验研究入手基于 Matlab/ Simulink 建立以加速度传感器为主的测试系统动态数学模型与模型仿真框架, 实现模型框架的可重复使用性, 为今后的控制设计与仿真研究奠定基础。此外, 在模型

基金项目: 武器装备预研基金项目“高冲击加速度传感器动态特性研究”资助

收稿日期: 2008-09-08 修改日期: 2008-11-05

框架的基础上,利用 Matlab 中的非线性控制设计模块<sup>[4]</sup>,可以实现参数的优化设计及仿真。

### 1 辨识理论

#### 1.1 线性差分方程模型

单输入单输出线性定常系统得差分方程模型<sup>[5]</sup>:

$$A(d^{-1})y(k) = B(d^{-1})u(k) \tag{1}$$

其带噪声的观测方程可写为:

$$A(d^{-1})z(k) = B(d^{-1})u(k) + e(k) \tag{2}$$

式中:

$u(k)$  ——系统输入观测量;

$z(k)$  ——系统输出观测量;

$e(k)$  ——残差;

$$A(d^{-1}) = 1 + a_1 d^{-1} + a_2 d^{-2} + \dots + a_n d^{-n} \tag{3}$$

$$B(d^{-1}) = b_0 + b_1 d^{-1} + b_2 d^{-2} + \dots + b_n d^{-n} \tag{4}$$

式中:

$d^{-1}$  ——后移位算符;

$n$  ——模型阶次

要求根据给定的观测序列 $\{u(k)\}, \{z(k)\} (k = 1, 2, \dots, N_0)$  确定模型的阶次  $n$ , 并求出该阶模型参数的最小二乘估计。在输入测量噪声可忽略的情况下,假设输出端的干扰是一零均值白噪声,如图 1 所示。则有

$$\frac{1}{A(d^{-1})} e(k) = e(k) \tag{5}$$

通过由输入输出信号构成的信息矩阵  $D$ ,

$$D = \begin{bmatrix} u(1) & -z(1) & u(2) & -z(2) & \dots & u(v+1) & -z(v+1) \\ u(2) & -z(2) & u(3) & -z(3) & \dots & u(v+2) & -z(v+2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u(N) & -z(N) & u(N+1) & -z(N+1) & \dots & u(v+N) & -z(v+N) \end{bmatrix}$$

运用镜像映射法对  $D$  阵进行三角化,即对  $D$  左乘正交变换阵  $H$ ,使得  $D^* = HD = \begin{bmatrix} R \\ \dots \\ O \end{bmatrix}$ ,  $R$  为  $M$  阶上三角阵

$$R = \begin{bmatrix} d_1 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & d_2 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & d_3 & \times & \times \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \times \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_M \end{bmatrix}, \text{化为分块矩阵,则 } R = \begin{bmatrix} R_n & -z_n & C_1 \\ O & g_n & C_2 \\ O & O & C_3 \end{bmatrix}, \text{令 } J = [ (n)^T \quad 1 \quad O ]^T, \text{并定义指标}$$

函数为:  $J(n) = e^T e$ , 则当  $(n)$  为最小二乘估计时,  $J(n)$  为最小。 $J(n) = e^T e = \left\| \begin{bmatrix} R_n & -z_n & C_1 \\ O & g_n & C_2 \\ O & O & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (n) \\ 1 \\ O \end{bmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} R_n(n) - z_n \\ g_n \\ O \end{bmatrix} \right\|_2 = [R_n(n) - z(n)]^T [R_n(n) - z(n)] + g_n^T g_n$  显然,当

$R_n(n) = z_n$  时,  $J(n)$  为最小。求出参数的最小二乘估计  $\hat{a}_{LS}, \hat{b}_{LS}$ , 作为迭代运算的初值,即令  $\hat{a}_{LS} = \hat{a}^{(1)}$

设迭代第  $l$  次时,求得:

$$\hat{a}^{(l)} = [\hat{a}_1^{(l)} \quad \hat{a}_2^{(l)} \quad \dots \quad \hat{a}_n^{(l)}]^T, \hat{b}^{(l)} = [\hat{b}_0^{(l)} \quad \hat{b}_1^{(l)} \quad \dots \quad \hat{b}_n^{(l)}]^T$$

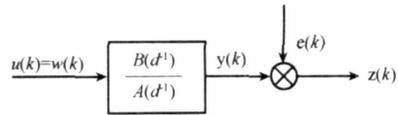


图 1 输出端干扰为白噪声时的系统方块图

由此白化滤波器为:

$$c(d^{-1}) = 1/A(d^{-1}) \tag{6}$$

采用这种白化滤波器时无需估计白化滤波器的参数  $c_i$  和阶次  $p$ 。这样即使算法大为简化,又避免了由于白化滤波器阶次的估计不当带来的误差,从而提高了计算的精度。

#### 1.2 动态校准建模步骤

在动态校准实验数据处理中,最重要的一步是建立全面描述被校传感器的动态数学模型。系统的静、动态性能指标,应该从它的数学模型中计算才比较合理<sup>[6]</sup>。

具体计算步骤如下:

由实验观测数据  $u(k), z(k)$ , (其中  $u(k)$  为系统输入观测量;  $z(k)$  为系统输出观测量) 采用“能同时辨识线性差分方程模型阶次和参数的方法”,要求根据给定的观测序列,确定模型的阶次  $n$ , 并求出该模型参数的最小二乘估计。假定  $n \leq v$ , 并定义:

$$(n) = [b_n a_n b_{n-1} a_{n-1} \dots b_1 a_1 b_0];$$

$$e = [ (n+1) \quad (n+2) \quad \dots \quad (n+N) ]; N = N_0 - v$$

由此可计算

$$\hat{z}^{(l)}(k) = z(k)/A^{(l)}(d^{-1}), \hat{u}^{(l)}(k) = u(k)/A^{(l)}(d^{-1})$$

$$\text{即 } \hat{z}^{(l)}(k) = -\hat{\alpha}^{(l)}\hat{z}^{(l)}(k-1) - \dots - \hat{\alpha}_n^{(l)}\hat{z}^{(l)}(k-n) + z(k)$$

$$\hat{u}^{(l)}(k) = -\hat{\alpha}^{(l)}\hat{u}^{(l)}(k-1) - \dots - \hat{\alpha}_n^{(l)}\hat{u}^{(l)}(k-n) + u(k) \quad (k = 0, 1, \dots, N_0)$$

由  $\{\hat{u}^{(l)}(k), \hat{z}^{(l)}(k), k = 0, 1, \dots, N_0\}$  序列, 对下式作最小二乘估计:

$$A(d^{-1})\hat{z}^{(l)}(k) = B(d^{-1})\hat{u}^{(l)}(k) + e(k)$$

求得参数  $\hat{\alpha}^{(l+1)}$  与  $\hat{b}^{(l+1)}$ 。

令  $l = l + 1$ , 回到第二步, 直至迭代收敛或达到最大迭代次数为止。

## 2 动态校准过程

### 2.1 加速度传感器的动态校准

实验所用的冲击装置如图 2 所示, 主要由霍普金森杆、数字示波器和计算机系统组成。

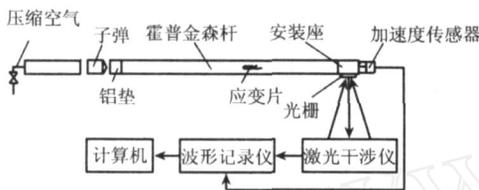


图 2 霍普金森杆冲击校准系统

端部具有一定锥度的弹体在 (0.05 ~ 0.8 MPa) 压缩空气推动下垂直撞击铝垫, 撞击使霍普金森杆中产生一右行半正弦压应力脉冲。被校加速度计通过螺栓固联在安装座端面, 安装座表面轴线方向贴有反射光栅, 另一端面通过真空夹具紧密吸合于霍普金森杆末端<sup>[7]</sup>。当压应力脉冲在安装座自由端反

$$G(s) = \frac{0.03565s^3 + 2.12441 \times 10^4 s^2 + 9.19022 \times 10^{11} s + 2.33708 \times 10^{17}}{1.53338s^3 + 1.22764 \times 10^7 s^2 + 1.17386 \times 10^{12} s + 2.79482 \times 10^{17}} \quad (10)$$

利用 Matlab/ Simulink 对该系统进行建模和仿真, 由于篇幅有限, 在这里就没有给出所有子模块的内部封装图, 而只是给出了总的系统仿真模型, 如图 3 所示。其中主要包括: 输入源子模块 (From

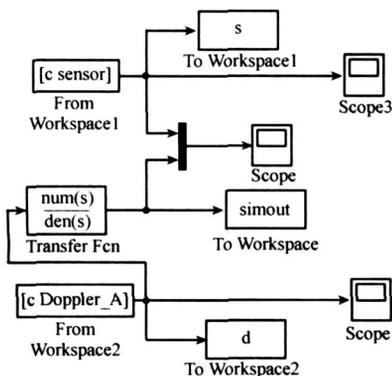


图 3 压电式加速度传感器建模仿真图

射为拉伸脉冲, 并当入射压力脉冲与反射拉伸脉冲叠加后在霍普金森杆与安装座衔接面处出现净拉力时, 安装座和被校加速度计将带着陷入其中的动量飞离, 加速度计获得加速运动。

采用差动式激光多普勒测速仪可以精确测出加速度激励的绝对量值和真实波形, 传感器座带着固定在其表面的光栅飞离霍普金森杆时, 衍射光将产生多普勒频移, 频移量  $f(t)$  与光栅运动速度  $v(t)$  成简单的线性关系<sup>[8]</sup>

$$v(t) = \frac{f(t)}{2 \sin \theta} \quad (7)$$

其中,  $\lambda$  为入射光波长,  $\theta$  为入射角。

采用光栅, 光栅的衍射公式如下<sup>[9]</sup>:

$$d \sin \theta = (m - n) \lambda \quad (8)$$

其中,  $d$  为光栅常数,  $m, n$  为光栅衍射级数。对速度  $v(t)$  进行一次微分即可获得激励加速度  $a(t)$ 。

### 2.2 加速度传感器的动态系统的建模与仿真

这里对丹麦 B & K 公司的 4367 压电式加速度传感器进行动态校准实验, 获得实验数据。由这组实验数据便可建立差分方程 (3 阶模型):

$$y(t) - 1.29251y(k-1) - 0.21584y(k-2) + 0.54329y(k-3) = 0.03815x(k) + 0.02498x(k-1) - 0.00573x(k-2) - 0.02819x(k-3) \quad (9)$$

由差分方程转化为连续的传递函数采用双线性变换, 这种变换要求采样频率较高, 否则变换误差较大。在本文中采样频率为 1 MHz 满足精度要求, 予以采用。

传递函数为:

Workplace)、传递函数子模块 (Transfer-fan)、接收器子模块 (To Workplace)。仿真算法采用二/三阶龙格-库塔算法<sup>[10]</sup>。其中传递函数模块 (Transfer Fcn) 中各个参数为式 (10) 各阶系数, 通过仿真研究, 得到系统的时域仿真波形, 最终结果在显示器模块 (Scope) 中显示, 如图 4 所示。图 4 中曲线 1 为

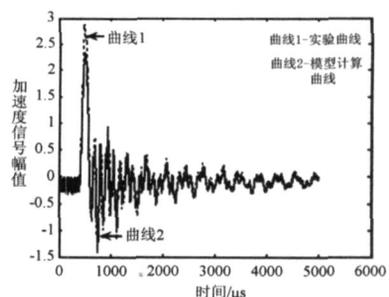


图 4 压电式加速度传感器冲击响应

实验曲线,曲线2为模型计算曲线。

由图4可以看出实验曲线和模型计算曲线相当吻合,说明用上述3阶模型描述该加速度传感器的动态性能是合适的。

实验FFT频率特性曲线如图5所示,模型计算的特性曲线图6所示。

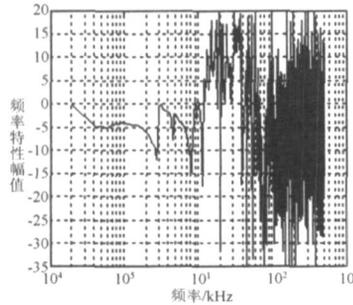


图5 压电式加速度传感器对数频率特性曲线(实验FFT计算)

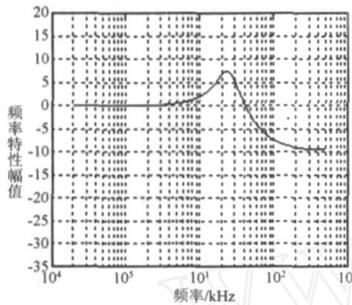


图6 压电式加速度传感器对数频率特性曲线(模型FFT计算)

由图5和图6中可以看出由被校准系统输入和输出信号的离散采样值,用快速傅立叶变换(FFT)算法计算的系统频率特性和用时间域建模方法建立的动态数学模型计算的频率特性有较大差别。由实验数据用FFT算法计算的系统频率特性曲线不光滑和不规则,而模型计算的频率特性曲线比较光滑而有规则。这些差别从许多计算结果可以明显地看出是由测量噪声造成的。因为被校准系统的输入输出信号的离散采样值是带有测量噪声的,所以,用FFT算法计算的系统频率特性曲线也是带有测量噪声的,这些噪声使曲线变得不光滑和不规则。而时间域建模方法却能消除或减弱测量噪声的影响,所以,用模型计算的频率特性曲线比较光滑而有规则,这是符合实际系统的真实性能的。基于上述原因采用图6的频率特性曲线进行动态性能指标分析。

### 2.3 加速度传感器的动态性能指标

频域的动态性能指标中最常见的是通频带 $b$ (或在幅频特性曲线上衰减3dB)。对于仪表与传感器较实用的是工作频带 $g$ ,即幅值误差为 $\pm 5\%$ 或 $\pm 10\%$ (或其他规定,例如对较高的为 $1\%$ 或 $2\%$ 等)的两种工作频带 $w_{g_1}$ 或 $w_{g_2}$ <sup>[11]</sup>。

由图6的频率特性曲线可求出压电式压力传感器的频域动态性能指标为:幅值误差为 $\pm 10\%$ 的工

作频带为 $g_1 = 6.387$  kHz,幅值误差为 $\pm 5\%$ 的工作频带为 $g_2 = 4.39$  kHz,谐振频率为 $x = 23.15$  kHz,谐振峰值为 $A_m = 7.457$ 。

## 3 结束语

本文基于Matlab/Simulink运用特殊白化滤波器的广义最小二乘法,结合Hopkinson杆加速度传感器的动态校准的具体问题,建立了以传感器为主的测试系统的动态模型,实现了加速度传感器系统模型框架,仿真结果表明:Matlab/Simulink对于复杂的传感器系统来说是一种很好的仿真工具。并且通过仿真波形的分析也验证了特殊白化滤波器的广义最小二乘法,可以大大简化建模过程,同时具有较好的收敛性,适合于动态校准实验数据处理中建立差分方程模型。

### 参考文献:

- [1] 黄俊钦. 测试系统动力学[M]. 北京:国防工业出版社,1996.
- [2] 俞阿龙. 基于遗传神经网络的加速度传感器动态建模方法[J]. 仪器仪表学报,2006,27(3):315.
- [3] Slotine JJE, Li W. Applied Nonlinear Control[M]. Englewood Cliffs, USA: Prentice-Hall, 1991.
- [4] 魏巍. MATLAB控制工具箱技术手册[M]. 北京:国防工业出版社,2004.
- [5] 黄俊钦. 测试系统动力学[M]. 北京:国防工业出版社,1996.
- [6] 张爱萍,张志杰. 压力传感器的动态校准与性能改进[J]. 华北工学院学报,1998,19(1):8-9.
- [7] Link Alfred, von Martens Hans-Jurgen. Accelerometer Identification Using Shock Excitation[J]. Measurement, 2004, (35):191-199.
- [8] 岳临萍,孙德宏,丛荣葵,靳兆录,刁鲁南,李刚. 多普勒激光测量仪原理简析及应用[J]. 应用天地,2007,26(12):65.
- [9] 梁志国,李新良,孙宇,连大鸿. 激光干涉法一次冲击加速度计动态特性校准[J]. 测试技术学报,2004,18(2):134-135.
- [10] 唐良宝,包居敏. 基于MATLAB的水轮机调节系统仿真分析[J]. 仿真技术,2007,23(7):255.
- [11] 黄俊钦,顾健雄. 高g值加速度计和压力式力传感器的动态校准[J]. 计量学报,2001,22(4):303.



杨兆欣(1982-),男,山西太谷人,中北大学硕士研究生,专业为测试计量技术及仪器,研究方向为加速度传感器动态建模与修正,tutu198210@sina.com



杜红棉(1977-),女,辽宁省锦州市人,中北大学副教授,研究方向为虚拟测试,duhongmian@nuc.edu.cn