

LQG Controller Designing Method for Actuator Based on Miniature Encoder*

LI Lin^{1,2}, LI Ming^{1,2}, AI Hua^{1*}

(1. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China;
2. Graduate School of the Chinese Academy of Science, Beijing 100039, China)

Abstract: A Linear-Quadratic-Gaussian (LQG) controller design method of servo motor control system based on micro-encoder was proposed to satisfy the requirement of high-precision and limited volume in the aerospace field. The actual motor system structure and the typical error of the encoder were analyzed, and the state equation of system was established with noises. A stationary Kalman filter was designed which can achieve the optimal estimation of angular position, angular rate and angular acceleration. LQG controller was designed based on the general indicates, the simulation model was established in the Matlab/Simulink environment, and control effects were predicted. Simulating the actual work environment, an experimental test system was built, and its tracking performance was tested and evaluated. Simulation and experimental results showed that linear quadratic Gaussian controller with Kalman filter based on micro-encoder has a good tracking performance and a bandwidth up to 24 Hz, and is also able to effectively suppress noise.

Key words: Linear-Quadratic-Gaussian control; stationary Kalman filter; miniature encoder

EEACC: 6120B

基于微型编码器的电机 LQG 控制器设计方法*

李琳^{1,2}, 厉明^{1,2}, 艾华^{1*}

(1. 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 长春 130033;
2. 中国科学院研究生院, 北京 100039)

摘要: 针对航空航天领域对电机伺服控制系统高精度和小体积的需求, 提出并实现了一种基于微型编码器的电机伺服跟踪系统线性二次高斯控制器设计方法。分析了实际电机系统结构和编码器的典型误差并建立系统的噪声状态方程; 设计了平稳卡尔曼滤波器, 可以实现角位置、角速率和角加速度的最优估计; 根据总体指标完成了线性二次高斯控制器设计并在 Matlab/Simulink 环境下建立了仿真模型并对其控制效果进行了预测; 模拟实际工作环境搭建了实验测试系统对其跟踪性能进行了实测评估。仿真和实验结果表明: 结合卡尔曼滤波的电机线性二次高斯控制器不但具有良好的跟踪性能, 带宽可达 24 Hz, 还能够有效地抑制噪声影响。

关键词: 线性二次高斯控制器; 平稳卡尔曼滤波; 微型编码器

中图分类号: TH212

文献标识码: A

文章编号: 1004-1699(2010)06-0834-06

航空航天领域不但要求系统具有高精度和高可靠性, 而且对重量和体积有严格的限制, 在轻量化和小型化的前提下传感器的选择往往受限, 需要对信号进行滤波处理已满足精度的要求。编码器具有精度高、抗干扰能力强等一系列优点, 目前已经广泛应用于电机伺服控制领域^[1], 小型编码器的分辨力很难无限提高, 直接用编码器的角位置差分获取角速率会因差分对噪声的放大作用而不能满足实际应用需求。

为了满足航空航天领域对电机伺服跟踪系统高

精度和小体积的需求, 本文提出并实现了一种基于微型编码器的电机线性二次高斯控制器设计方法。我们将首先分析实际电机系统结构和编码器的典型误差并建立系统的噪声状态方程, 在此基础上将设计卡尔曼滤波器以得到系统状态的线性二次最优估计并根据总体对电机伺服跟踪系统的指标要求完成线性二次高斯控制器设计, 最后在 Matlab/Simulink 环境下建立仿真模型对其控制效果进行了预测并通过实验系统对线性二次高斯控制器的性能进行实测评估。

项目来源: 吉林省科技厅自然科学基金项目资助(20030534)

收稿日期: 2009-12-16 **修改日期:** 2010-02-06

1 系统模型

卡尔曼滤波和线性二次高斯控制都是以现代控制理论为基础,需要建立系统的状态空间方程模型。电机系统^[2]框图如图1所示,其中 U 为电机输入电压, i 为电机电流, ω 为电机转速, θ 为电机角位置, y 为系统的角位置输出, L 为电感且 $L=0.00031$, R 为电阻且 $R=3.65$, K_m 为力矩常数且 $K_m=0.0243$, J 为转动惯量且 $J=1.27943 \times 10^{-6}$, K_e 为反电动势常数且 $K_e=0.0243$, K_p 为减速比且 $K_p=139.5$ 。

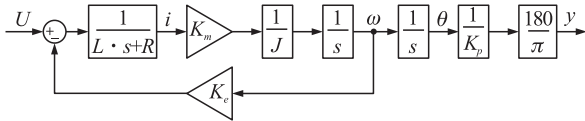


图1 电机系统模型框图

选取电机电流 i 、电机转速 ω 、电机角位置 θ 作为状态向量,即 $\mathbf{x}=[i, \omega, \theta]$,可以建立系统的连续状态空间模型:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_c \mathbf{x} + \mathbf{B}_c \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_c \mathbf{x}$$

其中

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -11774.1 & -78.3 & 0 \\ 18992.8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 3225.8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_c = [0 \quad 0 \quad 0.4]$$

根据编码器的带宽和实际控制系统的采样时间,我们使用 0.001 s 对连续模型离散化,于是可得系统的离散状态空间模型:

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{A}_d \mathbf{x}[n] + \mathbf{B}_d \mathbf{u}[n]$$

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}_d \mathbf{x}[n]$$

其中

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} -0.00975 & -0.00598 & 0 \\ 1.45101 & 0.88976 & 0 \\ 0.00141 & 0.00094 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0.24644 \\ 4.53636 \\ 0.00213 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_d = [0 \quad 0 \quad 0.41072]$$

电机伺服控制系统中应用编码器作为角位置传感器,虽然编码器在角位置测量中可以达到很高的精度,但其中还是不可避免的包含很多误差。考虑编码器噪声和系统输入噪声时,系统的离散状态空间模型为:

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{A}_d \mathbf{x}[n] + \mathbf{B}_d \mathbf{u}[n] + \mathbf{G}_d \mathbf{w}[n]$$

$$\mathbf{y}_v[n] = \mathbf{C}_d \mathbf{x}[n] + \mathbf{v}[n]$$

其中

$$\mathbf{G}_d = \mathbf{B}_d$$

我们将通过实验手段模拟实际编码器的工作环

境以确定编码器输出中噪声的统计特性并建立其数学模型^[3-5]。实验中所采用的编码器码盘刻划为12500线,经电子学细分后分辨力为 0.0072° ,输出信号频率为 1 kHz 。假定编码器处于零位,常值和正弦角速率输入时,分别测量编码器的输出角位置并利用差分法处理得到角速率,角位置、角速率及其误差如图2所示。对样本进行统计处理可得:编码器输出的角位置噪声近似满足高斯白噪声规律,噪声标准差为 0.0137° ,差分法得到的角速率噪声标准差为 $7.31/\text{s}$ 。

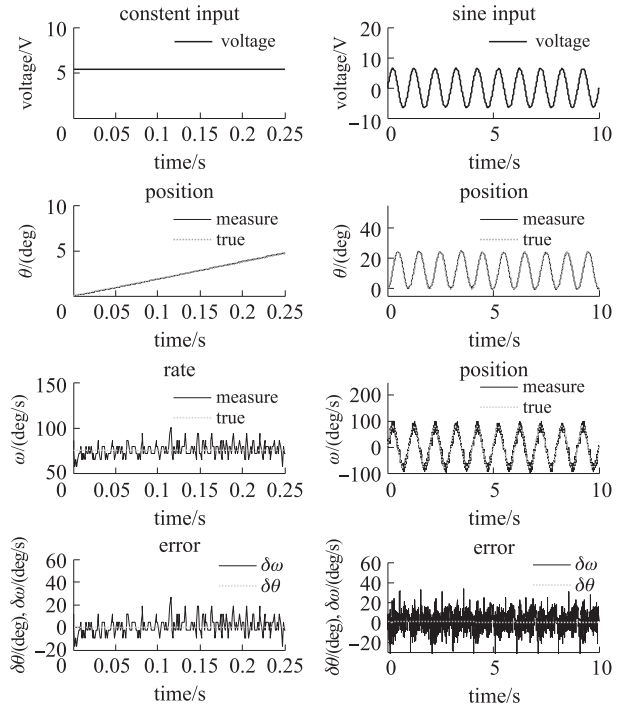


图2 角位置、角速率及其误差曲线

2 卡尔曼滤波

传统的编码器角速率处理方法得到的角速率因差分对噪声的放大作用而无法满足系统的角速率精度要求。我们将设计卡尔曼滤波器以得到系统状态的线性二次最优估计,同时也将作为线性二次高斯控制的反馈。

卡尔曼滤波将最小条件方差 $E((\mathbf{x}[n] - \hat{\mathbf{x}}[n]) \times (\mathbf{x}[n] - \hat{\mathbf{x}}[n])^T)$ 的值可作为判据,去建立最佳估计 $\hat{\mathbf{x}}[n]$ ^[6-7]。传统的卡尔曼滤波是按照时间更新和测量更新的顺序循环计算已实现对系统状态的最优估计^[8-9],由于循环过程中要进行矩阵逆运算和滤波增益更新,计算量往往很大,而且由于数字计算机有限字长的舍入误差等因素的影响,可能会造成系统不稳定^[10-11]。实际处理过程可以忽略卡尔曼滤波的动态过程,认为系统可以很快地进入稳态,直接利用稳态卡尔曼增益计算^[12],此时的离散卡尔曼

滤波方程为:

$$\hat{\mathbf{x}}[n+1|n] = \mathbf{A}_d \hat{\mathbf{x}}[n|n-1] + \mathbf{B}_d \mathbf{u}[n] + \mathbf{L}(\mathbf{y}_v[n] - \mathbf{C}_d \hat{\mathbf{x}}[n|n-1]) \quad (\text{a})$$

$$\hat{\mathbf{x}}[n|n] = \hat{\mathbf{x}}[n|n-1] + \mathbf{M}(\mathbf{y}_v[n] - \mathbf{C}_d \hat{\mathbf{x}}[n|n-1]) \quad (\text{b})$$

$$\hat{\mathbf{y}}[n|n] = \mathbf{C}_d \hat{\mathbf{x}}[n|n] \quad (\text{c})$$

其中式(a)为状态更新方程,完成下一时刻系统状态的估计,式(b)为状态修正方程,利用传感器测量值完成当前系统状态的估计式,式(c)为输出修正方程,利用状态和输入值完成当前系统输出的估计。 \mathbf{L} 为状态更新卡尔曼滤波增益矩阵, \mathbf{M} 为状态修正卡尔曼滤波增益矩阵, \mathbf{L} 、 \mathbf{M} 可以利用 Matlab 函数 Kalman 求解。

为了方便卡尔曼滤波系统的实现,我们将卡尔曼滤波方程(a)、(b)、(c)改写为状态空间模型的形式。选取原系统输入 $\mathbf{u}[n]$ 和传感器测量值 $\mathbf{y}_v[n]$ 作为卡尔曼滤波系统输入 $\mathbf{u}_k[n]$,将当前系统输出估计值 $\hat{\mathbf{y}}[n|n]$ 和当前系统状态估计值 $\hat{\mathbf{x}}[n|n]$ 作为卡尔曼滤波系统输出 $\mathbf{y}_k[n]$,卡尔曼滤波系统的状态向量与原系统一致。为了减小建模误差的影响,我们将引入人为噪声,使用于设计卡尔曼滤波器的噪声协方差大于真实值,于是卡尔曼滤波系统的状态空间模型为:

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{A}_k \mathbf{x}[n] + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k[n]$$

$$\mathbf{y}_k[n] = \mathbf{C}_k \mathbf{x}[n] + \mathbf{D}_k \mathbf{u}_k[n]$$

其中

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_d - \mathbf{L}\mathbf{C}_d = \begin{bmatrix} -0.00975 & -0.00598 & 0.00007 \\ 1.45101 & 0.88976 & -0.01049 \\ 0.00141 & 0.00094 & 0.99511 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_k = [\mathbf{B}_d \quad \mathbf{L}] = \begin{bmatrix} 0.24644 & -0.00017 \\ 4.53636 & 0.02555 \\ 0.00213 & 0.01189 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_d(\mathbf{I} - \mathbf{M}\mathbf{C}_d) \\ \mathbf{I} - \mathbf{M}\mathbf{C}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.40872 \\ 1 & 0 & 0.00007 \\ 0 & 1 & -0.01191 \\ 0 & 0 & 0.99512 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C}_d \mathbf{M} \\ 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.00487 \\ 0 & -0.00017 \\ 0 & 0.029 \\ 0 & 0.01186 \end{bmatrix}$$

3 线性二次高斯控制

总体指标要求电机系统应具备对输入角位置指令快速跟踪的能力,带宽不低于 20 Hz,同时能够有效地消除各种噪声的影响,保证系统稳定。根据分

离定理或确定性等价原理,线性二次高斯控制可以与卡尔曼滤波相结合,利用卡尔曼滤波器对系统状态的估计值作为反馈,完成基于最优控制理论的控制设计。

最优控制是现代控制理论的核心,其设计问题是由系统方程、性能准则和允许控制律决定的,根据已建立的被控对象数学模型,选择一个容许的控制律,使得控制对象按预定要求运行,并使预期的某一性能指标达到极小值或极大值。

线性二次高斯控制是基于状态空间技术的最优动态控制器,系统模型以状态空间形式给出,其目标是对象状态和控制输入的二次型函数^[13-15]。以电机系统离散状态空间模型为对象,我们用的设计准则是一种对状态和控制信号的幅值进行加权的方法,定义损失函数为:

$$J(u) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{x}^T[n] \mathbf{Q} \mathbf{x}[n] + \mathbf{u}^T[n] \mathbf{R} \mathbf{u}[n] + 2\mathbf{x}^T[n] \mathbf{N} \mathbf{u}[n])$$

最优控制问题就是寻求使损失函数 J 最小的允许控制信号。对于系统状态全部可用的情况,最优控制策略为:

$$\mathbf{u}[n] = -\mathbf{K}[n] \mathbf{x}[n]$$

其中

$$\mathbf{K}[n] = (\mathbf{R} + \mathbf{B}_d \mathbf{S}(n+1) \mathbf{B}_d)^{-1} (\mathbf{B}_d \mathbf{S}(n+1) \mathbf{A}_d + \mathbf{N}^T)$$

$$\mathbf{S}[n] = \mathbf{A}_d \mathbf{S}(n+1) \mathbf{A}_d + \mathbf{Q} - (\mathbf{A}_d \mathbf{S}(n+1) \mathbf{B}_d + \mathbf{N})$$

$$(\mathbf{B}_d \mathbf{S}(n+1) \mathbf{B}_d + \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{B}_d \mathbf{S}(n+1) \mathbf{A}_d + \mathbf{N}^T)$$

对于系统状态不完全可用的情况,根据分离定理,可以得到完全类似的结论,最优控制策略为:

$$\mathbf{u}[n] = -\mathbf{K}[n] \hat{\mathbf{x}}[n|n-1]$$

其中 $\hat{\mathbf{x}}[n|n-1]$ 为卡尔曼滤波估计值。

对时不变过程和损失函数来说通常只用平稳控制器,对黎卡提方程作迭代至得到一个常数 S 时 K 就变成恒定控制器。结合卡尔曼滤波的线性二次高斯控制的系统框图如图 3 所示。

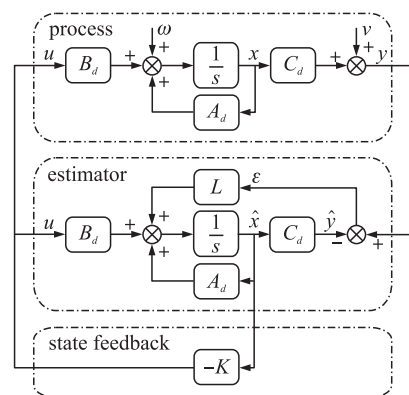


图3 结合卡尔曼滤波的LQG系统框图

标准 LQG 控制主要应用于噪声抑制, 使系统输出趋于零, LQG 同样可以应用于伺服跟踪系统, 通过状态扩展, 增加误差信号 $e = y - r$ 作为状态变量, 使误差信号的积分值趋于零可以达到信号跟踪的目的。伺服跟踪 LQG 控制系统结构框图如图 4 所示, 其中 \hat{y} 和 \hat{x} 分别为卡尔曼滤波对编码器测量值 y_r 和当前系统状态 $x = [i, \omega, \theta]$ 的估计值, e 为误差信号。

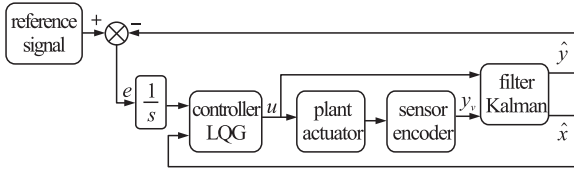


图 4 伺服跟踪 LQG 控制系统结构框图

电机伺服系统主要实现参考角位置信号的稳定快速跟踪, 选取卡尔曼滤波对编码器测量值 y_r 的估计值 \hat{y} 与参考角位置信号的偏差 e 为扩展状态变量, 扩展后的电机系统模型为:

$$x[n+1] = A_{aug}x[n] + B_{aug}u[n] + G_{aug}\omega[n]$$

$$y_r[n] = C_{aug}x[n] + v[n]$$

其中

$$A_{aug} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.41 \\ 0 & -11774.1 & -78.3 & 0 \\ 0 & 18992.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{aug} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3225.8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{aug} = [0 \ 0 \ 0 \ 0.4]$$

$$G_{aug} = B_{aug}$$

当采用最优化理论时, 理论上讲损失函数应有物理依据, 但在许多情况下确定损失函数是困难的, 此时允许设计者选择损失函数, 求解黎卡提方程可以得到控制律, 通过分析闭环系统的瞬态响应、频率响应及鲁棒性等系统指标修正损失函数中的元素, 直到获得满足要求的结果。平稳控制器的求解可以利用 Matlab 的函数 lqr 实现, 对应的 LQG 控制器增益矩阵为 $K = [-31623, 0.4028, 0.1786, 72.5972]$ 。

4 仿真与实验

对于设计完成的卡尔曼滤波器和线性二次高斯控制器, 在硬件实验前, 我们将通过仿真对其滤波与控制效果进行预测。在 Matlab/Simulink 环境下搭建仿真系统, 利用 C 语言 S-Function 完成电机模型,

编码器模型和卡尔曼滤波模型的描述, 利用 white noise 模块实现编码器高斯白噪声的模拟。Simulink 仿真框图如图 5 所示, 其中 LQG 为线性二次高斯控制器模型, 产生电机控制电压; actuator 为电机系统模型, 可以根据输入电压仿真输出电机角位置、角速度和驱动电流; encoder 为编码器模型, 可以模拟考虑测量噪声情况下编码器输出; Kalman filter 为卡尔曼滤波模型, 利用电机输入电压和编码器测量值得到传感器输出和系统状态的最优估计值。

我们将在常值和正弦信号输入, 考虑传感器噪声和系统噪声情况下, 对卡尔曼滤波器和线性二次高斯控制器的效果进行预测。假定系统模型能够足够准确的描述实际系统, 并将不考虑传感器噪声和系统噪声时的系统输出作为真值, 卡尔曼滤波和线性二次高斯控制仿真曲线如图 6 所示。

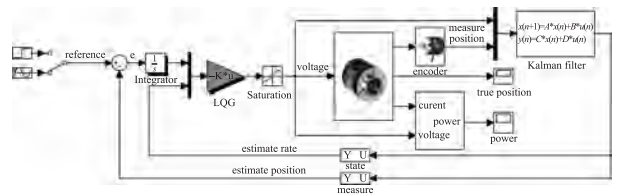


图 5 LQG 和卡尔曼滤波 Simulink 仿真框图

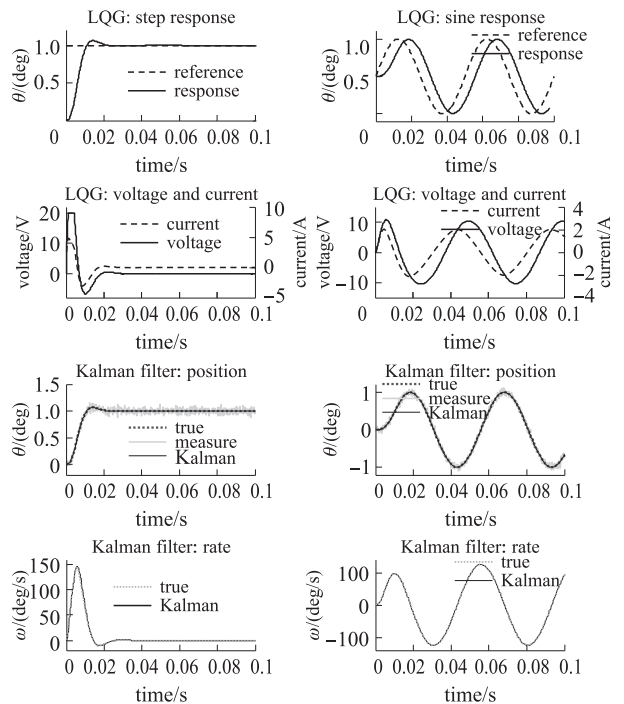


图 6 LQG 和卡尔曼滤波 Simulink 仿真曲线

由于系统模型可能与实际系统存在差异, 以及噪声特性描述不准确的影响, 我们需要进一步通过实验测试系统验证卡尔曼滤波器和线性二次高斯控制器的性能, 实验曲线如图 7 所示。

与仿真结果相比, 实验中的阶跃响应超调量减

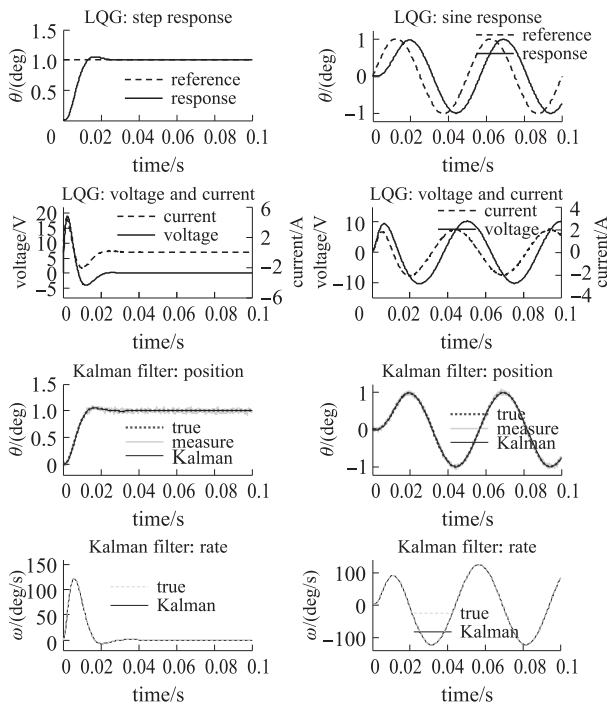


图7 LQG和卡尔曼滤波实验曲线

小1.2%，电机控制输入电压未饱和，角速率峰值减小14%，正弦响应相位滞后增大5%。差异的原因主要为控制器设计的过程中对实际的电机系统进行了必要的简化，没有考虑间隙和摩擦的影响。

实验结果表明：线性二次高斯控制器具有良好的动态性能，上升时间为7.8 ms，超调量为5.4%，带宽可达24 Hz；卡尔曼滤波器对传感器噪声和系统噪声都有良好的抑制作用，角位置误差由滤波前的 0.0137° 提高到 0.0083° ，角速率误差可以控制在 $0.63/s$ 之内。

5 结论

本文提出并实现了一种基于微型编码器的电机伺服跟踪系统线性二次高斯控制器设计方法，分析了实际电机系统结构和编码器的典型误差并建立了系统的噪声状态方程，结合实际电机伺服控制系统给出了卡尔曼滤波器设计过程及结果，根据总体对电机伺服跟踪系统的指标要求完成了线性二次高斯控制器设计，利用Matlab/Simulink仿真系统对卡尔曼滤波器和线性二次高斯控制器的效果进行了预测，通过实验系统对卡尔曼滤波器和线性二次高斯控制器的性能进行实测评估。仿真和实验表明：线性二次高斯控制器具有良好的动态性能，上升时间为7.8 ms，超调量为5.4%，带宽可达24 Hz；卡尔曼

滤波器对传感器噪声和系统噪声都有良好的抑制作用，角位置误差由滤波前的 0.0137° 提高到 0.0083° ，角速率误差可以控制在 $0.63/s$ 之内。

基于微型编码器的电机伺服跟踪系统线性二次高斯控制器设计方法能够有效地抑制噪声的影响，给出系统状态的最优估计，不但可以减少需用传感器的数量以满足体积的限制，还能放宽编码器的指标要求以降低成本，对航空航天电机伺服控制系统的设计有重要意义。

参考文献：

- [1] 董莉莉,熊经武,万秋华. 光电轴角编码器的发展动态[J]. 光学精密工程,2000,8(2):198-202.
- [2] 章家保,刘慧,贾宏光,等. 电动舵机伺服系统的模型辨识及其校正[J]. 光学精密工程,2008,16(10):1971-1976.
- [3] 黄宗升,秦石乔,王省书,等. 光栅角编码器误差分析及用激光陀螺标校的研究[J]. 仪器仪表学报,2007,28(10):1866-1869.
- [4] 熊文卓,孔智勇,张炜. 光电轴角编码器光电信号正交性偏差的相量校正方法[J]. 光学精密工程,2007,15(11):1745-1748.
- [5] 洪喜,续志军,杨宁. 基于径向基函数网络的光电编码器误差补偿法[J]. 光学精密工程,2008,16(4):598-604.
- [6] Kalman R E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems[J]. Transactions of the ASME-Journal of Basic Engineering, 1960, 82: 35-45.
- [7] Kalman R E, Bucy R S. New Results in Linear Filtering and Prediction Theory[J]. Transactions of the ASME-Journal of Basic Engineering, 1961, 83: 95-108.
- [8] 马建仓,陈静. MEMS SINS-GPS组合导航系统设计[J]. 传感技术学报,2009,22(10):1437-1441.
- [9] 柏猛,赵晓光,侯增广. 一种自适应滤波方法在捷联惯导系统大失准角初始对准中的应用[J]. 传感技术学报,2008,21(6):1066-1069.
- [10] Zarchan P, Musoff H. Fundamentals of Kalman Filtering: A Practical Approach (Second Edition) [M]. Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics Press, 2005.
- [11] Grewal M S, Andrews A P. Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB (Second Edition) [M]. New York: John Wiley & Sons Press, 2001.
- [12] Franklin G F, Powell J D, Workman M L. Digital Control of Dynamic Systems (Second Edition) [M]. California: Addison-Wesley Press, 1998.
- [13] 张为堂. 同步电机励磁系统的LQG控制器的设计[J]. 合肥学院学报(自然科学版),2009,19(1):35-37.
- [14] 肖华,王立新. 基于LQG/LTR方法的鲁棒飞行控制系统设计[J]. 飞机设计,2007,27(4):39-42.
- [15] Robert L Williams, Douglas A Lawrence. Linear State-Space Control Systems [M]. America: John Wiley & Sons. 2007.



李琳(1981-),女,黑龙江哈尔滨人,博士研究生,2004年于浙江大学获得学士学位。现为中国科学院长春光学精密机械与物理研究所研究生,主要从事编码器设计和应用研究, lucine@163.com;



厉明(1982-),男,山东日照人,博士研究生,2005年于山东大学获得学士学位。现为中国科学院长春光学精密机械与物理研究所研究生,主要从事计算机仿真和电子技术应用研究, liming301128@163.com;



艾华(1961-),男,河北乐亭人,研究员,1984年于长春光机学院获得学士学位,主要从事微纳量位移测量和半导体激光器在光学仪器中的应用研究, aih@ciomp.ac.cn.