



CSTAM 2012-B03-0030

**滑移边界条件下不同流道中悬浮颗粒两相
流流动**

陶柯，姚军

中国石油大学（华东）石油工程学院油藏工程系

第七届全国流体力学学术会议

2012年11月12—14日 广西·桂林

滑移边界条件下不同流道中悬浮颗粒两相流流动¹⁾

陶柯²⁾, 姚军

(中国石油大学(华东)石油工程学院油藏工程系, 青岛 266580)

摘要 本文研究了考虑 Beavers-Joseph 滑移边界条件的由渗透性多孔介质围绕的不同形状流道中的分散两相流动问题。在考虑多孔介质的渗透作用时, Beavers-Joseph 滑移边界条件相比于经典无滑移条件更能准确描述流道内的实际速度。本文中考虑了两种形状的流道: 一种是常用的平行板模型, 另一种是更接近实际情况的边界按正弦规律变化的流道。通过摄动理论, 得到了不同条件下, 流动通道内压力差, 流线及相应速度分布的解析解表达式。沿流道长度方向的压力差和流量关系通过数值积分计算得到。关于滑移参数、颗粒相体积分数、流道宽度长度比和流道形状对两相流流动的影响进行了图示分析。结果表明, 平行板模型会低估流动阻力, 而流体在粗糙流道内的流动阻力更大; 滑移条件将使流道内流速较无滑移条件时明显增大, 流量也会有较大增加; 在正弦流道内会出现旋回现象。

关键词 分散两相流, 渗透边界, 滑移边界条件, 正弦流道, 摄动方法

引言

流体在具有渗透边界的流道内的流动存在于许多工业、环境和生物应用中, 如石油开采, 燃料电池, 燃油过滤器中的流动, 可反应堆, 污染物在地下水中的传输以及血液在血管里的流动。过去的几十年, 相应的流动机制已经获得了广泛地研究。但是, 大部分研究局限于单相流动。

根据两相流体界面形状, 两相流动可以分为三类: 分离流, 混合流和分散流¹⁾。这里我们只关注分散流。典型的分散流有碳酸盐岩油藏中的油水两相流, 燃料电池中气水两相流和河流中沉积物的运输。对分散两相流, 假设其中一相是被稀释的由球形含入物如固体颗粒、液滴和气泡组成, 并由另一流体相携带。颗粒物质对流体相的作用通过添加到 N-S 方程右边的源项表示。如果颗粒相可以被认为是连续介质的话, 那么由两个连续方程和两个动量方程构成的两相模型是可以使用的。本文中使用的动量和质量方程是被广泛应用并由连续方法推导得到的²⁻⁴⁾。

本文考虑分散两相流在由多孔介质包围的自由流道内的流动。相比不渗透边界, 渗透边界会增加流道内流体的流体速度。此时, 适用于不渗透边界的无滑移条件不能体现流道内的真实速度。不同的边界条件已经推导得到, 但尚未得到统一的结论。在 Beavers 和 Joseph⁵⁾的研究中, 他们采用 N-S 方程对自由流动区域中的牛顿流体的流动进行描述, 描述均质多孔介质中的渗流采用 Darcy 定律。由于相应偏微分方程阶次不同, Beavers-Joseph 边界条件(以下简称 BJ 条件)被提出, 结果通过实验进行了验证。引入的无因次常数 α 和表征渗透物质结构的参数相关, 变化范围为 0.1 到 4。

Neal 和 Nader⁶⁾于 1974 年提出在多孔介质中使用 Brinkman 方程。由于 N-S 方程和 Brinkman 方程是同阶的, 因此他们认为速度和应力在交界面处应该是连续的。若将滑动系数取值为 $\mu_s/\mu=\alpha^2$, Neal 和 Nader 获得了自由流动区域中和 Beavers 和 Joseph 的一个解等价的结

1) 基金资助项目: 中国石油大学(华东)自主创新科研计划项目资助(11CX06026A)

2) Email: taokeupc@yahoo.cn

果。这种方法存在的主要问题是尽管有一些研究⁷⁻¹²致力于确定有效粘度，但是迄今为止想要精确地预测指定介质的有效粘度是不可能的。另外，布里克曼修正的有效性也不断受到挑战¹³⁻¹⁵。1992年 Sahraoui 和 Kaviany¹⁶对多孔介质和自由流动区域间交界面处的水动力边界条件进行了数值研究。他们对滑动系数进行了计算，并发现布里克曼方程不能令人满意地模拟多孔介质中的流场。然而这个问题可以通过在多孔介质中使用变化的有效粘度来克服，并且通过实验¹⁷进行了验证。

一些学者已经研究了滑移作用对流动的影响，如 El-Shehawey¹⁸ 等人。Ali¹⁹ 研究了滑移作用对考虑变粘度的 MHD 流体蠕虫传输的影响。Hayat²⁰ 等人考虑了部分滑移对多孔介质中的蠕虫流的影响。Mishra 和 Rao²¹ 研究了两层流动系统中的蠕虫传输：多孔介质中使用 Brinkman 方程和由 Ochoa-Tapia 和 Whitaker²² 推导得到的切应力跳跃边界条件。Ravi Kumar²³ 研究了有限长管子中蠕虫传输并使用了 BJ 边界条件。但已有研究都局限于单相流，本文主要关注滑移作用下的分散两相流在不同流道内的流动。

在第一部分，首先阐述了流动问题，给出了无因次分散两相流数学模型。第二部分使用摄动方法获得了两相流的解析解。通过沿流道中心对压力梯度积分，在第三部分得到了无因次压力变化和流量的关系。数值结果和对结果的讨论在第四部分给出。第五部分对全文进行了总结。

1 数学模型

考虑长 L 宽 $2h$ 的二维对称流道，其中被颗粒和不可压缩粘性牛顿流体占据，如图 1。流道和多孔介质间的上界面表示为

$$H^*(x^*) = h + h_1^*(x^*)$$

根据壁面形状的不同， $h_1^*(x^*)$ 被赋予不同的值。对于裂缝类介质中的流动，人们经常使

用平行板模型描述岩石中的裂缝，裂缝具有平滑表面开度为 h 。但是实际的裂缝表面都是起伏不定而且是部分接触的²⁴。考虑界面是不平滑的，我们构建了二维粗糙流道，界面按正弦规律起伏。

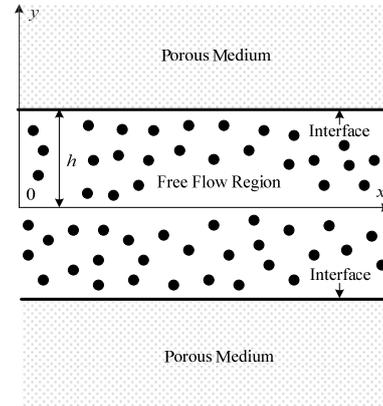


图 1 流动结构示意图， $h_1^*(x^*)=0$

在多孔介质 Ω_p 中，流体相填充流动空间，流动服从达西定律。达西速度可以表示为

$$u_D^* = -\frac{k}{\mu_f} \frac{dp^*}{dx^*}$$

其中 u_D^* 表示达西速度， k 表示多孔介质渗透率，流体粘度为 μ_f 。负号表示达西速度的方向和压力梯度的方向相反。关于达西定律的一个重要假设是孔隙尺度上的雷诺数 Re_p 要足够小。在多孔介质中，如果 Re_p 小于 0.1 那么惯性作用可以忽略。雷诺数 Re_p 表示为

$$Re_p = \frac{\rho_f u_D^* \sqrt{k}}{\mu_f}$$

在自由流流道 Ω_f 内，分散两相流存在。颗粒和边界壁面之间的相互作用忽略。流体相和颗粒相相应的质量和动量方程如下²⁵⁻²⁸。

流体相

$$(1-C)\rho_f \left[\frac{\partial u_f}{\partial t} + u_f \frac{\partial u_f}{\partial x} + v_f \frac{\partial u_f}{\partial y} \right] = - (1-C) \frac{\partial p}{\partial x} + (1-C)\mu_s(C)\nabla^2 u_f + CS(u_p - u_f) \quad (1)$$

$$(1-C)\rho_f\left[\frac{\partial v_f}{\partial t} + u_f \frac{\partial v_f}{\partial x} + v_f \frac{\partial v_f}{\partial y}\right] = - (1-C)\frac{\partial p}{\partial y} + (1-C)\mu_s(C)\nabla^2 v_f + CS(u_f - u_p) \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[(1-C)u_f] + \frac{\partial}{\partial y}[(1-C)v_f] = 0 \quad (3)$$

颗粒相

$$C\rho_p\left[\frac{\partial u_p}{\partial t} + u_p \frac{\partial u_p}{\partial x} + v_p \frac{\partial u_p}{\partial y}\right] = -C\frac{\partial p}{\partial x} + CS(u_f - u_p) \quad (4)$$

$$C\rho_p\left[\frac{\partial v_p}{\partial t} + u_p \frac{\partial v_p}{\partial x} + v_p \frac{\partial v_p}{\partial y}\right] = -C\frac{\partial p}{\partial y} + CS(v_f - v_p) \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[Cu_p] + \frac{\partial}{\partial y}[Cv_p] = 0 \quad (6)$$

在方程(1)-(6)中, (u_f, v_f) 表示流体相速度; (u_p, v_p) 表示颗粒相速度。 C 表示颗粒的体积分数, ρ_f, ρ_p 表示流体相和颗粒相的真实密度, $C\rho_p, (1-C)\rho_f$ 是混合中颗粒相和流体相的粘度。 P 表示压力, $\mu_s(C)$ 是混合粘度, S 是拖曳系数, 表示一相作用在另外一相上的力。

当颗粒浓度很小时, 可以忽略颗粒间的互相作用。文中体积分数 C 取为常数。拖曳系数 S 表示为

$$S = \frac{9}{2} \frac{\mu_f}{r^2} \lambda(C) \quad (7)$$

$$\lambda(C) = \frac{4 + 3(8C - 3C^2)^{\frac{1}{2}} + 3C}{(2 - 3C)^2}$$

对于本文中的问题, 由 Charm 和 Kurland³⁹ 得到的经验公式用于计算混合粘度 $\mu_s(C)$ 。

$$\mu_s(C) = \mu_f \frac{1}{1 - \lambda_q C} \quad (8)$$

$$\lambda_q = 0.07 \exp[2.49C + \frac{1107}{T} \exp(-1.69C)]$$

本文应用 BJ 边界条件。该条件可写为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=\text{interface}} = \frac{\alpha}{k^{1/2}} (u_{in} - D) \quad (9)$$

这里 u_{in} 表示界面上的剪切速度; k 是多孔介质渗透率, α 是无因次经验系数。相应的边界条件为

$$\frac{\partial u_f^*}{\partial y^*} = \frac{\partial u_p^*}{\partial y^*} = 0, v_f^* = v_p^* = 0 \quad \text{at } y^* = 0 \quad (10)$$

$$u_f^* = \frac{\sqrt{k}}{\alpha} \frac{\partial u_f^*}{\partial y^*} + u_D^* \quad \text{at } y^* = H^*(x^*)$$

引入流函数

$$u_f^* = \frac{\partial \Psi_f^*}{\partial y^*}, u_p^* = \frac{\partial \Psi_p^*}{\partial y^*}, \quad (11)$$

$$v_f^* = -\frac{\partial \Psi_f^*}{\partial x^*}, v_p^* = -\frac{\partial \Psi_p^*}{\partial x^*}$$

以及无因次变量

$$x = \frac{x^*}{L}, y = \frac{y^*}{h}, u_f = \frac{u_f^*}{u_D^*}, u_p = \frac{u_p^*}{u_D^*}, v_f = \frac{v_f^*}{u_D^*}, \quad (12)$$

$$v_p = \frac{v_p^*}{u_D^*}, \Psi_f = \frac{\Psi_f^*}{hu_D^*}, \Psi_p = \frac{\Psi_p^*}{hu_D^*}, p = \frac{p^*}{\rho_f u_D^{*2}}$$

定义悬浮参数

$$R = \frac{u_D^* h \rho_f}{(1-C)\mu_s}, M = \frac{Sh^2}{(1-C)\mu_s}, \quad (13)$$

$$N = \frac{Sh^2 \rho_f}{(1-C)\rho_p \mu_s}, \varepsilon = \frac{h}{L}$$

通过交叉微分消掉压力项, 相应的无因次动量方程表示为

$$(1-C)\varepsilon R[\Psi_{fy} \tilde{\nabla}^2 \Psi_{fx} - \Psi_{fx} \tilde{\nabla}^2 \Psi_{fy}] = \tilde{\nabla}^2 \tilde{\nabla}^2 \Psi_f + CM(\tilde{\nabla}^2 \Psi_p - \tilde{\nabla}^2 \Psi_f)$$

$$C\varepsilon R[\Psi_{py} \tilde{\nabla}^2 \Psi_{px} - \Psi_{px} \tilde{\nabla}^2 \Psi_{py}] = CN(\tilde{\nabla}^2 \Psi_f - \tilde{\nabla}^2 \Psi_p) \quad (14)$$

其中

$$\tilde{\nabla}^2 = \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

上渗透壁面的无因次方程为

$$H(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \quad \text{平行通道} \\ 1 + \varphi \sin[2\pi(x-1/4)] & 0 \leq x \leq 1 \quad \text{正弦通道} \end{cases}$$

其中 φ 表示正弦界面的无因次振幅。半流道内的流体相体积流量为

$$Q_f^* = (1-C)u_D^* h \int_0^{H(x)} u_f dy \quad (15)$$

定义无因次流量

$$F = \frac{Q_f^*}{(1-C)u_D^* h}$$

那么有

$$F = \int_0^{H(x)} \frac{\partial \Psi_f}{\partial y} dy = \Psi_f(H) - \Psi_f(0)$$

无因次边界条件为

$$\begin{aligned} \Psi_f = \Psi_p = 0, \quad \Psi_{fyy} = \Psi_{pyy} = 0 & \quad \text{at } y = 0 \\ \Psi_f = F, \quad \Psi_{fy} = \beta \Psi_{pyy} + 1 & \quad \text{at } y = H \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $\beta = -k^{1/2}/h\alpha$ 是一个无因次参数，这里成为滑移系数。 α 是BJ边界条件中引入的无因次参数。

2 摄动解

基于小参数 ε （流道宽度和长度比），使用摄动方法求解方程。将流量按 ε 的幂级数展开

$$\begin{aligned} \Psi_f &= \Psi_{f0} + \varepsilon \Psi_{f1} + \varepsilon^2 \Psi_{f2} + \dots \\ \Psi_p &= \Psi_{p0} + \varepsilon \Psi_{p1} + \varepsilon^2 \Psi_{p2} + \dots \\ u &= u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \\ v &= v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots \\ F &= F_0 + \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \dots \\ \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial P_0}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial P_1}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial P_2}{\partial x} + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

将方程(17)带入方程(14) (16)并将具有关于 ε 相同指数的项进行组合，方程可以化简为一系列线性方程。

2.1 零阶系统的解

零阶方程为

$$\begin{aligned} \Psi_{f0yyy} + CM(\Psi_{p0yy} - \Psi_{f0yy}) &= 0 \\ CN(\Psi_{f0yy} - \Psi_{p0yy}) &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

边界条件

$$\begin{aligned} \Psi_{f0} = \Psi_{p0} = 0, \quad \Psi_{f0yy} = \Psi_{p0yy} = 0 \\ \Psi_{f0} = F_0, \quad \Psi_{f0y} = \beta \Psi_{f0yy} + 1 \end{aligned} \quad (19)$$

流函数的解

$$\begin{aligned} \Psi_{f0} &= -\frac{(F_0 - H)}{2H^2(H - 3\beta)} y^3 - \frac{(H^3 - 3H^2 F_0 + 6\beta F_0 H)}{2H^2(H - 3\beta)} y \\ \Psi_{p0} &= -\frac{(F_0 - H)}{2H^2(H - 3\beta)} y^3 - \frac{(H^3 - 3H^2 F_0 + 6\beta F_0 H)}{2H^2(H - 3\beta)} y \\ &\quad + \frac{3(F_0 - H)}{MH^2(H - 3\beta)} y \end{aligned}$$

2.2 一阶系统的解

一阶方程为

$$\begin{aligned} (1-C)R[\Psi_{f0y} \Psi_{f0xy} - \Psi_{f0x} \Psi_{f0yy}] = \\ \Psi_{f1yyy} + CM(\Psi_{p1yy} - \Psi_{f1yy}) \\ CR[\Psi_{p0y} \Psi_{p0xy} - \Psi_{p0x} \Psi_{p0yy}] = CN(\Psi_{f1yy} - \Psi_{p1yy}) \end{aligned} \quad (20)$$

边界条件

$$\begin{aligned} \Psi_{f1} = \Psi_{p1} = 0, \quad \Psi_{f1yy} = \Psi_{p1yy} = 0 \\ \Psi_{f1} = F_1, \quad \Psi_{f1y} = \beta \Psi_{f1yy} \end{aligned} \quad (21)$$

流函数的解为

$$\begin{aligned} \Psi_{f1} &= (a_1 F_0^2 + a_2 F_0 + a_3) y^7 + (a_4 F_0^2 + a_5 F_0 + a_6) y^5 \\ &\quad + (a_7 F_0^2 + a_8 F_0 + a_9) y^3 + (a_{10} F_0^2 + a_{11} F_0 + a_{12}) y \\ \Psi_{p1} &= (a_1 F_0^2 + a_2 F_0 + a_3) y^7 + (a_{13} F_0^2 + a_{14} F_0 + a_{15}) y^5 \\ &\quad + (a_{16} F_0^2 + a_{17} F_0 + a_{18}) y^3 + (a_{19} F_0^2 + a_{20} F_0 + a_{21}) y \end{aligned}$$

流函数 $\Psi_f(x, y)$ 和 $\Psi_p(x, y)$ 直到一阶的解

$$\begin{aligned} \Psi_f^{(1)} &= \Psi_{f0} + \varepsilon \Psi_{f1} \\ \Psi_p^{(1)} &= \Psi_{p0} + \varepsilon \Psi_{p1} \end{aligned}$$

无因次流量 $F^{(1)}$ 表示为

$$F^{(1)} = F_0 + \varepsilon F_1 \quad (22)$$

将 $F_0 = F^{(1)} - \varepsilon F_1$ 带入流函数直到一阶的组合解中，并忽略高于 $O(\varepsilon)$ 的项，得到流函数关于无因次流量的解。

3 压力差

将方程(17)带入到无因次动量方程并合并具有关于 ε 相同指数的项，得到零阶和一阶压力梯度。

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_0}{\partial x} &= g_1 \Psi_{f_0yy} + g_2 (\Psi_{p_0y} - \Psi_{f_0y}) \\ \frac{\partial p_1}{\partial x} &= \frac{L}{h} (\Psi_{f_0x} \Psi_{f_0yy} - \Psi_{f_0y} \Psi_{f_0yx}) + \\ &g_1 \Psi_{f_1yy} + g_2 (\Psi_{p_1y} - \Psi_{f_1y}) \end{aligned} \quad (23)$$

其中

$$g_1 = \frac{\mu_s L}{h^2 \rho_f u_D}, g_2 = \frac{CSL}{(1-C) \rho_f u_D}$$

沿流道长度方向的无因次压力差定义为

$$\Delta P = \int_0^1 \frac{dp}{dx} dx \quad (24)$$

由于该压力差独立于坐标 y ，积分(24)可以沿 $y=0$ 进行。将方程(23)带入到(24)中，有

$$\Delta P^{(1)} = \int_0^1 \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial p_1}{\partial x} \right) dx \quad (25)$$

同样，将 $F_0 = F^{(1)} - \varepsilon F_1$ 带入到方程(24)中并忽略高于 $O(\varepsilon)$ 的项，可以得到无因次压力差。

4 结果和讨论

通过基于小参数 ε 的摄动方法，我们得到了具有渗透边界的流道内分散两相流的解析解。影响该两相流的参数包括：流道形状（平行或粗糙），正弦边界的幅度参数 φ ，滑移参数 β ，体积分数 C ，流道宽度和长度比 ε ，以及流体雷诺数 Re_f 。

该部分主要分析上述参数对(1)流道长度方向两端压力差 $\Delta P^{(1)}$ ；(2)流线和速度分布的影响。多孔介质中的流动参数为：

渗透率 $k_p = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ ，流体粘度 $\mu_f = 0.001 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ，定压力梯度 $dp/dx = -0.1 \text{ Pa/m}$ 。

4.1 压力差和流量的关系

流道形状对分散两相流的影响如图 2 所示。其中自由流道内和多孔介质中的压力梯度一致。 $\varphi=0$ 对应平行板模型，其他 φ 取值对应具有不同幅度的按正弦规律变化的流道。由图 2 可以看出，压力差 $\Delta P^{(1)}$ 随无因次流量 $F^{(1)}$ 线性变化。作为唯一的驱动力，压力驱动流体流动。图片中各曲线交于一点，该点对应于 $\Delta P^{(1)}=0$ 。在该点右下部，压力作为动力驱使流体流动。

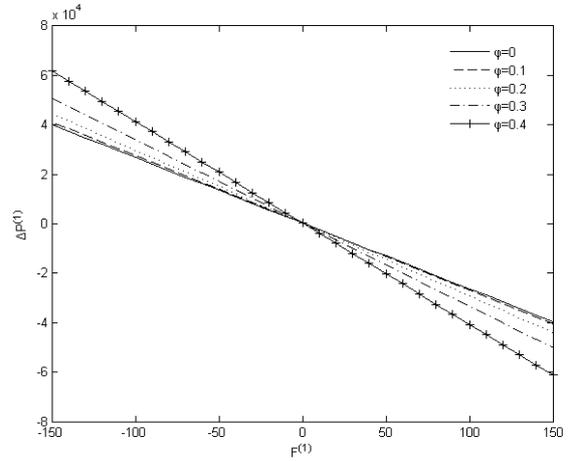


图 2 不同流道形状下压力差和流量关系，其中 $C=0.1, \varepsilon=0.01, \beta=-0.1, \varphi=0,0.1,0.2,0.3,0.4$

从图中可以得出：保持其他参数不变，在相同压力梯度下，平行板模型能获得更大的流量。随着边界起伏的增大，流量逐渐减小。说明平行板模型一般会低估流道的阻力，而将流道内实际流量进行较大估计。而随着幅度的增大，虽然流通面积没有发生变化，但流道变得更加粗糙，对流动形成更大的阻力，导致流量的减少。

由于考虑滑移作用，那么流道内的流速较之无滑移作用时会有增加。图 3 给出了不同滑移系数下压力差和流量间的关系。

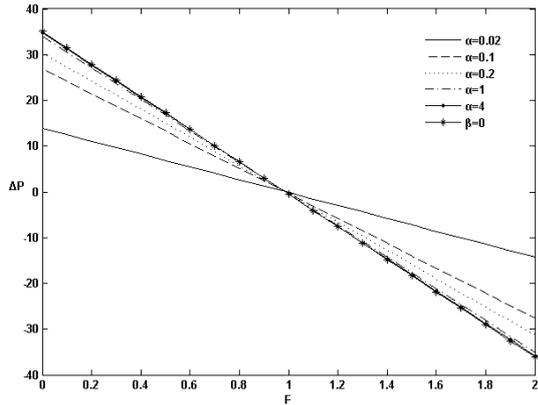


图3 不同滑移系数下压力差和流量关系，其中 $\varphi=0.1, C=0.1, \varepsilon=0.1, \beta= -0.5, -0.1, -0.05, -0.01, -0.0025, 0$

$\beta=0$ 对应无滑移条件，无因次系数 α 取值从0.02到4。在相同压力梯度下，滑移条件将使流道内流量较无滑移条件时明显增加。这是由于速度的滑移是流道内流速明显变大。而且保持其他参数不变，随着无因次系数 α 减小，滑移对流速增加的越大，流量增加的也越大。

颗粒相体积分数 C 对流道流动的影响绘于图4中。

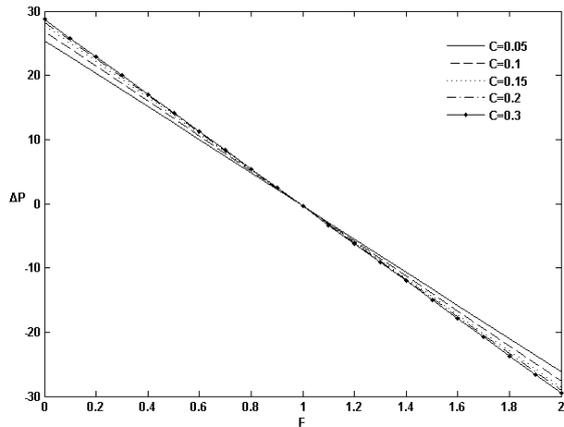


图4 不同体积系数下压力差和流量关系，其中 $\varphi=0.1, \beta= -0.1, \varepsilon=0.1, C=0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.3$

由图4知，在相同的压力梯度下，保持其他参数不变，随着颗粒相体积分数的增大，流道内流量减小。流道宽度-长度比对压力差和流量的关系如图5所示。

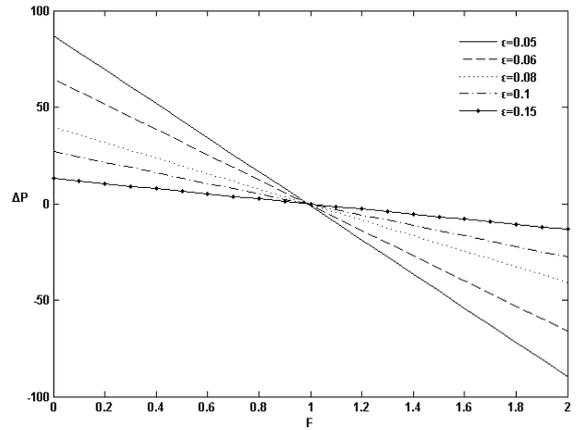
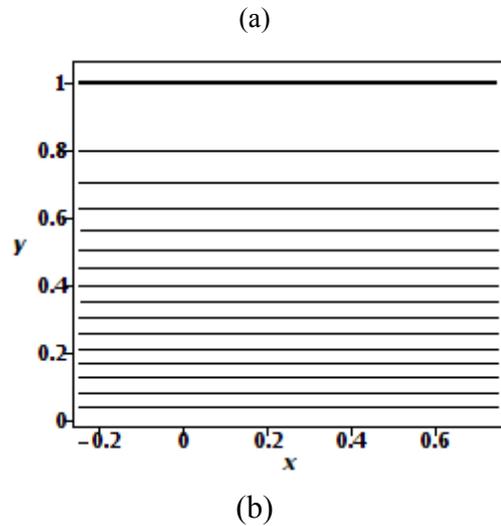


图5 不同流道宽度长度比下压力差和流量关系，其中 $\varphi=0.1, \beta= -0.1, C=0.1, \varepsilon=0.05, 0.06, 0.08, 0.1, 0.15$

流道宽度的增加将使流动的截面积增大，必然会对流量产生影响。如图5所示，流道宽度长度比的扩大将显著增加流道内的流量。

4.2 流线和速度分布

4.2.1 平行流道



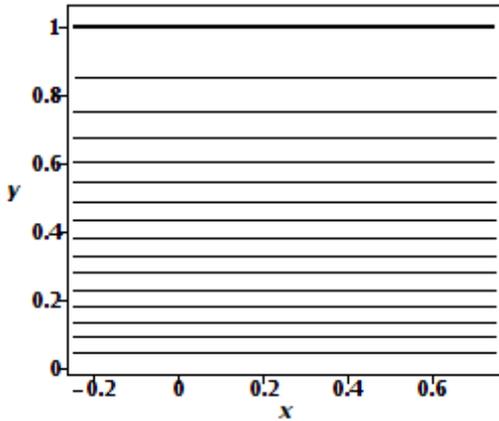
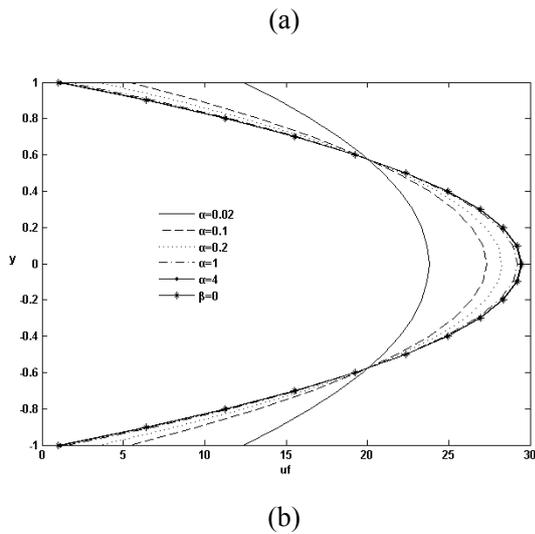


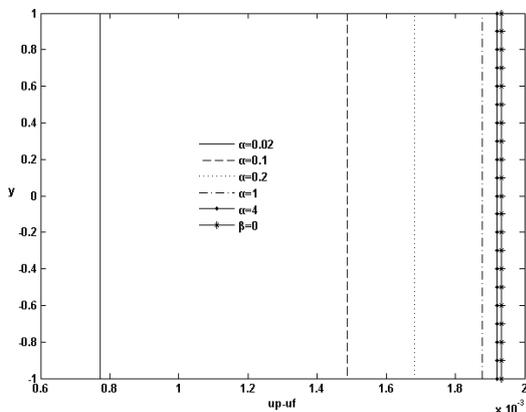
图 6 流线函数 $\Psi_f^{(1)}$, $\varphi=0, C=0.1, \varepsilon=0.1, F^{(1)}=20, \beta=0, -0.1$

对平行板模型，流道内的流线是一系列平行直线。在滑移条件下，流线分布的更均匀，流道内 y 方向上的流速变化也更缓和。

图 7 研究了滑移条件对流道内流速的影响。



(a)



(b)

图 7 平行板模型中(a)速度 $u_f^{(1)}$ 的分布 (b)速度差 $(u_p^{(1)} - u_f^{(1)})$, $\varphi=0, C=0.1, \varepsilon=0.1, F^{(1)}=20, \beta= -0.5, -0.1, -0.05, -0.01, -0.0025, 0$

如图 7(a)所示， $u_f^{(1)}$ 在流道中间位置达到最大值，从中心到边界流速减小为滑移速度。随着无量纲参数 α 的增加，流道内的最大速度 $u_{fmax}^{(1)}$ 增加。由 7(b)可知，颗粒相速度大于流体相速度，随着无量纲参数 α 的增加，二者差异越来越大。流量大小和流道内速度的关系见图 8。

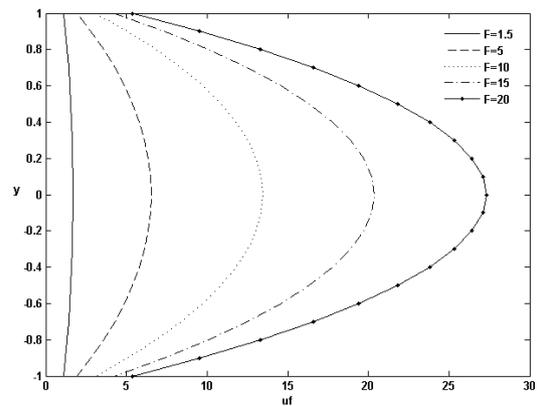
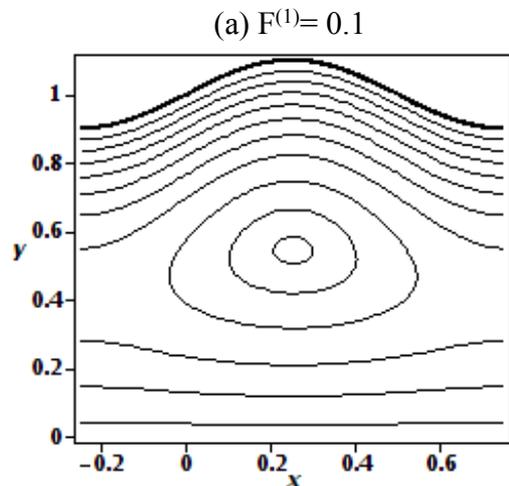


图 8 不同流量下流道内速度 $u_f^{(1)}$ 分布

流道内流速的增加势必会增大流量。随着流量的增加，流速也越来越大，速度剖面变得更加突兀。

4.2.2 正弦流道

在正弦流道中，流线形状跟流速、颗粒相浓度和滑移参数的有关。图 9 给出了流线和流量之间的关系。



(a) $F^{(1)}=0.1$

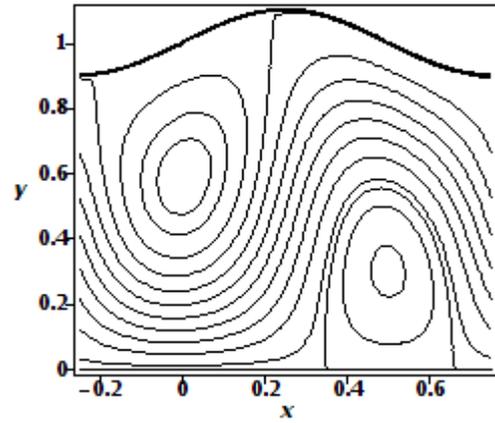
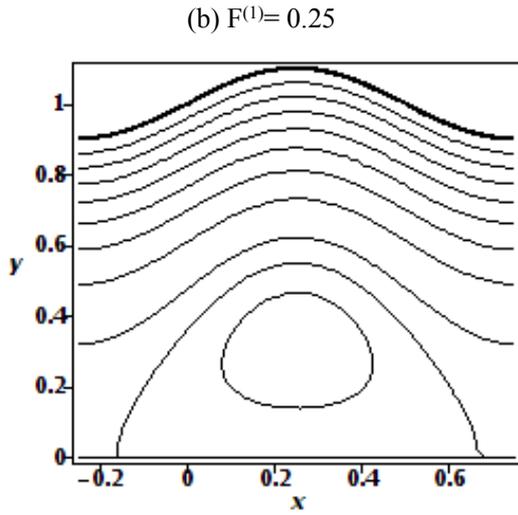
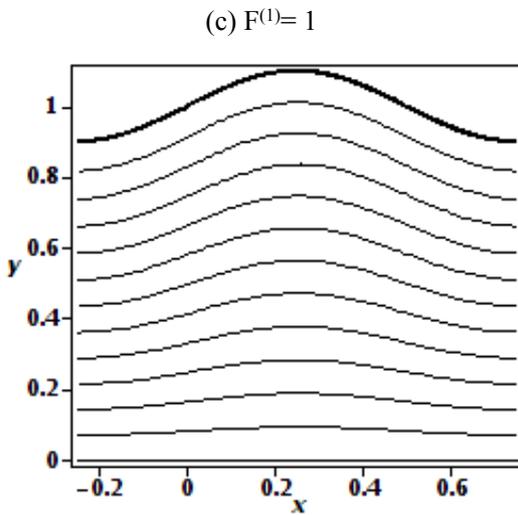
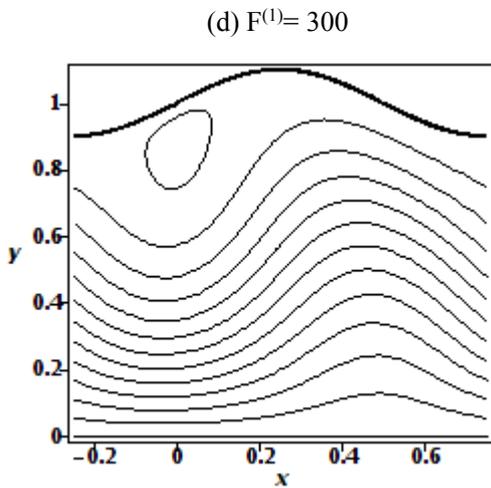


图9 不同流量下的流线 $\Psi_f^{(1)}$, $\varphi=0.1, \alpha=0.1, \varepsilon=0.1,$
 $C=0.1$

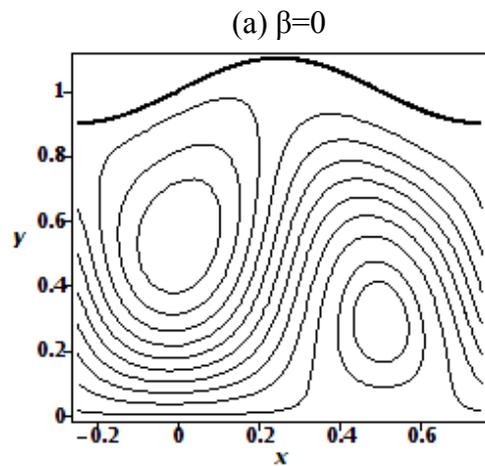


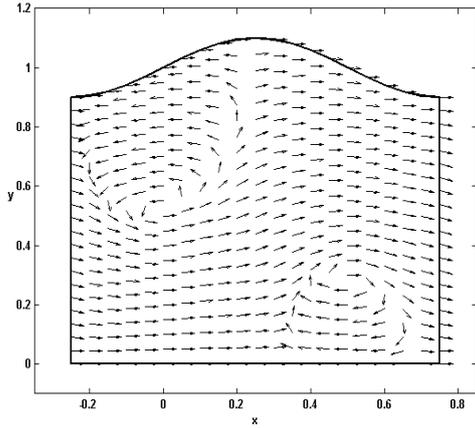
粗糙流道中一个重要现象就是旋回，如图9(a)(b)所示。流体在流道中形成闭合曲线，随着流量的增加旋回逐渐向流道中心移动直到消失于9(c)。此时，流线按照流道的形状分布。随着流量的进一步增大，流道内流速进而增大，惯性作用逐渐增强，于是在近入口端再次形成旋回。随着流量的再次增大，在近出口处也形成了旋回，旋回的数量随着流量的增大逐渐增加。

滑移系数对流线的影响见图10所示。 $\beta=0$ 对应无滑移条件。随着滑移系数 β 的减小，旋回的数量逐渐减少，近入口处的旋回上移，近出口处的旋回下移。

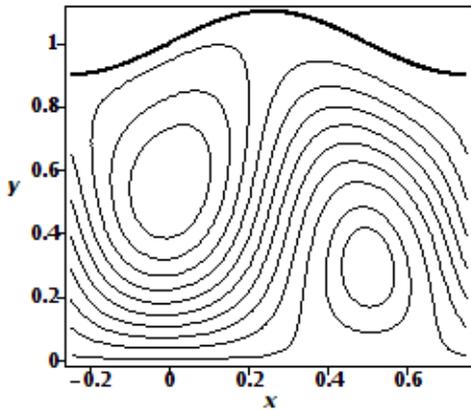


(e) $F^{(1)} = 1000$





(b) $\beta = -0.02$



(c) $\beta = -0.5$

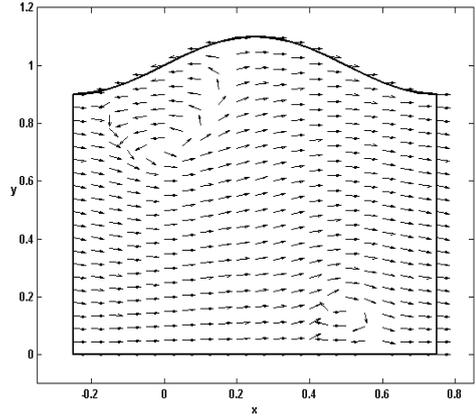
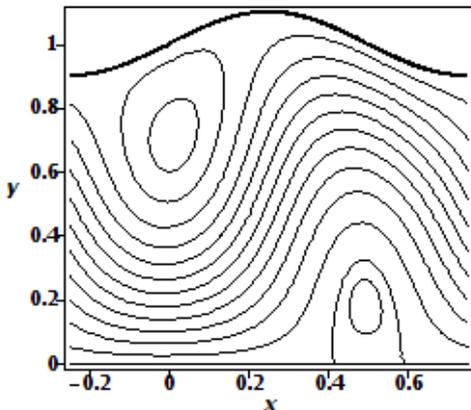
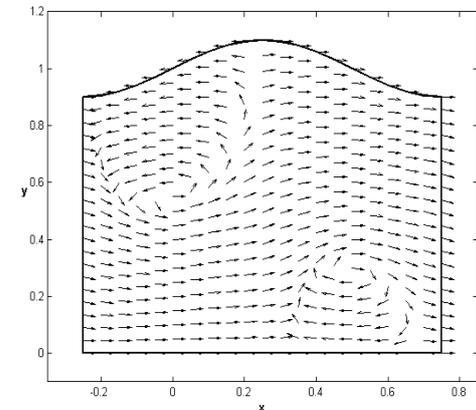


图 10 不同滑移系数下的流线 $\Psi^{(1)}$ 和合速度 $U^{(1)}$ (速度进行了标准化处理), $\phi=0.1, \epsilon=0.1, C=0.1, F^{(1)}=1000$

5 结论

本文研究了考虑 BJ 滑移边界条件的由渗透多孔介质包围的流道中的分散两相流动问题。借助摄动理论, 求得了沿模型长度方向的压力差和流线、流动速度解析解。在计算沿流道长度方向的压力差时用到了数值积分。

通过数值计算, 给出了不同滑移参数 β , 不同颗粒相体积分数 C , 不同流道宽度长度比 ϵ 和不同流道形状下的压力差和流量关系及流线、速度分布图。结果表明, 平行板模型一般会低估流道的阻力, 而将流道内实际流量进行较大估计。而随着壁面起伏幅度的增大, 虽然流通面积没有发生变化, 但流道变得更加粗糙, 对流动形成更大的阻力, 导致流量的减少。另外, 滑移条件将使流道内流量较无滑移条件时明显增加, 流速也会有较大增大。

在边界按正弦规律变化的流道内, 在较小流量和较大流量时都会出现旋回现象, 前者是因为多孔介质内的渗流作用, 而后者则是粗糙边界和流体惯性作用共同作用的结果。在较大流量情况下, 在近入口端和出口端两个位置都存在旋回现象。在滑移存在情况下, 随着滑移系数 β 的减小, 旋回的数量逐渐减少, 近入口处的旋回上移, 近出口处的旋回下移。

参考文献

- 1 M. ISHII. Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two-phase flow. Volume 22 of Direction des etudes et recherches d' électricité de France. Eyrolles, Paris, 1975.

- 2 Drew, D. Stability of a Stokes layer of a dusty gas. *Phys. Fluids*, 1979, 22(11), 2081–2086.
- 3 Drew, D. Mathematical modeling of two-phase flow. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1983, 15, 261–291.
- 4 Kleinstreuer, C. *Two-Phase Flow: Theory and Applications*. Taylor and Francis, London, 2003.
- 5 G. Beavers, D.D. Joseph. Boundary conditions at a naturally permeable wall. *J. Fluid Mech.*, 1967, 30, 197–207.
- 6 G. Neale, W. Nader. Practical significance of Brinkman extension of Darcy's law: coupled parallel flows within a channel and a bounding porous medium. *Can. J. Chem. Eng.*, 1974, 52: 475–478.
- 7 P.M. Adler. Viscosity of concentrated suspensions of aggregable particles. *Rheologica Acta*, 1978, 17: 288–295.
- 8 P.M. Adler, P.M. Mills. Motion and Rupture of a Porous Sphere in a Linear Flow Field. *J. Rheol.*, 1979, 23 (1): 25–37.
- 9 J. Koplik, H. Levine, A. Zee. Viscosity renormalization in the Brinkman equation. *Phys. Fluids*, 1983, 26 (10): 2864–2870.
- 10 J.A. Kolodziej. Influence of the porosity of a porous medium on the effective viscosity in Brinkman's filtration equation. *Acta Mech.*, 1988, 75: 241–254.
- 11 N. Martys, D.P. Bentz, E.J. Garboczi. Computer simulation study of the effective viscosity in Brinkman's equation. *Phys. Fluids*, 1994, 6 (4): 1434–1439.
- 12 R.C. Givler, S.A. Altobelli. A determination of the effective viscosity for the Brinkman-Forchheimer flow model. *J. Fluid Mech.*, 1994, 258: 355–370.
- 13 D.A. Nield. The boundary correction for the Rayleigh-Darcy problem: limitations of the Brinkman equation. *J. Fluid Mech.*, 1983, 128: 37–46.
- 14 D.A. Nield. The limitations of the Brinkman-Forchheimer equation in modeling flow in a saturated porous medium and at an interface. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 1991, 12 (3): 269–272.
- 15 K. Vafai, S.J. Kim. On the limitations of the Brinkman-Forchheimer-extended Darcy equation. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 1995, 16: 11–15.
- 16 M. Sahraoui, M. Kaviany. Slip and No-Slip Velocity Boundary Conditions at Interface of Porous, Plain Media. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1992, 35: 927–944.
- 17 S.K. Gupte, S.G. Advani. Flow near the permeable boundary of a porous medium: An experimental investigation using LDA. *Experiments in Fluids*, 1997, 22: 408–422.
- 18 E. F. El-Shehawey, N. T. El-Dabe, I. M. El-Desoky. Slip Effects on the Peristaltic Flow of a Non-Newtonian Maxwellian Fluid. *Acta Mech.*, 2006, 186: 141–159.
- 19 N. Ali, Q. Hussain, T. Hayat, S. Asghar. Slip effects on the peristaltic transport of MHD fluid with variable viscosity, *Phys. Lett. A.*, 2008, 372: 1477–1489.
- 20 T. Hayat, Q. Hussain, N. Ali. Influence of partial slip on the peristaltic flow in a porous medium, *Phys. Lett. A.*, 2008, 387: 3399–3409.
- 21 Mishra M, Rao AR. Peristaltic transport in a channel with a porous peripheral layer model: of a flow in gastrointestinal tract. *J Biomech.*, 2005, 38: 779–789.
- 22 Ochoa-Tapia, J. A., S. Whitaker. Momentum-transfer at the boundary between a porous-medium and a homogeneous fluid: I. Theoretical development. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1995, 38: 2635–2646.
- 23 Y. V. K. RaviKumar, S. V. H. N. KrishnaKumari, M. V. Raman Murthy, S. Sreenadh. Unsteady peristaltic pumping in a finite length tube with permeable wall. *Trans. ASME, J. Fluids Engineering*, 2010, 32: 1012011–1012014.
- 24 Brown, S. R., H. W. Stockman, and S. J. Reeves. Applicability of the Reynolds equation for modeling fluid flow between rough surfaces, *Geophys. Res. Lett.*, 1995, 22(18): 2537–2540.
- 25 Srivastava, L. M., Srivastava, V. E. Peristaltic transport of a particle-fluid suspension. *J. Biomech. Engng.*, 1989, 111: 157–165.
- 26 Srivastava, V. E., Saxena, M. A two-fluid model of non-newtonian blood flow induced by peristaltic waves. *Rheol. Acta.*, 1995, 34: 406–414.
- 27 V.P. Srivastava, L.M. Srivastava. Influence of wall elasticity and Poiseuille flow on peristaltic induced flow of a particle-fluid mixture, *Int. J. Eng. Sci.*, 1997, 35: 1359–1386.
- 28 K. S. Mekheimer, E. F. El Shehawey, A. M. Elaw. Peristaltic motion of a particle-fluid suspension in a planar channel, *Int. J. Theor. Phys.*, 1998, 37: 2895–2920.
- 29 Charm, S. E., Kurland, G. S. *Blood Flow and Microcirculation*. Wiley, New York, 1974.

DISPERSED TWO-PHASE FLOW IN CHANNELS WITH PERMEABLE BOUNDARIES

Tao Ke Yao Jun

(School of Petroleum Engineering, China University of Petroleum (Hua dong), Qingdao 266555, China)

Abstract The problem of the dispersed particulate-fluid two phase flow in a channel with porous walls under the effect of the Beavers & Joseph slip boundary condition is concerned in this paper. The analytical solutions of longitude pressure difference, stream functions and the corresponding velocities at distinct situations have been derived using the perturbation method. The numerical integration is used in the calculation of the pressure change along the channel. The graphical results are presented to discuss the influence of various physical interested parameters on the flow pattern. It is worth mentioning that the slip coefficient and the boundary amplitude can largely influence the flow pattern.

Key words dispersed two-phase flow, permeable boundary, Beavers-Joseph slip condition, perturbation method