



CSTAM 2012-B03-0022

非牛顿流体二维溃坝问题的 MPS 改进方法数值模拟

向浩，陈斌

西安交通大学动力工程多相流国家重点实验室

第七届全国流体力学学术会议

2012 年 11 月 12—14 日 广西·桂林

非牛顿流体二维溃坝问题的 MPS 改进方法 数值模拟¹⁾

向浩, 陈斌²⁾

(西安交通大学动力工程多相流国家重点实验室, 陕西西安 710049)

摘要 移动粒子半隐式法是一种广泛应用于不可压缩自由表面流动的粒子方法。本文通过引入光滑粒子流体动力学方法中的样条函数和散度算子离散方案离散非牛顿流体的剪切应力, 对现有 MPS 方法进行改进。将该模型用于以 Cross 流体为例的非牛顿流体的二维溃坝问题计算, 并将计算结果与前人数据进行了对比, 可以发现基于 SPH 核函数的 MPS 方法结果与实验数据吻合最好。

关键词 MPS; 自由表面流动; SPH; 非牛顿流体; 溃坝

引言

移动粒子半隐式法[1](Moving Particle semi-implicit, MPS)和光滑粒子流体动力学[2][3](Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH)方法是近年来广泛应用于自由表面流动的粒子方法。这类方法的基本思想是将流场离散为具有质量、动量等物理量的流体粒子, 利用核函数考虑粒子之间的相互影响, 控制方程的各项也被离散为粒子间的相互作用, 通过计算和追踪粒子的运动获得整个流场。相比于传统的网格类方法, 粒子方法避免了复杂的界面追踪以及对流项引起的数值耗散。

MPS 方法和 SPH 方法虽然同属粒子类方法, 但两者仍有区别。例如, SPH 方法采用状态方程显式处理压力项, 因此流体是近似不可压缩的, 而 MPS 隐式处理压力项, 流体是真正不可压缩的; SPH 方法的微分算子离散方案直接作用在核函数上, 因此对核函数有较高的要求, 而 MPS 的微分算子则通过粒子加权平均离散, 对核函数要求较低, 同时由于形式比较简单粗糙, 导致离散格式的适用范围较窄, 拓展性较差, 影响了 MPS 的应用范围。

目前对于 MPS 方法的研究主要集中在牛顿流体领域, 对非牛顿流体自由表面的研究较为少见。本文以 MPS 方法为基础, 引入 SPH 三次样条核函数, 采用 SPH 的散度离散方案离散非牛顿流体的剪切应力 τ , 以 Cross 流体的溃坝

问题为例进行了数值模拟并与文献[5][6][7]的结果进行了对比。

1 数值方法

1.1 控制方程

不可压缩流体的流动控制方程的拉格朗日形式可以写作:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F} \quad (2)$$

其中, \mathbf{u} 代表粒子速度; ρ 代表流体密度; \mathbf{F} 代表质量力, 通常为重力; μ 代表动力黏度。对于非牛顿流体, 动量方程写作:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} \quad (3)$$

其中, $\boldsymbol{\tau}$ 为剪切应力张量。

1.2 核函数

MPS 方法和 SPH 方法中粒子间的相互作用都通过核函数完成, 但两种方法的核函数要求确有所区别。MPS 方法中, 核函数仅仅是一个权函数, 因此该核函数只要能反应粒子间距对相互作用强弱的规律即可。最常用的 MPS 方法核函数如下式所示:

$$w(r) = \begin{cases} \frac{r_e}{r} - 1 & (0 < r \leq r_e) \\ 0 & (r_e < r) \end{cases} \quad (4)$$

其中, r_e 为粒子有效影响半径, r 为粒子间距。

1) 基金资助项目: 国家自然科学基金(50976087)、高等学校博士学科点专项科研基金(20090201110001)项目联合资助。

2) Email: chenbin@mail.xjtu.edu.cn

由于 SPH 方法把各种算子的离散直接作用在核函数上, 因此核函数不仅要体现粒子相互作用的规律, 还要保证其空间导数也正确。为了采用 SPH 方法的散度算子离散方案, 本文采用如式(5)所示的 SPH 常用三次样条核函数。

$$w(r) = \begin{cases} \frac{10}{7\pi h^2} (1 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{3}{4}q^3) & (0 < q < 1) \\ \frac{10}{28\pi h^2} (2 - q)^3 & (1 \leq q < 2) \\ 0 & (q \geq 2) \end{cases} \quad (5)$$

其中, $q=r/h$, h 为光滑长度。由于 MPS 方法中的流体是真正不可压缩流体, 因此本文的 h 为定值, $h=r_e/2$ 。

1.3 控制方程离散模型

本文采用的梯度算子和拉普拉斯算子可参考文献[4], 采用如下的 SPH 常用散度算子离散格式:

$$\langle \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \rangle_i = \sum_j^N m_j \left[\frac{\boldsymbol{\tau}_i}{\rho_i^2} + \frac{\boldsymbol{\tau}_j}{\rho_j^2} \right] \cdot \nabla_i w_{ij} \quad (6)$$

其中, m 表示粒子质量, ρ 表示粒子密度, 下标 i 表示中心粒子, 下标 j 表示周围粒子。粒子密度 ρ 的表达式为

$$\rho_i = \sum_{j=1}^N m_j w_{ij} \quad (7)$$

同样地, 由于 MPS 方法能体现真正的不可压缩流体的特性, 上式中的 m, ρ 均为常数, 粒子密度与流体宏观密度相等。将式(7)代入式(6), 得到本文的散度算子离散格式:

$$\langle \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \rangle_i = \sum_{j=1}^N (\boldsymbol{\tau}_i + \boldsymbol{\tau}_j) \cdot \nabla_i w_{ij} / \sum_{j=1}^N w_{ij} \quad (8)$$

其中:

$$\nabla_i w_{ij} = \frac{dw}{dr_{ij}} \cdot \frac{[(x_i - x_j)\mathbf{i} + (y_i - y_j)\mathbf{j}]}{|r_{ij}|} \quad (9)$$

需要注意的是, 二阶张量 $\boldsymbol{\tau}$ 与一维向量 ∇w 的点乘结果为一维向量。

1.4 非牛顿模型的引入

对于典型的非牛顿流体, 本构方程可以写作 $\boldsymbol{\tau} = \mu(|\boldsymbol{\gamma}|) \boldsymbol{\gamma}$ 的形式, μ 为黏度, $\boldsymbol{\gamma}$ 为剪切率张量。二维问题中, 剪切率张量 $\boldsymbol{\gamma}$ 表示为:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & 2 \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (10)$$

对于本构方程如以下形式的 Cross 模型:

$$\boldsymbol{\tau} = \left(\mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + (K|\boldsymbol{\gamma}|)^m} \right) \boldsymbol{\gamma} \quad (11)$$

参考文献[5]中的化简方法, 上式可以写作以下形式:

$$\mu = \left(1000\mu_B + \frac{1000\mu_B^2}{\tau_B} |\boldsymbol{\gamma}| \right) / \left(1 + \frac{1000\mu_B}{\tau_B} |\boldsymbol{\gamma}| \right) \quad (12)$$

其中, μ_B 为宾汉屈服黏度, τ_B 为宾汉屈服应力。

在二维问题中, 剪切率 $|\boldsymbol{\gamma}|$ 可以用下式求出:

$$|\boldsymbol{\gamma}| = \sqrt{2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2} \quad (13)$$

我们可以通过上一时间步长的流动速度场求得剪切率 $|\boldsymbol{\gamma}|$, 进而通过式(12)获得流场各处的动力黏度, 并由式(11)获得剪切应力张量 $\boldsymbol{\tau}$ 。

1.5 算法流程

MPS 方法采用预测-修正算法, 在一个时间步长内, 首先计算动量方程中除压力项以外的所有项, 得到粒子的临时位置和临时速度, 以用临时位置计算得到的临时粒子数密度场与初始粒子数密度进行比较, 隐式求解连续方程得到粒子速度的修正值, 对粒子位置及速度进行修正, 最终获得粒子下一时间步长的位置与速度。

2 数值方法

本文采用与文献[5][6]相同的泥-水混合物溃坝问题以进行对比。算例模型尺寸如图 1 所示, 在一个长度为 2m 的水槽内装有深度为 0.1m 的泥-水混合物。本文与文献[5]保持一致, 将其视为 Cross 流体, 密度为 1200 kg/m³, 屈服应力取为 25.0 Pa, 宾汉屈服黏度为 0.07 Ns/m²。在时间 $t=0$ 时迅速将右边挡板抽出, 流体开始溃坝过程。

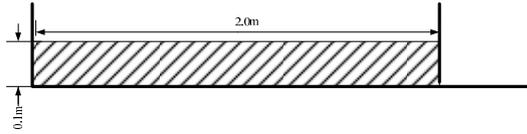


图1 溃坝算例示意图

本文采用与文献[5]一致的初始粒子布置,如图2所示。初始粒子间距 l_0 为 0.01m, 共均匀布置 2000 个流体粒子和 1256 个壁面粒子, 时间步长设为 $\Delta t=0.0001s$, 为了增加参加计算的粒子数, 提高精确度, 梯度算子、散度算子和拉普拉斯算子的有效粒子影响半径 r_e 取为 $3.1l_0$ 。为了避免自由表面粒子误判, 自由表面判定部分的有效粒子影响半径 r_e 取作 $2.1l_0$ 。隐式求解压力部分的有效粒子影响半径 r_e 取作 $4.1l_0$ 。 $t=0.1, 0.3$ 和 $0.6s$ 时的计算结果如图3所示, 与文献[5]均吻合较好。

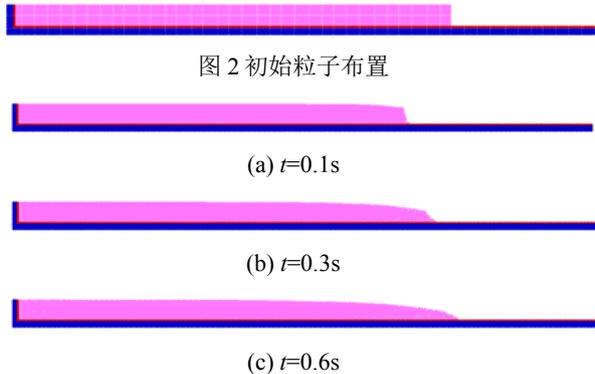


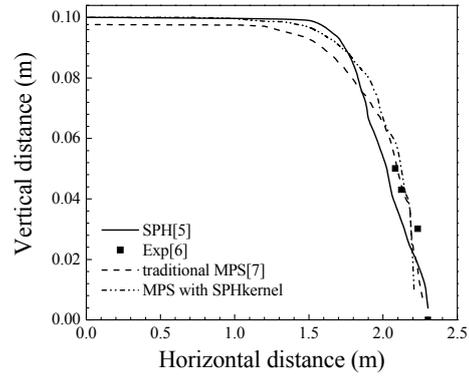
图3 MPS 方法模拟结果

为进行进一步对比, 我们比较了 $t=0.37s$ 和 $0.6s$ 时的粒子分布, 如图4所示。可以看出, 相对于文献[5]的 SPH 方法以及文献[7]的 MPS 方法模拟结果, 本文提出的基于 SPH 核函数方法的 MPS 方法结果与文献[6]的实验数据吻合最好。另外, 由于本文在判定自由表面时 r_e 取作 $3.1l_0$, 有效避免了自由表面误判, 消除了传统 MPS 模拟结果中溃坝后段的粒子塌陷现象。

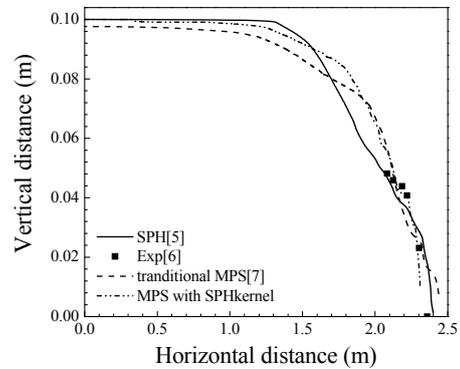
3 结论

本文以 MPS 方法为基础, 引入 SPH 三次样条核函数, 采用 SPH 的散度离散方案离散非牛顿流体的剪切应力 τ , 模拟了 Cross 流体的溃坝问题, 模拟结果与前人模拟结果对比, 与实验结果吻合最好, 证明了算法的正确性。本文在计算各项微分算子、自由表面判定以及压力梯度时分别采用不同的有效粒子影响半径, 在

保证计算精度的同时解决了自由表面粒子误判带来的粒子塌陷问题。



(a) $t=0.37s$



(c) $t=0.60s$

图4 $t=0.37s$ 与 $t=0.60s$ 时的自由表面分布

参考文献

- 1 Koshizuka S, Oka Y, Tamako H. A particle method for calculating splashing of incompressible viscous fluid. In: Proceedings International Conference on Mathematics and Computation, Reactor Physics, and Environmental Analyses, Portland, USA, 1995-4-30~5-4. Proceedings of the International Conference, Mathematics and Computations, Reactor Physics, and Environmental Analyses, 1995, 1514~1521
- 2 Lucy LB. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. Astron J, 1977, 82(12): 1013~1024
- 3 Gingold RA, Monaghan JJ. Smoothed particle hydrodynamics—Theory and application to non-spherical stars. R Astron Soc, 1977, 181: 375~389
- 4 Koshizuka S, Oka Y. Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid. NUCLEAR SCIENCE AND ENGINEERING, 1996, 123(3): 421~43
- 5 SD Shao, E Lo. Incompressible SPH method for simulating Newtonian and non-Newtonian flows with a free surface. ADVANCES IN WATER RESOURCES, 2003, 26(7): 787~800
- 6 D Komatina, M Jovanovic. Experimental study of steady and unsteady free surface flows with water-clay

An improved MPS Method for Simulating Non-Newtonian Free Surface Flows

XIANG Hao CHEN Bin

(State Key Laboratory of Multiphase Flow in Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, 710049, China)

Abstract The Moving Particle Semi-implicit (MPS) method is one of the most widely used Lagrangian particle methods for simulating surface flows problems. This paper couples the non-Newtonian model with the MPS method by adopting cubic spline kernel function and the discretization scheme of divergence operator which are always used in the smoothed particle hydrodynamics (SPH) method. A 2D Cross fluid dam-break problem is investigated and the simulation results are compared with the experimental measurement, the incompressible SPH numerical solution as well as the traditional MPS solution. It is found that the result of front of dam-break anastomoses the experimental data better than the SPH simulation and the traditional MPS solution.

Key words MPS; free surface flow; SPH; Cross model; dam-break