第57卷第1期 数学学报中文版 Vol.57, No.1
2014年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jan., 2014

文章编号: 0583-1431(2014)01-0109-08 **文献标识码: A**

广义 Heisenberg–Virasoro 代数的量子化

陈海波

新疆工程学院基础部 乌鲁木齐 830091
E-mail: 472182987@qq.com

申 冉

东华大学理学院 上海 201620
E-mail: rshen@dhu.edu.cn

张建刚

上海师范大学数学系 上海 200234
E-mail: jzhang@shnu.edu.cn

摘 要 根据作者最近给出的广义 Heisenberg–Virasoro 代数李双代数结构的结果, 将在本文中考虑广义 Heisenberg–Virasoro 代数的量子化, 并给出详细的计算过程.

关键词 李双代数; 量子化; 广义 Heisenberg–Virasoro 代数; Hopf 代数
MR(2010) 主题分类 17B62, 17B05, 17B37
中图分类 O152.5

Quantization on Generalized Heisenberg–Virasoro Algebra

Hai Bo CHEN

Department of Fundamental Education, Xinjiang Institute of Engineering, Urumqi 830091, P. R. China
E-mail: 472182987@qq.com

Ran SHEN

College of Science, Donghua University, Shanghai 201620, P. R. China
E-mail: rshen@dhu.edu.cn

Jian Gang ZHANG

Department of Mathematics, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, P. R. China
E-mail: jzhang@shnu.edu.cn

收稿日期: 2012-11-20; 接受日期: 2013-03-22
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11001046, 11201305); 上海市教委科研创新项目 (12YZ081); 中央高校基本科研业务费基金项目; 东华大学优秀青年教师后备人选科研项目

Abstract In a recent paper, Lie bialgebra structures on generalized Heisenberg–Virasoro algebra $\mathfrak{L}$ are considered by the authors. In this paper, the explicit formula of the quantization on generalized Heisenberg–Virasoro algebra is presented.

Keywords Lie bialgebras; quantization; generalized Heisenberg–Virasoro algebra; Hopf algebra
MR(2010) Subject Classification 17B62, 17B05, 17B37
Chinese Library Classification O152.5

1 引言

上个世纪末, 量子群是由 Drinfeld 和 Jimbo 在研究物理问题 (特别是 Yang–Baxter 方程) 时各自独立发现的. 构造出新的量子群, 就是对不同类型的代数进行量子化. 2007 年, 胡乃红等 [15] 给出广义 Witt 代数的量子化. 2008 年, 宋光艾等 [21] 给出广义 Virasoro-like 型李代数的量子化. 2008 年, Etingof 和 Kazhdan [9, 10] 给出了广义 Kac-Moody 代数的量子化结构. 2010 年, 苏育才等 [23] 给出 Schrodinger–Virasoro 代数的量子化. 最近, 作者 [3] 给出广义 Heisenberg–Virasoro 代数的李双代数结构. 本文将对广义 Heisenberg–Virasoro 代数进行量子化. 记 Γ 是域 $\mathbb{F}$ 上的阿贝尔群, 广义 Heisenberg–Virasoro 代数 $\mathfrak{L}$ 是由

$$\{L_x = t^x\partial,\, I_x = t^x,\, C_L, C_I, C_{LI},\, x \in \Gamma\}$$

生成, 并且满足以下关系

$$\begin{aligned}
&[L_x, L_y] = (y-x)L_{x+y} + \delta_{x+y,0}\tfrac{1}{12}(x^3 - x)C_L,\\
&[I_x, I_y] = y\delta_{x+y,0}C_I,\\
&[L_x, I_y] = yI_{x+y} + \delta_{x+y,0}(x^2 - x)C_{LI},\\
&[\mathfrak{L}, C_L] = [\mathfrak{L}, C_I] = [\mathfrak{L}, C_{LI}] = 0.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

令 $\mathfrak{L}_x = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{L_x, I_x\}$ 且 $x \in \Gamma\backslash\{0\}$, $\mathfrak{L}_0 = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{L_0, I_0, C_L, C_I, C_{LI}\}$. 此时, $\mathfrak{L} = \bigoplus_{x\in\Gamma}\mathfrak{L}_x$ 是一个阶化李代数. 记无中心广义 Heisenberg–Virasoro 代数 $\overline{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L}/\mathscr{C}$, $\mathscr{C} = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{I_0, C_L, C_I, C_{LI}\}$, 并且 C 是 $\mathfrak{L}$ 的中心.

现在, 给出一些基本必要的概念和结论.

下面的定义是由 Drinfeld 给出的结论 [7].

定义 1.1 令 $(H, m, \iota, \Delta_0, S_0, \epsilon)$ 是交换环 R 上的一个 Hopf 代数. 定义 H 上的一个 Drinfeld 扭 $\mathscr{F}$ 是 $H \otimes H$ 内的一个可逆元, 如果满足

$$(\mathscr{F} \otimes 1)(\Delta_0 \otimes \mathrm{Id})(\mathscr{F}) = (1 \otimes \mathscr{F})(\mathrm{Id} \otimes \Delta_0)(\mathscr{F}),$$

$$(\epsilon \otimes \mathrm{Id})(\mathscr{F}) = 1 \otimes 1 = (\mathrm{Id} \otimes \epsilon)(\mathscr{F}).$$

下面的结论可以参考文 [5, 11].

引理 1.2 令 $(H, m, \iota, \Delta_0, S_0, \epsilon)$ 是交换环上一个 Hopf 代数, $\mathscr{F}$ 是 $H \otimes H$ 内的一个 Drinfeld 扭元素, 则下面结论成立:

(1) $w = m(\mathrm{Id} \otimes S_0)(\mathscr{F})$ 在 H 中是可逆元, 并且其逆元素是 $w^{-1} = m(S_0 \otimes \mathrm{Id})(\mathscr{F}^{-1})$.

(2) 定义线性映射 $\Delta : H \to H \otimes H$ 和 $S : H \to H$, 满足

$$\Delta(x) = \mathscr{F}\Delta_0(x)\mathscr{F}^{-1}, \quad S = wS_0(x)w^{-1}, \quad \forall\, x \in H,$$

则 $(H, m, \iota, \Delta, S, \epsilon)$ 成为一个新的 Hopf 代数.

我们记 $(\mathscr{U}(\overline{\mathfrak{L}}), \sigma, \tau, \Delta_0, \epsilon_0, S_0)$ 为 $\mathscr{U}(\overline{\mathfrak{L}})$ 上的标准 hopf 代数结构, 对于任意 $X \in \overline{\mathfrak{L}}$, 有

$$\Delta_0(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X, \quad S_0(X) = -X, \quad \varepsilon_0(X) = 0,$$

其中 Δ_0 称为余乘, S_0 称为对极, ϵ 称为余单位. 特别地, $\Delta_0(1) = 1 \otimes 1$ 和 $\epsilon(1) = S_0(1) = 1$.

定义 1.3 对特征零域 $\mathbb{F}$ 上的任意一个三角的李双代数 $\overline{\mathfrak{L}}$, 我们称 $\mathscr{U}(\overline{\mathfrak{L}})[[t]]$ 是 $\mathscr{U}(\overline{\mathfrak{L}})$ 的一个由 Drinfeld 扭 $\mathscr{F}$ 决定的量子化, 如果 $\mathscr{F}$ 由它的李双代数的结构所决定, 并且有

$$\mathscr{U}(\overline{\mathfrak{L}})[[t]]/t\mathscr{U}(\overline{\mathfrak{L}})[[t]] \cong \mathscr{U}(\overline{\mathfrak{L}}).$$

下面主要是对广义 Heisenberg–Virasoro 代数进行量子化. 通过构造不同的 Drinfeld 扭元, 从而得到两种既非交换又非余交换的 Hopf 代数结构.

关于广义 Heisenberg–Virasoro 代数如 (1.1) 定义, 无中心广义 Heisenberg–Virasoro 代数 $\overline{\mathfrak{L}}$ 是三角上边沿的. 为了给出无中心的广义 Heisenberg–Virasoro 代数 $U(\overline{\mathfrak{L}})$ 的量子化, 我们要根据引理 1.2 明确地构造 Drinfeld 扭. 固定 $\alpha \in \Gamma\backslash\{0\}$, 令

$$h := \alpha^{-1} L_0, \quad e := I_\alpha.$$

由 (1.1) 容易得到 $[h, e] = e$. 我们得到一个三角的李双代数 $(\overline{\mathfrak{L}}, [\cdot,\cdot], \Delta_r)$, 其中 $r = h \otimes e - e \otimes h$ 是经典的 Yang–Baxter 方程 (CYBE) 的一个解, 即 r 是一个经典的 r- 矩阵.

2 主要定理及其证明

定理 2.1 对于 $\forall \alpha \in \Gamma \setminus \{0\}$, 令 $h = \alpha^{-1} L_0$ 和 $e = I_\alpha$, 使得 $[h, e] = e \in \overline{\mathfrak{L}}$, 则在 $\mathbb{F}[[t]]$ 上的空间 $U(\overline{\mathfrak{L}})[[t]]$ 上存在一个非交换且非余交换的 Hopf 代数结构 $(U(\overline{\mathfrak{L}})[[t]], m, \iota, \Delta, S, \epsilon)$, 并且有

$$U(\overline{\mathfrak{L}})[[t]]/tU(\overline{\mathfrak{L}})[[t]] \cong U(\overline{\mathfrak{L}})$$

成立, 这个 Hopf 代数结构保持乘法和余单位不变, 但对于余乘和对极定义如下

$$\begin{aligned}
&\Delta(L_\beta) = 1 \otimes L_\beta + L_\beta \otimes (1 - \mathrm{e}t)^{\alpha^{-1}\beta} + \alpha h^{(1)} \otimes (1 - \mathrm{e}t)^{-1} I_{\alpha+\beta} t, \\
&\Delta(I_\alpha) = 1 \otimes I_\alpha + I_\alpha \otimes (1 - \mathrm{e}t), \\
&S(L_\beta) = -(1 - \mathrm{e}t)^{-\alpha^{-1}\beta} L_\beta + (1 - \mathrm{e}t)^{-\alpha^{-1}\beta} h^{[1]}_{-\alpha^{-1}\beta} I_{\alpha+\beta} t, \\
&S(I_\alpha) = -(1 - \mathrm{e}t)^{-1} I_\alpha.
\end{aligned}$$

记 R 是一个环, 对有单位的 R- 环中的任意元 x 和 $a \in R, n \in \mathbb{Z}$, 令 [13]

$$\begin{aligned}
x_a^{(n)} &:= (x + a)(x + a + 1) \cdots (x + a + n - 1), \\
x_a^{[n]} &:= (x + a)(x + a - 1) \cdots (x + a - n + 1),
\end{aligned}$$

并且记 $x^{(n)} := x_0^{(n)}$, $x^{[n]} := x_0^{[n]}$.

由文 [13, 14], 可以得到下面的引理.

引理 2.2 令 $\mathbb{F}$ 是一个特征为零的域, x 是含有单位的 $\mathbb{F}$- 代数中的任一元素, 且 $a, b \in \mathbb{F}$, $r, s, t \in \mathbb{Z}$, 有

$$x_a^{(s+t)} = x_a^{(s)} x_{a+s}^{(t)}, \quad x_a^{[s+t]} = x_a^{[s]} x_{a-s}^{[t]}, \quad x_a^{[s]} = x_{a-s+1}^{(s)}, \tag{2.1}$$

$$\sum_{s+t=r} \frac{(-1)^t}{s!t!} x_a^{[s]} x_b^{(t)} = \binom{a-b}{r} = \frac{(a-b)\cdots(a-b-r+1)}{r!}, \tag{2.2}$$

$$\sum_{s+t=r}\frac{(-1)^t}{s!t!}x_a^{[s]}x_{b-s}^{[t]}=\binom{a-b+r-1}{r}=\frac{(a-b)\cdots(a-b+r-1)}{r!}. \tag{2.3}$$

下面的引理见文 [22, 命题 1.3 (4)], 这个结论在后面的证明中将被频繁用到.

引理 2.3 令 A 是一个结合代数, 对任意的 $x,y\in A$, $m\in\mathbb{Z}_+$, 有

$$xy^m=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}y^{m-k}(\mathrm{ad}\,y)^k(x). \tag{2.4}$$

引理 2.4 对于 $a\in\mathbb{F}$, $i\in\mathbb{Z}_+$, $n\in\mathbb{Z}$, $\beta\in\Gamma$ 和 $\alpha\in\Gamma\backslash\{0\}$, 有

$$\begin{aligned}
&L_\beta h_a^{(i)}=h_{a-\alpha^{-1}\beta}^{(i)}L_\beta, &&L_\beta h_a^{[i]}=h_{a-\alpha^{-1}\beta}^{[i]}L_\beta,\\
&I_\alpha h_a^{(i)}=h_{a-1}^{(i)}I_\alpha, &&I_\alpha h_a^{[i]}=h_{a-1}^{[i]}I_\alpha,\\
&\mathrm{e}^n h_a^{(i)}=h_{a-n}^{(i)}\mathrm{e}^n, &&\mathrm{e}^n h_a^{[i]}=h_{a-n}^{[i]}\mathrm{e}^n.
\end{aligned}$$

证明 我们只证明第一个等式 (其他同理可得). 由于 $L_\beta h-hL_\beta=-\alpha^{-1}\beta L_\beta$, 对 i 作归纳法证明, $i=1$ 时显然成立. 现在假设 $i>1$ 时成立, 这时有

$$\begin{aligned}
L_\beta h_a^{(i+1)}&=L_\beta h_a^{(i)}(h+a+i)\\
&=h_{a-\alpha^{-1}\beta}^{(i)}L_\beta(h+a+i)\\
&=h_{a-\alpha^{-1}\beta}^{(i)}(h-\alpha^{-1}\beta+a+i)L_\beta\\
&=h_{a-\alpha^{-1}\beta}^{(i+1)}L_\beta.
\end{aligned}$$

对任意 $a\in\mathbb{F}$, 令

$$\begin{aligned}
&\mathscr{F}_a=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}h_a^{[r]}\otimes\mathrm{e}^rt^r,\quad F_a=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}h_a^{(r)}\otimes\mathrm{e}^rt^r,\\
&u_a=m\cdot(S_0\otimes\mathrm{Id})(F_a),\quad v_a=m\cdot(\mathrm{Id}\otimes S_0)(\mathscr{F}_a).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

特别地, 令 $\mathscr{F}=\mathscr{F}_0$, $F=F_0$, $u=u_0$, $v=v_0$. 易得 $S_0(h_a^{(r)})=(-1)^rh_{-a}^{[r]}$ 和 $S_0(\mathrm{e}^r)=(-1)^r\mathrm{e}^r$, 从而可得

$$u_a=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}h_{-a}^{[r]}\mathrm{e}^rt^r,\quad v_a=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}h_a^{[r]}\mathrm{e}^rt^r. \tag{2.6}$$

引理 2.5 对任意 $a,b\in\mathbb{F}$, 我们有

$$\mathscr{F}_aF_b=1\otimes(1-\mathrm{e}t)^{a-b},\quad v_au_b=(1-\mathrm{e}t)^{-(a+b)}.$$

证明 由 (2.2) 和 (2.5) 得

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_aF_b&=\sum_{r,s=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!s!}h_a^{[r]}h_b^{(s)}\otimes\mathrm{e}^r\mathrm{e}^st^rt^s\\
&=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\Bigg(\sum_{r+s=m}\frac{(-1)^s}{r!s!}h_a^{[r]}h_b^{(s)}\Bigg)\otimes\mathrm{e}^mt^m\\
&=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\binom{a-b}{m}\otimes\mathrm{e}^mt^m\\
&=1\otimes(1-\mathrm{e}t)^{a-b}.
\end{aligned}$$

再由 (2.3), (2.6) 和引理 2.4, 可得

$$\begin{aligned}
v_a u_b &= \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{r!s!} h_a^{[r]} \mathrm{e}^r h_{-b}^{[s]} \mathrm{e}^s t^{r+s} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{r+s=m} \frac{(-1)^s}{r!s!} h_a^{[r]} h_{-b-r}^{[s]} \mathrm{e}^m t^m \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{a+b+m-1}{m} \mathrm{e}^m t^m = (1-\mathrm{e}t)^{-(a+b)}.
\end{aligned}$$

推论 2.6 对于任意 $a \in \mathbb{F}$, 元素 F_a 和 u_a 都是可逆的, 对应的逆元素分别是 $F_a^{-1} = \mathscr{F}_a$, $u_a^{-1} = v_{-a}$. 特别地, $F^{-1} = \mathscr{F}$, $u^{-1} = v$.

引理 2.7 对于任意 $a \in \mathbb{F}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, 有

$$\Delta_0(h^{[r]}) = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} h_{-a}^{[i]} \otimes h_a^{[r-i]}.$$

特别地,

$$\Delta_0(h^{[r]}) = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} h^{[i]} \otimes h^{[r-i]}.$$

证明 由于 $\Delta_0(h) = 1 \otimes h + h \otimes 1$, 我们对 r 作归纳. 容易得到 $r=1$ 是成立的. 假设 $r>1$ 时成立, 则对于 $r+1$, 有

$$\begin{aligned}
\Delta_0(h^{[r+1]}) &= \Delta_0(h^{[r]}(h-r)) = \Delta_0(h^{[r]})\big(\Delta_0(h) - \Delta_0(r)\big) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} h_{-a}^{[i]} \otimes h_a^{[r-i]}\right)\big((h-r)\otimes 1 + 1 \otimes (h-r) + r(1\otimes 1)\big) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{r-1} \binom{r}{i} h_{-a}^{[i]} \otimes h_a^{[r-i]}\right)\big((h-r)\otimes 1 + 1 \otimes (h-r)\big) \\
&\quad + r\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} h_{-a}^{[i]} \otimes h_a^{[r-i]} + h_{-a}^{[r+1]} \otimes 1 + h_{-a}^{[r]} \otimes a + h_{-a}^{[r]} \otimes (h-r) \\
&\quad + (h-r)\otimes h_a^{[r]} + 1 \otimes h_a^{[r+1]} - a \otimes h_a^{[r]} \\
&= 1 \otimes h_a^{[r+1]} + h_{-a}^{[r+1]} \otimes 1 + r\sum_{i=1}^{r-1} \binom{r}{i} h_{-a}^{[i]} \otimes h_a^{[r-i]} + h_{-a}^{[r]} \otimes (h+a) \\
&\quad + (h-a)\otimes h_a^{[r]} + \sum_{i=1}^{r-1} \binom{r}{i} h_{-a}^{[i+1]} \otimes h_a^{[r-i]} + \sum_{i=1}^{r-1} (-r+a+i) \binom{r}{i\,i} h_{-a}^{[i]} \otimes h_a^{[r-i]} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{r-1} \binom{r}{i} h_{-a}^{[i]} \otimes h_a^{[r-i+1]} + \sum_{i=1}^{r-1} (-a-i) \binom{r}{i\,i} h_{-a}^{[i]} \otimes h_a^{[r-i]} \\
&= 1 \otimes h_a^{[r+1]} + h_{-a}^{[r+1]} \otimes 1 + \sum_{i=1}^{r} \left[\binom{r}{i-1} + \binom{r}{i\,i}\right] h_{-a}^{[i]} \otimes h_a^{[r-i+1]} \\
&= \sum_{i=0}^{r+1} \binom{r+1}{i} h_{-a}^{[i]} \otimes h_a^{[r+1-i]}.
\end{aligned}$$

由归纳假设, 等式成立.

引理 2.8 元素

$$\mathscr{F}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}h^{[r]}\otimes \mathrm{e}^r t^r$$

是 $U(\overline{\mathfrak{L}})[[t]]$ 中的一个 Drinfeld 扭元.

证明 这里只需验证定义 (见文 [15, 命题 2.5] 中 Drinfeld 扭的两个条件). 具体过程可见文 [15, 命题 2.5] 的证明.

前面已经构造了 Drinfeld 扭元素 $\mathscr{F}$, 现在开始对定义中的标准 Hopf 代数结构

$$(U(\overline{\mathfrak{L}}),m,\iota,\Delta_0,S_0,\epsilon)$$

进行量子化. 首先, 我们仍然需要一些必要的计算过程.

引理 2.9 对于任意 $a\in\mathbb{F}$, $\beta\in\Gamma$, $\alpha\in\Gamma\backslash\{0\}$, 有

$$\begin{aligned}(L_\beta\otimes 1)F_a&=F_{a-\alpha^{-1}\beta}(L_\beta\otimes 1),\\(I_\alpha\otimes 1)F_a&=F_{a-1}(I_\alpha\otimes 1).\end{aligned}$$

证明 结果直接由 (2.5) 和引理 2.4 得出.

引理 2.10 对于任意 $a\in\mathbb{F}$, $\beta\in\Gamma$, $\alpha\in\Gamma\backslash\{0\}$ 和 $r\in\mathbb{Z}_+$, 有

$$L_\beta \mathrm{e}^r=\mathrm{e}^r L_\beta+\alpha r\mathrm{e}^{r-1}I_{\alpha+\beta},\tag{2.7}$$

$$I_\alpha \mathrm{e}^r=\mathrm{e}^r I_\alpha.\tag{2.8}$$

证明 由引理 2.3 和等式 (1.1), 可得

$$\begin{aligned}L_\beta \mathrm{e}^r&=\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{r}{i}\mathrm{e}^{r-i}(\mathrm{ad}\, e)^i(L_\beta)\\&=\mathrm{e}^r L_\beta+\alpha r\mathrm{e}^{r-1}I_{\alpha+\beta}.\end{aligned}$$

同理可得 (2.8).

引理 2.11 对于任意的 $a\in\mathbb{F}$, $\beta\in\Gamma$, $\alpha\in\Gamma\backslash\{0\}$, 有

$$(1\otimes L_\beta)F_a=F_a(1\otimes L_\beta)+\alpha F_{a+1}(h_a^{(1)}\otimes I_{\alpha+\beta}t),\tag{2.9}$$

$$(1\otimes I_\alpha)F_a=F_a(1\otimes I_\alpha).\tag{2.10}$$

证明 由等式 (2.1), (2.5) 和 (2.7), 可得

$$\begin{aligned}(1\otimes L_\beta)F_a&=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}h_a^{(r)}\otimes L_\beta \mathrm{e}^r t^r(1\otimes L_n)F_a\\&=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}h_a^{(r)}\otimes(\mathrm{e}^r L_\beta+\alpha r\mathrm{e}^{r-1}I_{\alpha+\beta})t^r\\&=F_a(1\otimes L_\beta)+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\alpha}{(r-1)!}h_a^{(r)}\otimes \mathrm{e}^{r-1}I_{\alpha+\beta}t^r\\&=F_a(1\otimes L_\beta)+\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\alpha}{r!}h_a^{(r+1)}\otimes \mathrm{e}^r I_{\alpha+\beta}t^{r+1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= F_a(1\otimes L_\beta)+\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\alpha}{r!}h_{a+1}^{(r)}h_a^{(1)}\otimes \mathrm{e}^r I_{\alpha+\beta}t^{r+1}\\
&= F_a(1\otimes L_\beta)+\alpha F_{a+1}\big(h_a^{(1)}\otimes I_{\alpha+\beta}t\big).
\end{aligned}
$$

由此证得 (2.9). 同理, (2.10) 可由 (2.8) 证得.

引理 2.12 对于任意 $a\in\mathbb{F}$, $\beta\in\Gamma$, $\alpha\in\Gamma\backslash\{0\}$, 有

$$
L_\beta u_a = u_{a+\alpha^{-1}\beta}L_\beta - u_{a+\alpha^{-1}\beta}h_{-a-\alpha^{-1}\beta}^{[1]}I_{\alpha+\beta}t, \tag{2.11}
$$

$$
I_\alpha u_a = u_{a+1}I_\alpha. \tag{2.12}
$$

证明 由等式 (2.1), (2.6), (2.7) 和引理 2.4, 有

$$
\begin{aligned}
L_\beta u_a &= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}L_\beta h_{-a}^{[r]}\mathrm{e}^r t^r L_\beta u_a=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}h_{-a-\alpha^{-1}\beta}^{[r]}L_\beta \mathrm{e}^r t^r\\
&= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}h_{-a-\alpha^{-1}\beta}^{[r]}\big(\mathrm{e}^r L_\beta+\alpha r\mathrm{e}^{r-1}I_{\alpha+\beta}\big)t^r\\
&= u_{a+\alpha^{-1}\beta}L_\beta+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r\alpha}{(r-1)!}h_{-a-\alpha^{-1}\beta}^{[r]}\mathrm{e}^{r-1}I_{\alpha+\beta}t^r\\
&= u_{a+\alpha^{-1}\beta}L_\beta-\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}h_{-a-\alpha^{-1}\beta}^{[r+1]}\mathrm{e}^r I_{\alpha+\beta}t^{r+1}\\
&= u_{a+\alpha^{-1}\beta}L_\beta-\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}h_{-a-\alpha^{-1}\beta}^{[r]}h_{-a-\alpha^{-1}\beta-r}^{[1]}\mathrm{e}^r I_{\alpha+\beta}t^{r+1}\\
&= u_{a+\alpha^{-1}\beta}L_\beta-\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}h_{-a-\alpha^{-1}\beta}^{[r]}\mathrm{e}^r h_{-a-\alpha^{-1}\beta}^{[1]}I_{\alpha+\beta}t^{r+1}\\
&= u_{a+\alpha^{-1}\beta}L_\beta-u_{a+\alpha^{-1}\beta}h_{-a-\alpha^{-1}\beta}^{[1]}I_{\alpha+\beta}t.
\end{aligned}
$$

因此, (2.11) 式成立. 同理, 根据引理 2.4 和 2.10, 可以得到 (2.12).

综上所述, 我们可以证明出本文最重要的定理 2.1.

定理 2.1 的证明 根据引理 1.2, 2.5, 2.9, 2.11 和推论 2.6, 有

$$
\begin{aligned}
\Delta(L_\beta) &= \mathscr{F}\Delta_0(L_n)\mathscr{F}^{-1}\\
&= \mathscr{F}(L_\beta\otimes 1)F+\mathscr{F}(1\otimes L_\beta)F\\
&= \mathscr{F}F_{-\alpha^{-1}\beta}(L_\beta\otimes 1)+\mathscr{F}\big(F(1\otimes L_\beta)+\alpha F_1(h^{(1)}\otimes I_{\alpha+\beta})t\big)\\
&= L_\beta\otimes(1-\mathrm{e}t)^{\alpha^{-1}\beta}+1\otimes L_\beta+\alpha h^{(1)}\otimes(1-\mathrm{e}t)^{-1}I_{\alpha+\beta}t\\
&= 1\otimes L_\beta+L_\beta\otimes(1-\mathrm{e}t)^{\alpha^{-1}\beta}+\alpha h^{(1)}\otimes(1-\mathrm{e}t)^{-1}I_{\alpha+\beta}t,\\
\Delta(I_\alpha) &= \mathscr{F}\Delta_0(I_\alpha)\mathscr{F}^{-1}\\
&= \mathscr{F}(I_\alpha\otimes 1)F+\mathscr{F}(1\otimes I_\alpha)F\\
&= \mathscr{F}F_{-1}(I_\alpha\otimes 1)+\mathscr{F}F(1\otimes I_\alpha)\\
&= 1\otimes I_\alpha+I_\alpha\otimes(1-\mathrm{e}t).
\end{aligned}
$$

再由引理 1.2, 2.5, 2.12 和推论 2.6, 有

$$
\begin{aligned}
S(L_\beta) &= u^{-1}S_0(L_\beta)u = -vL_\beta u \\
&= -v(u_{\alpha^{-1}\beta}L_\beta - u_{\alpha^{-1}\beta}h^{[1]}_{-\alpha^{-1}\beta}I_{\alpha+\beta}t) \\
&= -(1-\mathrm{e}t)^{-\alpha^{-1}\beta}L_\beta + (1-\mathrm{e}t)^{-\alpha^{-1}\beta}h^{[1]}_{-\alpha^{-1}\beta}I_{\alpha+\beta}t, \\
S(I_\alpha) &= u^{-1}S_0(I_\alpha)u = -vI_\alpha u = -vu_1I_\alpha = -(1-\mathrm{e}t)^{-1}I_\alpha.
\end{aligned}
$$

本文证明结束.

参 考 文 献

[1] Arbarello E., De Concini C., Kac V. G., et al., Moduli spaces of curves and representation theory, *Comm. Math. Phys.*, 1988, **117**: 1–36.

[2] Billig Y., Respresentations of the twisted Heisenberg–Virasoro algebra at level zero, *Canad. Math. Bulletin*, 2003, **46**: 529–537.

[3] Chen H., Shen R., Zhang J., Lie bialgebra structures on generalized Heisenberg–Virasoro algebra, *J. Donghua Univ., Engl. Ed.*, 2013, **30**(2): 125–131.

[4] Drinfeld V. G., Constant quasiclassical solutions of the Yang–Baxter quantum equation, *Soviet Math. Dokl.*, 1983, **28**: 667–671.

[5] Drinfeld V. G., Hamlitonian structures on Lie group, Lie algebras and the geometric meaning of classical Yang–Baxter equations, *Soviet Math. Dokl.*, 1983, **27**: 68–71.

[6] Drinfeld V. G., On some unsolved problems in quantum group theory, Lecture Notes in Mathematics, 1992, **1510**: 1–8.

[7] Drinfeld V. G., Quantum groups, in: Proceeding of the International Congress of Mathematicians, Vols. 1, 2, Berkeley, Calif. 1986, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987: 798–820.

[8] Entiquez B., Halbout G., Quantization of Γ-Lie bialgebras, *J. Algebra*, 2008, **319**: 3752–3769.

[9] Etingof P., Kazhdan D., Quantization of Lie bialgebras I, *Selecta Math. New Series*, 1996, **2**: 1–41.

[10] Etingof P., Kazhdan D., Quantization of Lie bialgebras, part VI: Quantization of generalized Kac–Moody algealgebras, *Transformation Groups*, 2008, **13**: 527–539.

[11] Etingof P., Schiffmann O., Lectures on Quantum groups, 2nd ed., International Press, Boston, 2002.

[12] Fabbri M. A., Okoh F., Representations of Virasoro-Heisenberg algebras and Virasoro–toroidal algebras, *Canad. J. Math.*, 1999, **51**: 523–545.

[13] Giaquinto A., Zhang J., Bialgebra actin, twists and universal deformation formulas, *J. Pure Appl. Algebra*, 1998, **128**: 133–151.

[14] Grunspan C., Quantizations of the Witt algebra and of simple Lie algebras in characteristic *p*, *J. Algebra*, 2004, **280**: 145–161.

[15] Hu N., Wang X., Quantizations of generalized-Witt algebra anf of Jacobson–Witt algebra in the modular case, *J. Algebra*, 2007, **312**: 902–929.

[16] Jiang Q., Jiang C., Representations of the twisted Heisenberg–Virasoro algebra and the full toroidal Lie algebras, *Algebra Colloq.*, 2007, **14**: 117–134.

[17] Liu D., Zhu L., Generalized Heisenberg–Virasoro algebras, *Front. Math. China*, 2009, **4**: 297–310.

[18] Michaelis W., Lie coalgebras, *Adv. in Math.*, 1980, **38**: 1–54.

[19] Shen R., Jiang C., Derivation algebra and automorphism group of the twisted Heisenberg–Virasoro algebra, *Comm. Alg.*, 2006, **34**: 2547–2558.

[20] Shen R., Jiang Q., Su Y., Verma modules over the generalized Heisenberg–Virasoro algebra, *Comm. Alg.*, 2008, **36**: 1464–1473.

[21] Song G., Su Y., Wu Y., Quantization of generalized Virasoro-like algebras, *Linear Algebra and its Applications*, 2008, **428**: 2888–2899.

[22] Strade H., Farnsteiner R., Modular Lie Algebras and Their Representations, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., vol.116, Marcel Dekker, 1988.

[23] Su Y., Yuan L., Quantization of Schrödinger–Virasoro Lie algebra, *Front. Math. China*, 2010, **5**: 701–715.